МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.Франка

На правах рукопису

ТРЕТЯК
Володимир Іванович

ІНТЕҐРАЛИ ДІЇ ТИПУ ФОККЕРА ТА ФОРМИ РЕЛЯТИВІСТИЧНОЇ ЛАҐРАНЖЕВОЇ ДИНАМІКИ

01.04.02 – теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів – 1996

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем Національної академії наук України

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор
ФУЩИЧ Вільгельм Ілліч

доктор фізико-математичних наук, професор
БЛАЖИЄВСЬКИЙ Лаврентій Федорович

доктор фізико-математичних наук
ЖДАНОВ Валерій Іванович

Провідна організація: Інститут теоретичної фізики ім. М.М.Боголюбова НАН України

Захист відбудеться "15" травня 1996 р. о 15^15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.08 при Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290005, м.Львів, вул. Драгоманова, 50, аудиторія N 1.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка (м.Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий "12" квітня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради Д 04.04.08
доктор фізико-математичних наук
професор А.Є.Носенко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми досліджень. Необхідність послідовного врахування релятивістичних ефектів у системах частинок відчувається в різних галузях сьогочасної теоретичної фізики. Поряд із більш поширеним теоретико-польовим підходом до цієї проблеми, який не є вільний від концептуальних та технічних труднощів, заслуговують на увагу релятивістичні теорії прямих взаємодій (дії на віддалі). Вони не використовують явно уявлення про поле — носій взаємодії — як про самостійний фізичний об'єкт із своїми власними ступенями вільности [1], а оперують лише змінними, що характеризують самі частинки, та будуються, як правило, напівфеноменологічним чином. Відомі як класичні, так і квантові варіянти цих теорій.

Для не дуже високих енергій релятивістичні кінематичні ефекти починають проявлятися раніше, ніж процеси народження та знищення частинок. Збереження N-частинкового сектору відзначається також у деяких точних моделях релятивістичної квантової теорії поля. Такі системи, принаймні наближено, можна розглядати у рамках релятивістичної квантової механіки. На цьому шляху отримано ряд результатів стосовно конкретних систем (див., наприклад, огляд Р.П.Гайда, *Физ. ЭЧАЯ*, 1982, **13**, 427).

Хоча повний опис реальних фізичних мікрооб'єктів можливий лише на квантовому рівні, класичні релятивістичні теорії прямих взаємодій викликають особливий інтерес. Це пов'язано насамперед з тим, що у релятивістичній теорії проявляється ряд особливостей квантово-механічного опису, пов'язаних з нетривіяльною фізичною інтерпретацією понять, які він використовує (прикладами можуть служити миттєвий стан системи, позиційні змінні, причинність). Їх дослідження найбільш природньо проводити спершу на класичному рівні. Крім того, класичні релятивістичні теорії знаходять застосування у дослідженні систем з ґравітаційною взаємодією, у статистичній рівноважній та нерівноважній механіці; можливо, вони будуть придатні для опису систем ча-

[1] У роботі автор дотримується правил правопису, сформульованих у Термінологічно-правописній конвенції, схваленій Міжнародною конференцією "Фізика в Україні" в червні 1993 р.

стинок із високими енерґіями, коли довжина хвилі де Бройля, що відповідає відносному рухові, мала порівняно з радіусом дії сил.

На сьогодні відомо багато різних підходів до побудови класичної релятивістичної динаміки, що переважно розвиваються незалежно один від одного та без належної уваги до взаємозв'язку між ними.

Першою і найбільш фундаментальною вимогою до кожної теорії, що претендує на опис релятивістичних систем, є Пуанкаре–інваріянтність. У локальній теорії поля вона задовольняється заданням трансформаційних властивостей польових функцій за допомогою незвідних зображень групи Пуанкаре. У теорії прямих взаємодій способи задоволення цієї вимоги більш різноманітні й витончені.

Найбільш природнім з точки зору Пуанкаре–інваріянтности виглядає багаточасовий опис світових ліній системи N частинок у термінах їх 4-координат у просторі Мінковського $x_a^\nu = x_a^\nu(\tau_a)$, $a = \overline{1,N}$, $\nu = \overline{0,3}$ з деякими (інваріянтними) параметрами τ_a. Ці підходи називають явно коваріянтними. Вони використовують такі основні формалізми:

1.Інтеґрали дії типу Фоккера.

2.Диференціяльно–різницеві або інтеґро–диференціяльні рівняння руху.

3.Рівняння руху другого порядку.

4.Синґулярні лаґранжіяни.

5.Гамільтонів формалізм із в'язями.

6.Формалізм Пуанкаре-Картана.

Інтеґрали дії типу Фоккера становлять історично перший та дуже важливий підхід до послідовного опису релятивістичної системи частинок у термінах прямої взаємодії. Забезпечуючи явну Пуанкаре– та репараметризаційну інваріянтність, вони можуть служити вихідною базою для розвитку інших формалізмів релятивістичної теорії прямих взаємодій, зокрема, тривимірного лаґранжевого, гамільтонового чи ньютонового. Тісний зв'язок інтеґралів Фоккера з теоретико–польовим описом дозволяє надавати фізичного змісту загальним конструкціям, притаманним вказаним формалізмам. Для феноменологічної за своєю суттю теорії прямих взаємодій велике значення має можливість виділити з широкого класу виразів, допустимих з точки зору загальних вимог Пуанкаре–інваріянтности, причинности і под., деякий підклас, що має теоретико–польові аналоги.

Випадок електромагнетної взаємодії розглядав Фоккер ще на початку століття. Прагнення поширити цей розгляд на опис процесів випромінювання привело до побудови електродинаміки Вілера–Фейнмана, що є взірцевою конструкцією такого типу теорій. Узагальнення на випадок скалярного та векторного масивних полів дано Гавасом. Інтеграл дії типу Фоккера для безмасового тензорного поля рангу 2 відповідає лінійному за взаємодією наближенню загальної теорії відносности. Аналізові загального випадку тензорного поля довільного рангу n присвячено ряд робіт, але всі вони ігнорують одну важливу обставину. Число незалежних ступенів вільности поля, яке описує обмін віртуальними масивними бозонами спіну n, рівне $2n + 1$, завжди менше, ніж число компонент симетричного тензорного поля рангу n. У теорії поля для вилучення зайвих компонент застосовується техніка проекційних операторів. У дисертаційній роботі ми використовуємо цю техніку в контексті теорії джерел Швінгера, переходячи від запропонованого цим автором квантового формалізму до класичної дії типу Фоккера.

У перелічених вище чотиривимірних підходах за явну релятивістичну інваріянтність доводиться розплачуватися переозначеністю опису (використанням зайвих змінних), яка в кінцевому результаті завжди усувається накладанням деяких в'язей, що ефективно зводять число конфіґураційних ступенів вільности системи N частинок від $4N$ до $3N$. У підходах 4-6 ці в'язі виникають або вводяться явно майже з самого початку, а в 1-3 цього вдається уникнути завдяки застосуванню параметично-інваріянтних виразів. Однак за умови врахування усіх необхідних в'язей або після конкретизації параметрів τ_a ми все одно приходимо до виразів, що не мають явної коваріянтності. У квантовій теорії поля явно коваріянтний опис приводить до відомої проблеми з виділенням відносного часу x_1^0 - x_2^0 у рівнянні Бете-Солпітера, яка розв'язується в рамках квазіпотенціяльного підходу шляхом явного врахування згаданих в'язей.

Тому заслуговують уваги такі підходи (їх можна назвати тривимірними), в яких процес накладання в'язей здійснюється від самого початку, і вся теорія будується виключно в термінах незалежних змінних x_a^i $(i = 1,2,3)$ з єдиним параметром еволюції t. Тривимірні підходи ближчі за своєю формою до нерелятивістичної механіки. Усі три основних формалізми останньої — ньютонів, лагранжів і гамільтонів — можуть використовуватися для їх розвитку. Дослідження останніх десятиліть показали, що у кожному з цих формалізмів можна цілком задовільно сформулювати принцип релятивістичної інваріянтности і добитися його виконання.

Одним із стимулів до розвитку тривимірних підходів є сподівання поширити на релятивістичну область добре опрацьовані методи побудови квантової і статистичної механіки, що виходять з нерелятивістичної класичної механіки. Першим етапом у реалізації такої програми повинен бути розвиток і дослідження тривимірних підходів у класичній релятивістичній механіці системи частинок.

Найбільшого розвитку та поширення серед тривимірних формалізмів у релятивістичній теорії прямих взаємодій набула гамільтонова механіка, що охоплює класичну і квантову області. У праці (P.A.M.Dirac, *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 392), що відкрила цей напрямок, Дірак звернув увагу на можливість ряду альтернативних тривимірних описів релятивістичних систем частинок у залежності від означення їх миттєвого стану, тобто задання відношення одночасности між точками (подіями) світових ліній різних частинок. Внаслідок релятивістичного принципу причинности — скінченности швидкости поширення взаємодії — кожна просторовоподібна (або ізотропна, якщо виключити з розгляду частинки нульової маси спокою) гіперповерхня в просторі Мінковського може визначати відношення одночасности, оскільки усі належні їй події не можуть перебувати в причинно-наслідковому зв'язку. Описи, що відповідають різним виборам гіперповерхонь одночасности, Дірак назвав формами релятивістичної динаміки. Він розглянув три конкретні форми динаміки, що визначаються гіперповерхнями $x^0 = 0$ (миттєва), $x^0 - x^3 = 0$ (фронтальна) і $x_\nu x^\nu = k^2$

(точкова, а точніше — цілий клас форм, що відповідають різним значенням дійсного параметру k).

Релятивістичний гамільтонів опис вимагає побудови канонічної (унітарної) реалізації групи Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$, причому принаймні один її ґенератор — гамільтоніян P_0 — повинен містити функцію, що описує взаємодію. Із структури алгебри Пуанкаре $p(1,3)$ випливає, що тоді взаємодія повинна фігурувати і в деяких інших ґенераторах. Вільні від взаємодії ґенератори утворюють, зрозуміло, власну підалгебру в $p(1,3)$. У сучасній релятивістичній гамільтоновій механіці первісні геометричні міркування Дірака відійшли на другий план, і під формою динаміки розуміють вибір деякої підалгебри $p(1,3)$, яка реалізується ґенераторами, незалежними від взаємодії.

Кожній гіперповерхні у просторі Мінковського можна співставити підалгебру алгебри Пуанкаре, що відповідає перетворенням, які залишають цю гіперповерхню інваріянтною. Однак для надання такій формальній відповідності між геометричним і алгебричним означеннями до поняття форм релятивістичної динаміки реального фізичного змісту необхідні додаткові дослідження. Вони, як і взагалі розвиток гамільтонового формалізму, ускладнюються теоремою про невзаємодію (D.G.Currie, T.E.Jordan, E.C.G.Sudarshan, *Rev. Mod. Phys.*, **1963**, **35**, 350), яка забороняє в описі взаємодіючих частинок використовувати як позиційні канонічні змінні коваріянтні координати частинок, тобто тривимірні складові x_a^i 4-векторів x_a^ν, що описують світові лінії у просторі Мінковського. У зв'язку з цим висловлювались навіть міркування про беззмістовність принципу релятивістичної інваріянтности у тривимірному гамільтоновому підході. Хоча наступні дослідження і особливо праці Соколова показали можливість несуперечливого гамільтонового опису квантової задачі розсіяння, що приводить до Пуанкаре–інваріянтної S-матриці; розгляд фізичних основ формалізму вимагає залучення класичних моделей і детального дослідження трансформаційних властивостей позиційних змінних. Відзначимо, що у релятивістичній гамільтоновій механіці, поряд із більш звичною миттєвою формою, дуже корисним виявилося застосування точкової (С.Н.Соколов, *ТМФ*, 1978, 36, 193; S.N.M.Ruiysenaars, *Ann. of Phys.*, 1980, **126**, 399)) і фронтальної (Leutwyler H.,Stern J., *Ann. of Phys.*, 1978, **112**, 94) форм релятивістичної динаміки у їх алгебричному означенні.

Для лаґранжевого і ньютонового формалізму, які тісніше, ніж гамільтонів, пов'язані з простором Мінковського, саме геометричний підхід до поняття форм динаміки є найбільш природнім.

Ньютонів формалізм у тривимірному описі прямих релятивістичних взаємодій є логічно замкнутим і несуперечливим, однак він не дуже вигідний для одержання законів збереження та квантування і в даний час розглядається переважно у рамках явно коваріянтного підходу, що базується на рівняннях руху другого порядку.

Лаґранжів формалізм, застосування якого у теорії прямих взаємодій заініціював професор Р.Ґайда, виявляється найбільш фундаментальним і зручним у розгляді загальних питань релятивістичної теорії прямих взаємодій. У процесі його розвитку, здійсненого в працях Р.Ґайди, Ю.Ключковського і дисертанта спершу в миттєвій формі динаміки, було розкрито ряд переваг перед іншими підходами:

–можливість використовувати коваріянтні координати частинок як базові змінні;

–просте розв'язання задачі додавання взаємодій на рівні вихідної функції Лагранжа;

–зв'язок з теоретико-польовими моделями у наближених підходах або в точному випадку з допомогою інтеґралів дії типу Фоккера.

Тому поширення релятивістичного лаґранжевого опису на інші форми динаміки (крім миттєвої) та дослідження взаємозв'язків з іншими підходами до побудови релятивістичної теорії прямих взаємодій між частинками та з теоретико-польовим описом надає цьому формалізмові необхідної гнучкости та загальности, дозволяючи розглядати його як інтеґруючий елемент класичної Пуанкаре-інваріянтної механіки.

<u>Метою роботи</u> є побудова класичного лаґранжевого опису системи частинок з прямою взаємодією в довільній формі релятивістичної динаміки поряд із дослідженням в цьому контексті йо-

го зв'язків з іншими тривимірними формалізмами — ньютоновим та гамільтоновим, а також з явно коваріянтними інтеґралами дії типу Фоккера.

Наукова новизна. У роботі вперше отримано інтеґрали дії типу Фоккера, що відповідають взаємодіям, які переносяться класичними лінійними релятивістичними полями, що забепечують незвідне зображення групи Пуанкаре з фіксованими значеннями інваріянтів маси і спіну. Запропоновано ориґінальний метод переходу від явно коваріянтних фоккерових інтеґралів дії, сформульованих у термінах 4-вимірних координат і швидкостей частинок, до одночасового лаґранжевого опису в термінах тривимірних координат частинок і їх похідих усіх порядків за спільним для усіх частинок системи параметром еволюції. Вибір останнього характеризує форму релятивістичної лаґранжевої динаміки.

У довільній формі динаміки сформульовано та проаналізовано достатні умови Пуанкаре–інваріянтности тривимірного лаґранжевого опису та знайдено широкий клас їх точних розв'язків, що відповідають одночасовому зображенню інтеґралів дії типу Фоккера. В дисертації вперше отримано в довільній формі динаміки вирази для величин, збереження яких випливає з умов Пуанкаре-інваріянтности.

У роботі вперше побудовано оператори, що пов'язують функції Лаґранжа у різних формах релятивістичної динаміки.

За допомогою принципів відбору фізично осмислених розв'язків рівнянь Ойлера–Лаґранжа з вищими похідними (за які приймається вимога аналітичности за параметром, що фіґурує у вихідному лаґранжіяні — константі взаємодії або c^{-1}) розглянуто перехід від лаґранжевого до ньютонового формалізму. Вперше узагальнено на довільну форму динаміки умови Пуанкаре-інваріянтности останнього та проаналізовано зв'язок із явно коваріянтним підходом до побудови предиктивної релятивістичної динаміки.

Здійснена в дисертації гамільтонізація одержаних ньютонових рівнянь руху приводить до встановлення зв'язку лаґранжевого й гамільтонового формалізмів теорії прямих релятивістичних взаємодій частинок у довільній формі динаміки. Вперше знайдено співвідношення, що дозволяють у довільному наближенні будувати за даною функцією Лаґранжа канонічні змінні як функції коваріянтних координат частинок і їх перших похідних. Вказано спосіб побудови канонічних ґенераторів алгебри Пуанкаре у довільній формі динаміки. Отримані результати можуть служити основою для переходу до квантового гамільтонового опису у довільній алгебричній формі динаміки, поєднаного з визначеними в дисертації правилами зв'язку канонічних змінних з коваріянтними координатами частинок. Ці правила, а також встановлений у роботі зв'язок гамільтоніянів взаємодії з лаґранжіянами, інтеґралами дії типу Фоккера і теоретико-польовим описом дозволяють істотно розширити фізичну інтерпретацію релятивістичної квантової гамільтонової динаміки системи частинок.

У дисертації вперше розглянуто випадки, коли можливим є Пуанкаре-інваріянтний опис системи взаємодіючих частинок у термінах лаґранжіянів, залежних тільки від координат і швидкостей. Це фронтальна форма динаміки у двовимірному просторі-часі M_2 та ізотропні форми динаміки для системи двох частинок у M_4.

Вперше побудовано слабкорелятивістичні лаґранжіяни системи частинок у першому порядку за c^{-2}, що відповідають взаємодіям, які переносяться лінійним релятивістичним полем фіксованої маси та цілого спіну, знайдено вирази для інтеґралів руху в цьому наближенні. Побудовано також загальні розв'язки умов Пуанкаре-інваріянтности з точністю до c^{-2} у деяких важливих формах динаміки: фронтальній, точковій та гіперболоїдній. Раніше такі розв'язки будувалися лише у миттєвій формі динаміки.

Розглянуто застосування розвинутого формалізму до проблем рівноважної статистичної механіки. У рамках фронтальної форми динаміки сформульовано нову релятивістичну модель одновимірних твердих сфер та побудовано її точний розв'язок у термодинамічній межі. Знайдено слабкорелятивістичні поправки до термодинамічних функцій системи частинок з довільною нерелятивістичною взаємодією, що задовольняє умови стійкости та швидкого спадання. Таких загальних результатів у літературі раніше не зустрічалось.

<u>Практичне значення роботи.</u> Результати дисертаційної роботи можуть застосовуватися для опису релятивістичних ефектів у атомах, ядрах та інших малочастинкових системах, коли можна знехтувати процесами народження та знищення частинок, у дослідженні складених моделей адронів для релятивізації прямої взаємодії між кварками, у теорії прямої гравітаційної взаємодії, у класичній релятивістичній статистичній механіці.

На захист виносяться такі основні положення:

1. Система точкових частинок із часосиметричною взаємодією, якій відповідає класичне релятивістичне поле довільної маси та цілого спіну, описується інтегралом дії типу Фоккера із явною Пуанкаре– та репараметризаційною інваріянтністю.
2. У довільній формі динаміки кожному інтеґралові дії типу Фоккера можна поставити у відповідність одночасовий нелокальний лаґранжіян взаємодії, заданий на просторі джетів нескінченного порядку.
3. Умови Пуанкаре–інваріянтности одночасового лаґранжевого опису в різних формах релятивістичної динаміки виражаються системою лінійних диференціяльних рівнянь першого порядку в термінах відповідної реалізації алгебри Пуанкаре векторними полями Лі-Беклунда.
4. Взаємозв'язок між різними формами лаґранжевої динаміки здійснюється експонентами від певних векторних полів Лі–Беклунда.
5. Принципи відбору фізичних розв'язків рівнянь руху дозволяють здійснити в рамках розвинень за степенями константи взаємодії перехід від одночасового нелокального лаґранжевого опису релятивістичної системи частинок з прямою взаємодією до предиктивного ньютонового й гамільтонового формалізмів.

6. В ізотропних формах динаміки існують релятивістичні лаґранжіяни міжчастинкової взаємодії, залежні від похідних не вище першого порядку. Це дозволяє сформулювати деякі релятивістичні моделі класичної, квантової та статистичної механіки, що допускають точні розв'язки.
7. Слабкорелятивістичні лаґранжіяни системи частинок із взаємодіями, що відповідають класичним полям довільної маси та спіну, є частковим випадком загальних розв'язків умов Пуанкаре-інваріянтности лаґранжевого опису з точністю до c^{-2}.
8. Слабкорелятивістичні поправки до термодинамічних потенціялів системи частинок із швидко спадною взаємодією виражаються в термінах нерелятивістичного конфіґураційного інтеґралу.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на всесоюзних конференціях "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации" (Москва, 1981, 1984); міжнародних семінарах з фізики високих енерґій та квантової теорії поля (Протвіно, 1983, 1984, 1992); IX Європейській конференції Few Body Problems in Physics (Tbilisi, 1984); II Soviet-Italian Symp. on the Mathematical Problems of Statistical Physics (Львів, 1985); X European Symp. on the Dynamics of Few-Body System (Balatonfüred, Hungary, 1985); Workshop "Constraint's Theory and Relativistic Dynamics" (Florence, Italy, 1986), міжнародній нараді з теорії малочастинкових і кварк-адронних систем (Дубна, 1987), на міжнародному симпозіюмі "Motion of Test Bodies in the Relativistic Gravitational Theory" (Вільнюс, 1990 р.); міжнародному науковому семінарі на честь академіка О.С.Парасюка (Київ, 1991), міжнародній конференції з фізики кількох частинок і кварк-адронних систем (Харків,1992), міжнародних конференціях "Фізика в Україні" (Київ, 1993); "Hadrons-94" (Ужгород, 1994); "Симетрія у нелінійній математичній фізиці" (Київ, 1995), міжнародній нараді по статистичній фізиці та теорії конденсованих систем (Львів, 1995); а також на семінарах Інституту фізики високих енерґій (Протвіно), лабораторії теоретичної фізики Об'єднаного Інституту ядерних досліджень (Дубна), Інституту прикладних проблем механіки та математики (Львів), Інституту фізики конденсованих систем НАН України.

Публікації. За матеріялами дисертації опубліковано 65 робіт, основні з яких перелічено в кінці автореферату. У спільних публікаціях дисертантові належить опрацювання та аналіз основних елементів лаґранжевого опису системи частинок у різних формах релятивістичної динаміки та дослідження його зв'язку з іншими підходами до побудови релятивістичної теорії прямих взаємодій.

Структура і об'єм дисертації. Дисертація складається із вступу, десяти розділів, підсумків та списку цитованої літератури. Робота викладена на 306 сторінках, включає список посилань, що містить 297 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** стисло розглянуто основні поняття релятивістичної теорії прямих взаємодій, обговорено значення використання різних форм релятивістичної динаміки в Пуанкаре–інваріянтному описі систем частинок, сформульовано мету роботи та основні положення, які виносяться на захист.

У **першому розділі** після обговорення деяких загальних обставин, що характеризують взаємовідношення між теорією поля та релятивістичною дією на віддалі розглядається побудова дії типу Фоккера для релятивістичного поля маси κ та спіну n. Вихідним пунктом цієї побудови служить дія Швінґера для тензорного джерела, що описує взаємодію, яка здійснюється шляхом обміну бозонами маси κ і спіну n:

$$S_I(J) = \frac{1}{2}\int \frac{(dp)}{(2\pi)^4} J^{\mu_1\dots\mu_n}(-p) J^{\nu_1\dots\nu_n}(p) G(p) \Pi_{\mu_1\dots\mu_n\nu_1\dots\nu_n}(p). \qquad (1)$$

Тут $J(p)$ і $G(p)$ — Фур'є–образи джерела (струму) та функції Ґріна, відповідно, а симетричний проекційний тензор П, що є поліноміяльною функцією від p степеня n, визначається із співвідношення

$$x^{\mu_1}\dots x^{\mu_n} \Pi_{\mu_1\dots\mu_n\nu_1\dots\nu_n} y^{\nu_1}\dots y^{\nu_n} = \beta^n P_n(\alpha/\beta), \qquad (2)$$

де P_n – поліноми Лежандра, $\alpha \equiv x\circ y$, $\beta \equiv \sqrt{(x\circ x)(y\circ y)}$ і $\circ$ позначає згортку відповідних векторів з тензором $g_{\mu\nu}(p) \equiv \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/\kappa^2$.

Розглядаючи систему точкових частинок, що описується параметричними рівняннями їхніх світових ліній $\gamma_a : \mathrm{R} \to \mathrm{M}_4, a = \overline{1,N}$, у просторі Мінковського M_4 з координатами $x^\mu, \mu = \overline{0,3}$ та метрикою $\| \eta_{\mu\nu} \| = diag(1,-1,-1,-1)$:

$$\gamma_a : \tau_a \mapsto x_a^\mu(\tau_a), \tag{3}$$

для тензорного джерела рангу n вибираємо таке параметрично-інваріянтне зображення

$$J^{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = \sum_a g_a \int d\tau_a (\sqrt{u_a^2})^{1-n} u_a^{\mu_1} \ldots u_a^{\mu_n} \delta[x - x_a(\tau_a)]. \tag{4}$$

Тут g_a — константи взаємодії (заряди) відповідних частинок Підставляючи (4) у дію Швінгера (1), одержимо вираз для дії в термінах лише частинкових змінних — 4-координат x_a та швидкостей $u_a = dx_a/d\tau_a$ взаємодіючих точкових частинок:

$$\begin{aligned} S_I \;=\; & \sum_{a<}\sum_b g_a g_b \int d\tau_a \int d\tau_b (\sqrt{u_a^2 u_b^2})^{1-n} [(u_a * u_a)(u_b * u_b)]^{n/2} P_n(\bar{\omega}_{ab}) \\ & \times G^{sym}[(x_a - x_b)^2]. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут відповідно до концепції прямої взаємодії, доданок з a=b опущено, використано симетричну функцію Ґріна рівняння Кляйна–Ґордона та позначено

$$\bar{\omega}_{ab} = \frac{(u_a * u_b)}{\sqrt{(u_a * u_a)(u_b * u_b)}}, \qquad d_a \equiv u_a^\mu \frac{\partial}{\partial x_a^\mu}. \tag{6}$$

$$(u_a * u_a) = u_a^2 + d_a^2/\kappa^2, \qquad (u_a * u_b) = (u_a \cdot u_b) - d_a d_b/\kappa^2. \tag{7}$$

Дану систему можна описати інтеґралом дії типу Фоккера

$$S = -\sum_a m_a \int d\tau_a \sqrt{u_a^2} - S_I, \tag{8}$$

де m_a - маса спокою частинки а. Значенням $n = 0, 1$ відповідають відомі вирази для скалярної та векторної взаємодій.

У загальному випадку релятивістичної системи частинок із взаємодіями, що не обов'язково володіють теоретико–польовим аналогом, Пуанкаре- та репараметризаційна інваріянтність дії (8) забезпечується вибором S_I у вигляді

$$S_I = \sum_{a<}\sum_{b}\int d\tau_a \int d\tau_b \sqrt{u_a^2 u_b^2} R_{ab}(x_a, x_b, \hat{u}_a, \hat{u}_b) \tag{9}$$

з деякими (узагальненими) функціями $R_{ab} = R_{ab}(\rho_{ab}, \omega_{ab}, \sigma_{ab}, \sigma_{ba})$, що описують взаємодію та залежать від скалярних добутків 4-векторів $x_a^\mu - x_b^\mu$ та $\hat{u}_a^\mu = u_a^\mu/\sqrt{u_a^2}$:

$$\rho_{ab} = (x_a - x_b)^2, \qquad \sigma_{ab} = (x_a - x_b)\cdot\hat{u}_a, \qquad \omega_{ab} = \hat{u}_a\cdot\hat{u}_b. \tag{10}$$

Для взаємодій, що характеризуються безмасовими полями спіральности $\lambda = \pm n$, у роботі отримано вираз відповідної дії Фоккера (9) із

$$R_{ab} = g_a g_b T_n(\omega_{ab})\delta(\rho_{ab}), \tag{11}$$

де T_n — поліноми Чебишева. Для $n = 1$ формула (11) дає інтеґрал дії електродинаміки Вілера–Фейнмана; значення $n = 2$ після заміни $g_a g_b$ на $-G g_a g_b$ відповідає лінійному наближенню загальної теорії відносности. Цікавий клас моделей (які називатимемо асиметричними) отримується заміною в (11) симетричної функції Ґріна $\delta(x^2)$ на запізнювальну ($\eta = 1$) або випереджувальну ($\eta = -1$) функції: $\theta(\eta x^0)\delta(x^2)$. Така заміна зберігає Пуанкаре-інваріянтність опису й відповідає ситуації, коли кожна пара частинок a і b взаємодіє таким чином, ніби на частинку a діє, скажімо, запізнювальне поле, створене частинкою b, а на b — випереджувальне поле, створене частинкою a.

В другому розділі розглядається перехід від явно коваріянтних інтеґралів дії типу Фоккера до одночасового лаґранжевого опису в довільній формі динаміки. Тут вводиться геометричне означення форми динаміки з допомогою шарування Σ простору Мінковського M_4 гіперповерхнями $t = \sigma(x), t \in \mathrm{R}$, що володіють наступною властивістю: Кожна гіперповерхня $\Sigma_t = \{x \in \mathrm{M}_4 | \sigma(x) = t\}$ перетинає світові лінії γ_a усіх частинок в одній і лише одній точці $x_a(t) = \gamma_a \cap \Sigma_t$. Це дозволяє розглядати t як параметер еволюції системи. У Пуанкаре-інваріянтній теорії, коли розглядаються лише часоподібні світові лінії, гіперповерхні Σ_t повинні бути просторовоподібними або ізотропними. Тоді рівняння гіперповерхні Σ_t має розв'язок $x^0 = \varphi(t, \mathbf{x})$, де $\mathbf{x} = (x^i)$, $i = 1, 2, 3$. Таким чином, в'язь $x_a(t) \in \Sigma_t$ дозволяє виразити нульові компоненти $x_a(t)$ у термінах t і $x_a^i(t)$, $i = 1,2,3$. Параметричні рівняння світових ліній у даній формі динаміки мають вигляд $x^0 = \varphi(t, \mathbf{x}_a(t)) \equiv \varphi_a$, $x^i = x_a^i(t)$.

Еволюція системи описується $3N$ функціями $t \mapsto x_a^i(t)$. Зручно вважати, що вони визначають переріз $s : \mathrm{R} \to \mathrm{F}, t \mapsto (t, x_a^i(t))$ тривіальної волокнистої в'язки (fibre bundle) $\pi : \mathrm{F} \to \mathrm{R}$ із 3N-вимірним волокном $\mathrm{E} = \mathrm{R}^{3N}$.

Різні вибори шарування Σ визначають зовні цілком відмінні тривимірні описи, які називаємо формами релятивістичної динаміки. Трьом діраковим формам динаміки співставляємо шарування $x^0 = t$ (миттєва, Σ^I), $x^0 - x^3 = t$ (фронтальна, Σ^F) і $x \cdot x = t^2$ (точкова, Σ^P). Альтернативним відповідником діракової точкової форми може служити гіперболоїдна форма динаміки Σ^H, що задається будь-яким елементом з однопараметричного класу шарувань $x^0 + \sqrt{\alpha^2 + \mathbf{x}^2} = t$, де $\alpha \in \mathrm{R}$ — довільний дійсний параметер. Доцільно теж виділити клас гомохронних форм динаміки Σ^h, які задаються рівняннями виду $x^0 + \Psi(\mathbf{x}) = t$ з довільною функцією $\Psi(\mathbf{x})$ і забезпечують лінійний зв'язок між x^0 і t.

Показано, що у кожній формі динаміки інтегралам дії типу Фоккера загального вигляду (8), (9) можна співставити одночасовий функціонал дії

$$S = \int dtL \tag{12}$$

з функцією Лаґранжа $L : J^\infty\pi \to \mathrm{R}$, означеною на просторі джетів в'язки π. Стандартні координати $x_a^{i(s)}$ простору $J^\infty\pi$ для перерізу $s : t \mapsto (t, x_a^i(t))$, що належить до відповідного класу еквівалентности з $J^\infty\pi$, мають значення $x_a^{i(s)}(t) = d^s x_a^i(t)/dt^s, s = 0,1,2,\ldots$. Далі часто позначаємо $x_a^{i(1)} \equiv v_a^i$ і $x_a^{i(2)} \equiv \dot{v}_a^i$. Відповідні одночасові лаґранжіани мають вигляд

$$L = -\sum_a m_a \sqrt{(D\varphi_a(t))^2 - v_a^2(t)} - U, \tag{13}$$

де потенціял взаємодії U визначається формулою

$$U = \sum_{a<}\sum_b \int d\theta e^{\theta(\lambda D - D_a)} \chi_{ab}(t, \theta, \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{v}_a, \mathbf{v}_b). \tag{14}$$

Тут D_a — оператор повної похідної за t, що діє лише на змінні частинки a,

$$D_a = \sum_{s=0}^{\infty} x_a^{i(s+1)} \frac{\partial}{\partial x_a^{i(s)}}, \quad \sum_a D_a = D - \frac{\partial}{\partial t}, \tag{15}$$

λ — довільне дійсне число, що не зпливає на спостережувані характеристики системи, а функції χ_{ab} визначаються інтегралом Фоккера (9) та формою динаміки. Розклад експоненти в ряд показує залежність лагранжіяну взаємодії (14) від похідних безмежного порядку. Побудовано явні вирази для одночасових лагранжіянів взаємодії, що відповідають класичним релятивістичним полям довільної маси та (цілого) спіну. Розглянуто проблему одного тіла, що відповідає ситуації, коли в системі двох частинок одна з них настільки важка, що може вважатися нерухомою. У цьому наближенні рух легкої частинки описується лагранжіяном, залежним не вище як від перших похідних.

Обговорено проблеми інваріянтности тривимірного опису системи частинок відносно довільної r-параметричної групи Лі $\mathcal{G}$, для якої відома її дія в просторі Мінковського M_4 точковими перетвореннями $g : \mathrm{M}_4 \to \mathrm{M}_4$,

$$x^\mu \mapsto (gx)^\mu = x^\mu + \lambda^\alpha \zeta_\alpha^\mu + o(\lambda), \tag{16}$$

де λ^α, $\alpha = 1, \dots, r$, — канонічні параметри групи. Групова дія (16) індукує дію групи $\mathcal{G}$ на множині світових ліній γ_a за правилом $\gamma_a \mapsto g\gamma_a = \{gx | x \in Im\gamma_a\}$. Оскільки у даній формі динаміки світові лінії γ_a визначаються функціями $t \mapsto x_a^i(t)$ чи, іншими словами, перерізами в'язки π, ми одержуємо дію групи $\mathcal{G}$ на $J^\infty\pi$. Зауважимо, що вона суттєво залежить від вибору форми динаміки.

Показано, що з кожною формою динаміки природньо співставляються дві підалгебри алгебри Лі $\mathcal{AG}$ групи $\mathcal{G}$ — алгебри стабільности $\mathcal{AG}_S(\Sigma)$ та інваріянтности $\mathcal{AG}_I(\Sigma)$ форми динаміки Σ. Алгебра стабільности відповідає перетворенням групи, що лишають інваріянтною кожну гіперповерхню шарування Σ, алгебра інваріянтности — перетворенням, що лишають інваріянтним шарування Σ в цілому, але, можливо, переводять гіперповерхні шарування Σ в інші гіперповерхні, що також належать до цього шарування (так що Σ утворює систему імпримітивности відповідної підгрупи).

В третьому розділі розглядаються симетрії одночасової нелокальної лагранжевої механіки. Варіяційний принцип, що базується на дії (12), приводить до рівнянь руху Ойлера–Лагранжа

$$\mathcal{E}_{ai}L \equiv \sum_{s=0}^{\infty}(-D)^s \frac{\partial L}{\partial x_a^{i(s)}} = 0, \tag{17}$$

які визначають деякий многовид у просторі $J^\infty\pi$. Тому симетрія лагранжевого опису відносно групи $\mathcal{G}$ означає інваріянтність цього многовиду відносно обговореної вище дії групи $\mathcal{G}$ у $J^\infty\pi$. Для її дослідження побудовано алгебру векторних полів Лі-Беклунда

$$X_\alpha(\Sigma) = \sum_a \sum_{s=0}^{\infty}[D^s\xi^i_{a\alpha}(\Sigma)]\frac{\partial}{\partial x_a^{i(s)}}, \qquad \alpha = 1,\ldots,r, \tag{18}$$

що відповідають інфінітезимальній версії такої дії. Їх компоненти мають вигляд $\xi^i_{a\alpha}(\Sigma) = \zeta^i_{a\alpha} - v^i_a\eta_{a\alpha}$, де $\zeta^i_{a\alpha}$ і $\eta_{a\alpha}$ — значення функцій $\zeta^i_\alpha(x)$ та $\zeta^\mu_\alpha(x)\partial\sigma(x)/\partial x^\mu$ у точці $x = x_a(t)$. Показано, що в кожній формі динаміки Σ векторні поля (18) утворюють базис алгебри Лі $\mathcal{AG}_I(\Sigma)$, ізоморфної до алгебри $\mathcal{AG}$.

Для інваріянтности рівнянь руху (17) відносно групи $\mathcal{G}$ достатньо, щоб лагранжіян L задовольняв систему рівнянь

$$X_\alpha L = D\Omega_\alpha, \qquad \alpha = 1,\cdots,r, \tag{19}$$

з певними допоміжними функціями Ω_α. Наслідком цих умов є існування r законів збереження деяких величин G_α, які виражаються у термінах лагранжіяну L та функцій Ω_α. Встановлено трансформаційні властивості цих інтегралів руху відносно групи $\mathcal{G}$.

Якщо алгебра інваріянтности $\mathcal{AG}_I(\Sigma)$ форми динаміки Σ не співпадає з повною алгеброю Лі $\mathcal{AG}$ групи $\mathcal{G}$, то умови інваріянтности лагранжевого опису в класі функцій, залежних від похідних скінченного порядку, допускають лише розв'язки, що відповідають системі вільних (невзаємодіючих) частинок.

Отримані результати застосовуються до аналізу Пуанкаре-інваріянтности лагранжевого опису у довільній формі динаміки. Оскільки у чотиривимірному просторі-часі жодна форма динаміки не володіє алгеброю інваріянтности, яка б співпадала з повною алгеброю Пуанкаре, опис систем взаємодіючих частинок

Пуанкаре-інваріянтним чином вимагає залучення лаґранжіянів, залежних від похідних нескінченно високого порядку. Широкий клас таких лаґранжіянів, що задовольняють умови Пуанкаре-інваріянтности у довільній формі релятивістичної динаміки, отримується з явно коваріянтних інтеґралів дії типу Фоккера. Знайдено також вирази для величин, збереження яких випливає з умов Пуанкаре-інваріянтности. Вони ототожнюються з енерґією, імпульсом, моментом імпульсу та інтеґралом руху центра мас і мають правильні трансформаційні властивості відносно групи Пуанкаре.

В <u>четвертому розділі</u> розглядається зв'язок між різними формами лаґранжевої динаміки. Показано, що векторні поля Лі-Беклунда $X_\alpha(\Sigma)$ у двох довільних формах динаміки Σ_1 та Σ_2 пов'язані співвідношенням

$$X_\alpha(\Sigma_1) = (\exp Y_{12}) X_\alpha(\Sigma_2)(\exp -Y_{12}), \qquad (20)$$

де векторне поле Y_{12}, що є лаґранжевим відповідником переплітаючого оператора релятивістичної гамільтонової механіки, має вигляд

$$Y_{12} = \sum_a \sum_{s=0}^{\infty} [D^s v_a^i \chi_a(12)] \frac{\partial}{\partial x_a^{i(s)}}. \qquad (21)$$

Компоненти χ_a векторного поля (21) у випадку гомохронних форм динаміки, що визначаються функціями $\Psi_1(\mathbf{x})$ і $\Psi_2(\mathbf{x})$, дорівнюють $\Psi_1(\mathbf{x}_a) - \Psi_2(\mathbf{x}_a)$, а у загальному випадку виражаються через розв'язок деякого функціонального рівняння. Знайдено оператор, що пов'язує миттєву і точкову форми динаміки. Лаґранжіяни $L(\Sigma_1)$ та $L(\Sigma_2)$, що задовольняють умови інваріянтности (19) у формах динаміки Σ_1 і Σ_2, відповідно, пов'язані співвідношенням

$$L(\Sigma_1) = (\exp Y_{12}) L(\Sigma_2). \qquad (22)$$

Детально розглянуто зв'язок між миттєвою і фронтальною формами динаміки.

В <u>п'ятому розділі</u> досліджується співвідношення між лаґранжевим формалізмом, що використовує нелокальні в часі лаґранжіяни (13), (14), залежні від похідних безмежно високого порядку, та ньютоновим підходом, пов'язаним з рівняннями руху другого порядку. Нелокальна лагранжева механіка приводить до рівнянь руху (17), які утворюють систему звичайних диференціяльних рівнянь безмежно високого порядку. Як і відповідні їм інтегро-диференціяльні або диференціяльно-різницеві рівняння руху, що випливають з явно коваріянтних інтегралів дії типу Фоккера (8), вони, взагалі кажучи, володіють розв'язками, що не визначаються однозначно початковими координатами та швидкостями частинок, як того вимагає стандартна задача Коші класичної механіки. В роботі пропонується розглядати як фізично осмислений лише деякий підклас усієї множини розв'язків таких рівнянь, для елементів якого вказана задача Коші має сенс. Такі розв'язки рівнянь руху називаємо предиктивними. Критерієм відбору може служити аналітичність розв'язків за деяким параметром ϵ, що міститься в (17) — звичайно це константа взаємодії або обернена швидкість світла c^{-1}.

З огляду на це рівняння руху безмежно високого порядку (17) трактуються як деяка формальна конструкція, що служить для одержання релятивістичних рівнянь руху другого порядку:

$$\dot{v}_a^i = \mu_a^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{23}$$

Функції $\mu_a^i : J^1\pi \to \mathrm{R}$ будуються певною ітераційною процедурою на основі рівнянь (17).

Розглянуто властивості інваріянтности предиктивного опису систем взаємодіючих частинок, що базується на рівняннях руху типу Ньютона (23). За допомогою побудованої реалізації алгебри Пуанкаре записано умови Пуанкаре–інваріянтности рівнянь (23) у довільній формі релятивістичної динаміки. Відзначено, що неможливість простої лінійної суперпозиції та необхідність багаточастинкових сил у предиктивному тривимірному описі релятивістичних систем частинок проявляється у кожній геометричній формі релятивістичної динаміки. В лінійному наближенні за константою взаємодії побудовано рівняння руху другого порядку, що відповідають взаємодіям, які описуються інтегралами дії Фоккера (8), (9).

В шостому розділі вивчається відповідність між розвинутим вище лагранжевим підходом та канонічним формалізмом, у якому концепція форм динаміки використовувалась найбільш інтенсивно. Вказаний зв'язок розглядається у контексті проведеного в попередньому розділі переходу від лагранжевого опису з вищими похідними до предиктивних рівнянь руху другого порядку. Процедура гамільтонізації таких рівнянь складає зміст класичної теореми Лі-Кенігса. В дисертації основні характеристики гамільтонового опису, що відповідає рівнянням руху (17), виражаються (в рамках розвинень за степенями константи взаємодії) у термінах вихідної функції Лаґранжа, яка задовольняє умови інваріянтности у довільній формі динаміки. Знайдено формули, що виражають канонічні змінні $\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a$ через фізичні (коваріянтні) координати частинок $\mathbf{x}_a$ у довільній формі динаміки в кожному порядку за параметром ϵ. Із них випливає, що нерівність $\mathbf{q}_a \neq \mathbf{x}_a$, яка виражає теорему про невзаємодію гамільтонового формалізму, є прямим наслідком залежности лагранжіяну від вищих похідних. Інтеграли руху $G_\alpha, \alpha = \overline{1,10}$, збереження яких випливає з Пуанкаре–інваріянтности лагранжіяну, після вираження в термінах канонічних змінних задають канонічну реалізацію алгебри Пуанкаре. Методом послідовних наближень за параметром ϵ показано, що для кожної форми динаміки існує природний спосіб гамільтонізації, за якого ґенератори, що відповідають алгебрі інваріянтности $\mathcal{AG}_I(\Sigma)$, мають вигляд

$$G_\alpha = \sum_a p_{ai}\zeta^i_{a\alpha}(t, \mathbf{q}_a) - \eta_\alpha(t)H \tag{24}$$

і, таким чином, містять взаємодію лише через посередництво функції Гамільтона H. Зокрема, ґенератори, що відповідають алгебрі стабільности $\mathcal{AG}_S(\Sigma)$, вільні від взаємодії. Це встановлює відповідність між застосованим у роботі геометричним означенням форми динаміки і поширеним у гамільтоновій релятивістичній механіці алгебричним підходом.

В сьомому розділі розглядається двовимірний варіант фронтальної форми релятивістичної лаґранжевої динаміки. У цьому випадку завдяки інваріянтности шарування Σ^F відносно групи Пуанкаре $\mathcal{P}(1,1)$ рівняння (19) допускають існування лагранжіянів взаємодії, залежних від коваріянтних координат частинок x_a та їх перших похідних. В роботі наведено загальний розв'язок такого виду $L = rF(r\gamma_a, r_{1a}/r)$, де $r_{ab} \equiv x_a - x_b, r \equiv r_{12}, \gamma_a \equiv (1 + 2v_a)^{-1/2}$ і F — довільна функція вказаних арґументів. Лінійність умов Пуанкаре–інваріянтности дозволяє застосовувати просте правило додавання взаємодій на рівні функції Лаґранжа, розглядаючи суми попарних, потрійних і т.п. взаємодій. Зокрема, для системи N частинок з попарними взаємодіями можна записати

$$L = -\sum_{a=1}^{N} m_a \gamma_a^{-1} + \sum_{a<b} r_{ab} V_{ab}(r_{ab}\gamma_a, r_{ab}\gamma_b), \qquad (25)$$

де V_{ab} – довільні функції двох арґументів. У роботі показано, що для асиметричних взаємодій, які відповідають (11),

$$V_{ab} = \frac{g_a g_b}{r_{ab}^2} T_n\left(\frac{\delta_{ab}}{2}\right); \qquad \delta_{ab} \equiv \frac{\gamma_a}{\gamma_b} + \frac{\gamma_b}{\gamma_a}. \qquad (26)$$

Три інтеґрали руху E, P і K, збереження яких є наслідком Пуанкаре–інваріянтности лаґранжевого опису, дозволяють звести до квадратур задачу двох тіл. Перетворення Лежандра приводить до канонічного опису з коваріянтними і канонічними координатами x_a. Записуючи інтеґрали руху E, P і K в термінах канонічних змінних, приходимо до канонічної реалізації алгебри Пуанкаре $p(1.1)$. В роботі детально розглянуто гамільтонову двочастинкову модель осциляторої взаємодії: отримано параметричні рівняння світових ліній, фазові траєкторії та проаналізовано різні можливості квантування.

У восьмому розділі розглядається система двох частинок в ізотропних формах динаміки в M_4 з інваріянтним означенням одночасности за допомогою співвідношень

$$[x_1(t) - x_2(t)]^2 = 0, \qquad sgn[x_1^0(t) - x_2^0(t)] = \eta, \qquad (27)$$

де $\eta = \pm 1$. Сформульовано та розв'язано умови Пуанкаре–інваріянтности лаґранжевого опису, які і в цьому випадку допускають лаґранжіяни взаємодії, що залежать лише від перших похідних. Побудовано відповідні інтеґрали руху. Знайдено потенціяли, що відповідають асиметричним взаємодіям фоккерового типу.

В дев'ятому розділі розглядаються слабкорелятивістичні лаґранжіяни системи N частинок у різних формах динаміки. В миттєвій формі отримано перші члени (з точністю до c^{-2}) розвинень за степенями c^{-1} одночасових лаґранжіянів для взаємодій, що переносяться полями довільної маси і спіну. З цією ж точністю записано вирази для інтеґралів руху такої системи. У фронтальній, точковій та гіперболоїдній формах динаміки знайдено поправки порядку c^{-2} до загального нерелятивістичного статичного потенціялу.

В десятому розділі розглядаються релятивістичні моделі рівноважної статистичної механіки. В рамках фронтальної форми динаміки на основі результатів розділу VII сформульовано та розв'язано релятивістичну модель одновимірних твердих сфер. Показано, що в термодинамічній межі хемічний потенціял μ виражається через тиск P і обернену температуру $\beta = 1/kT$ співвідношенням

$$\mu(\beta, P) = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{2MK_1(\beta M)}{h\beta P}, \tag{28}$$

де $M^2 = m^2 + 2m\sigma P$; K_n — функції Макдональда і σ — параметер моделі. Рівняння стану має вигляд

$$v = \frac{\partial\mu}{\partial P} = \frac{1}{\beta P} + \frac{m\sigma}{M} \frac{K_0(\beta M)}{K_1(\beta M)} \tag{29}$$

і в нерелятивістичній межі ($\beta m \to \infty$) зводиться до рівняння Тонкса для одновимірного газу твердих сфер діяметра σ, а в ультрарелятивістичній межі ($\beta m \to 0$) дає рівняння стану ідеального газу.

У миттєвій формі динаміки побудовано поправки першого порядку за c^{-2} до термодинамічних функцій рівноважної статистичної системи частинок у фізичному тривимірному просторі. Нерелятивістичний потенціял взаємодії $u(r)$ не конкретизується, поправки виражаються у термінах відповідних нерелятивістичних термодинамічних функцій та двох констант A і B, які пов'язані з теоретико-польовою інтерпретацією взаємодії, а можуть теж розглядатися як феноменологічні параметри. Якщо $u(r)$ задовольняє умови стійкости та швидкого спадання, то статистична сума Z такої системи отримується у вигляді

$$Z = Z^{(0)} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta mc^2} \left[\frac{15}{8} N - \frac{3}{Q} \left(A\beta \frac{\partial Q}{\partial \beta} + BV \frac{\partial Q}{\partial V} \right) \right] \right\}, \tag{30}$$

де $Z^{(0)}$ — її нерелятивістичне значення, Q — нерелятивістичний конфігураційний інтеграл і V - об'єм системи. Звідси отримуються вирази для вільної енергії, рівняння стану та інших термодинамічних функцій у термінах їх нерелятивістичних виразів. Побудовано слабкорелятивістичні поправки до рівняння стану ван-дер-Ваальса.

В підсумковому розділі наведено основні результати та висновки:

1. Побудовано явно коваріянтні інтеграли дії типу Фоккера, що відповідають взаємодіям, які переносяться класичними лінійними релятивістичними полями довільної маси й цілого спіну.
2. Розглянуто симетрійні властивости тривимірного опису системи частинок відносно деякої r-параметричної групи Лі $\mathcal{G}$ перетворень простору Мінковського. У довільній формі динаміки Σ побудована реалізація $\mathcal{AG}(\Sigma)$ алгебри Лі $\mathcal{AG}$ групи $\mathcal{G}$ векторними полями Лі–Беклунда. Показано, що з кожною формою динаміки природньо співставляються дві підалгебри алгебри $\mathcal{AG}$ - алгебри стабільности $\mathcal{AG}_S(\Sigma)$ та інваріянтности $\mathcal{AG}_I(\Sigma)$ форми динаміки Σ.
3. За допомогою вказаної реалізації в кожній формі динаміки сформульовано достатні умови інваріянтности тривимірного лаґранжевого опису відносно довільної r-параметричної групи Лі $\mathcal{G}$. Записано та проаналізовано умови Пуанкаре-інваріянтности у довільній формі релятивістичної динаміки; показано, що вони задовольняються нелокальними лаґранжіянами, отриманими з дії Фоккера. В довільній формі динаміки записано вирази для енергії, імпульсу, моменту імпульсу та інтеґралу руху центра мас системи частинок.
4. Встановлено зв'язок між полями Лі-Беклунда, що задають реалізації $\mathcal{AG}(\Sigma)$ алгебри Лі $\mathcal{AG}$ у різних формах динаміки. Побудовано оператори, що пов'язують функції Лаґранжа в різних формах релятивістичної динаміки.

5. На основі принципів відбору фізично осмислених розв'язків рівнянь Ойлера-Лаґранжа з вищими похідними (за :і приймається вимога аналітичности за параметром, що фігурує у вихідному лаґранжіяні — константі взаємодії або c^{-2}) розглянуто перехід від лаґранжевого до ньютонового формалізму. Узагальнено на довільну форму динаміки умови Пуанкаре-інваріянтности останнього та досліджено зв'язок із явно коваріянтним формулюванням.
6. Гамільтонізація одержаних ньютонових рівнянь руху приводить до встановлення зв'язку лаґранжевого й гамільтонового формалізмів теорії прямих релятивістичних взаємодій частинок у довільній формі динаміки. Вказано спосіб побудови канонічних змінних та канонічних ґенераторів алгебри Пуанкаре у довільній формі динаміки. Показано, що неспівпадіння канонічних координат з фізичними (коваріянтними) є наслідком нетривіяльної залежности функції Лаґранжа від вищих похідних. Запропоновано спосіб гамільтонізації, за якого ґенератори, що 'дповідають алгебрі стабільности форми динаміки Σ, вільні від взаємодії. Тим самим встановлено відповідність між застосованим у роботі геометричним означенням форми динаміки і поширеним у гамільтоновій релятивістичній механіці алгебричним підходом. Отримані результати можуть служити основою для переходу квантового гамільтонового опису, поєднаного із визначеними правилами зв'язку з коваріянтними координатами частинок. Це дозволяє розширити фізичну інтерпретацію квантової гамільтонової динаміки.
7. Детально розглянуто випадки, коли можливий Пуанкаре-інваріянтний опис системи взаємодіючих частинок у термінах лаґранжіянів, залежних від координат і швидкостей. Це фронтальна форма динаміки у двовимірному просторі-часі та ізотропні форми динаміки для системи двох частинок у M_4. У цих формах динаміки такими лаґранжіянами описуються, зокрема, асиметричні взаємодії фоккерового типу. Проведено класичний та квантовий аналіз релятивістичної одновимірної моделі двочастинкової осциляторної взаємодії.

8. У миттєвій формі динаміки побудовано слабкорелятивістичні лаґранжіяни системи частинок із взаємодіями, які переносяться лінійним релятивістичним полем фіксованої маси та цілого спіну, записано вирази для інтеґралів руху в цьому наближенні. Знайдено загальні розв'язки умов Пуанкаре-інваріянтности з точністю до c^{-2} у деяких важливих формах динаміки: фронтальній, точковій та гіперболоїдній.
9. Розглянуто застосування розвинутого формалізму до проблем рівноважної стат тичної механіки. У рамках фронтальної форми динаміки сформульовано релятивістичну модель одновимірних твердих сфер та побудовано її точний розв'язок у термодинамічній меж Знайдено слабкорелятивістичні поправки до термодинамічних функцій системи частинок з довільною нерелятивістичною взаємодією, що задовольняє умови стійкости та швидкого спадання.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Gaida R.P., Tretyak V.I. Single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics.//Acta Phys. Pol. B – 1980. – **11**, *N°*7.– P.582-522.
2. Tretyak V.I., Gaida R.P. Symmetries and conservation laws in the single-time form of the Fokker-type relativistic dynamics II.//Acta Phys. Pol. B – 1980. – **11**, *N°*7.– P.523-536.
3. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. I. //Теор. мат. физ. – 1980. – **44**, *N°*2.– С.194-207.
4. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. Лагранжева классическая релятивистская механика системы прямо взаимодействующих частиц. II. //Теор. мат. физ. – 1980. – **45**, *N°*2.– С.180-198.
5. Гайда Р.П., Ключковський Ю.Б.,Третяк В.І. Форми релятивістської динаміки у лагранжевому описі системи частинок. //Доповіді АН УРСР. Сер. А – 1982. – *N°*5.– С.6-9.
6. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. Формы релятивистской динамики в классическом лагранжевом описании системы частиц. //Теор. мат. физ. – 1983. – **55**, *N°*1.– С.88-105.

7. Гайда Р.П.,Третяк В.И. О многочастичных взаимодействиях в релятивистских составных системах. //Вопросы атомной науки и техники. Серия: Общая и ядерная физика – 1986. – N^o2(35).– С.6.
8. Соколов С.Н.,Третяк В.И. Фронтовая форма релятивистской лагранжевой динамики в двумерном пространстве–времени и ее связь с гамильтоновым описанием. //Теор. мат. физ. – 1986. – **67**, N^o1.– С.102-114.
9. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. Релятивистская теория прямых взаимодействий и гравитационная задача двух тел во втором постньютоновском приближении. //Изв. вузов. Физика – 1990. – N^o1.– С.48-52.
10. Третяк В.И. Тензорные поля и перенормировка массы в классической релятивистской теории прямого взаимодействия.//Мат. методы и физ.–мех. поля – 1990. – вып. 32. – С.41-45. [J. Sov. Math. –1993. – **64**, N^o5.– P.1180-1183.]
11. Гайда Р.П., Третяк В.И. Лагранжиан двух заряженных гравитирующих тел во втором постньютоновском приближении. //Изв. вузов. Физика – 1990. – N^o7.– С.31-36.
12. Гайда Р.П., Третяк В.І., Яремко Ю.Г. Змінні центра мас у релятивістській лагранжевій механіці системи частинок.//Укр. фіз. ж. – 1991. – **36**, N^o12.– С.1807-1818.
13. Гайда Р.П., Ключковський Ю.Б., Третяк В.І. Теоретико-груповий підхід до побудови релятивістської лагранжевої механіки системи частинок.//Укр. мат. ж. – 1991 – **43**, N^o11.– С.1516-1520.
14. Гайда Р.П., Третяк В.И., Яремко Ю.Г. Переменные центра масс в релятивистской лагранжевой динамике системы частиц.//Теор. мат. физ. – 1994. – **101**, N^o3.– С.402-416.
15. Третяк В.І., Шпитко В.Є. Квантування Вайля у двовимірній моделі фронтової форми релятивістичної динаміки.// Укр. фіз. ж. – 1995. – **40**, N^o11-12. – С.1258-1265.
16. Gaida R., Tretyak V. Symmetries of the Fokker-type relativistic mechanics in various forms of dynamics.// J. Nonlin. Math. Phys. – 1996. – **3**, N^o3. – P.357-371.

17. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. Прямые взаимодействия частиц во втором квазирелятивистском приближении. //Физика многочастичных систем – 1985. – N°7.– С.20-30.
18. Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. Касательные преобразования Ли–Беклунда и структура квазиинвариантных лагранжианов. //Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наукова думка, 1989.– С.91-97.
19. Дувіряк А.А., Третяк В.І. Класична релятивістська динаміка двох тіл на світловому конусі.//Фізика конденсованих систем – 1993. – вип. 1. – С.92-107.
20. Третяк В. Термодинамічні властивості класичного слаборелятивістського газу.// Фізичний збірник НТШ – Т.1. – Львів: НТШ, 1993. – С.182-195.
21. Гайда Р.П., Ключковский Ю.Б.,Третяк В.И. О сложении взаимодействий в квазирелятивистской механике системы частиц. //Тр. VI Междунар. семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля. (Протвино, июль 1983). – Т.1. – Серпухов: ИФВЭ, 1983.– С.164-178.
22. Gaida R.P., Kluchkovsky Yu.B.,Tretyak V.I. Relativistic Lagrangian mechanics and other approaches in the direct interaction theory.// Proc. of VII Seminar on Problems of High Energy Physics and Quantum Field Theory. (Protvino, July 1984).– Vol. 1. – Serpukhov: IHEP, 1984.– P.99-122.
23. Gaida R.P., Kluchkovsky Yu.B.,Tretyak V.I. Three-dimensional Lagrangian approach to the classical relativistic dynamics of directly interacting particles.// Constraint's Theory and Relativistic Dynamics. – Eds. G.Longhi, L.Lusanna. – Singapore: World Scientific Publ., 1987.– P.210-241.
24. Майоров А.А., Соколов С.Н.,Третяк В.И. Особенности движения частиц и распространения возмущений во фронтовой форме двумерной релятивистской динамики.//Тр. Междунар. совещания по теории малочастичных и кварк–адронных систем. (Дубна, июнь 1983). – Дубна: ОИЯИ, 1987.– С.455-471.

25. Gaida R.P., Tretyak V.I., Yaremko Y.G. Lagrangian and Hamiltonian center-of-mass variables in the relativistic two-body problem.// Proc. of the Workshops on Soft Physics "Hadrons-94".- Uzhgorod (Ukraine), September 7-11, 1994.- Kiev, 1994. - P.343-352.
26. Duviryak A.A., Tretyak V.I., Shpytko V.Ye. Exactly solvable two-particle models in the isotropic form of relativistic dynamics.// Proc. of the Workshops on Soft Physics "Hadrons-94".- Uzhgorod (Ukraine), September 7-11, 1994.- Kiev, 1994. - P.353-362.
27. Третяк В.И. Классическое лагранжево описание системы частиц в различных формах релятивистской динамики. - Киев, 1982.- 31 с.- (Препринт/АН УССР. Ин-т теор. физики, ИТФ-82-88Р).
28. Гайда Р.П., Третяк В.И. Лагранжианы прямых взаимодействий и гамильтоново описание системы частиц в различных формах релятивистской динамики. - Киев, 1982.- 38 с.- (Препринт/АН УССР. Ин-т теор. физики, ИТФ-82-87Р).
29. Mayorov A.A., Sokolov S.N., Tretyak V.I. Specifics of the particle motion and spreading of perturbatios on the front form of two-dimensional relativistic dynamics. - Серпухов, 1986.- 62 с.- (Препринт/ИФВЭ, N^o 86-243).
30. Третяк В.І. Про калібрувальні перетворення у класичній механіці. - Київ, 1991.- 15 с.- (Препринт/АН УРСР. Ін-т теор. фізики, ІТФ-91-15У).

Tretyak V.I. Fokker-type action integrals and forms of relativistic Lagrangian dynamics.

Thesis on search of the scientific degree of doctore of physical and mathematical sciences, speciality 01.04.02 - theoretical physics. Lviv State University, Lviv, 1996.

30 scientific papers containing the investigation of the relativistic Lagrangian mechanics in various forms of dynamics are defended. They contain the construction of the Fokker-type action integrals for interactions which are mediated by classical relativistic fields of arbitrary mass and integer spin; the analysis of the corresponding single-time nonlocal

interaction Lagrangians; the formulation and the analysis of the invariance conditions of nonlocal Lagrangian mechanics in various forms of dynamics; the investigation of the connections between various forms of relativistic Lagrangian dynamics. Transition to the predictive Newtonian and Hamiltonian formalisms is performed. Such forms of dynamics in which Poincaré-invariance conditions allow the existence of the nontrivial interaction Lagrangians depending on the derivatives of not higher than the first order are considered in detail. The work includes the applications of developed formalism to some models of quantum mechanics and statistical physics.

Третяк В.И. Интегралы действия типа Фоккера и формы релятивистской лагранжевой динамики.
Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.04.02 – теоретическая физика. Львовский государственный университет, Львов, 1996.
Защищается 30 научных работ, содержащих исследование релятивистской лагранжевой механики в различных формах динамики. Они содержат построение интегралов действия типа Фоккера для взаимодействий, переносимых классическими релятивистскими полями произвольной массы и целого спина, анализ соответствующих одновременных нелокальных лагранжианов взаимодействия, формулировку и анализ условий инвариантности нелокальной лагранжевой механики в различных формах динамики, исследования связей между различными формами релятивистской лагранжевой динамики. Осуществлен переход к предиктивному ньютоновому и гамильтоновому формализмам. Подробно рассмотрены те формы динамики, в которых условия Пуанкаре-инвариантности допускают существование нетривиальных лагранжианов взаимодействия, зависящих от производных не выше первого порядка. Работа включает применения разработанного формализма к некоторым моделям квантовой механики и статистической физики.

Ключові слова: *релятивістична механіка, прямі взаємодії, лагранжіян, гамільтоніян, форма динаміки, група Пуанкаре.*

П'дписано до друку II.04.96. Формат паперу 60x84 I/I6
Пап'р газетний. Друк офсетний. Безкоштовно.
Друкарських арк'в 2. Зам. 220. Тираж I00.

Ротопринт Льв'вського ЦНТІ. Вул. 700-р'ччя Львова, 57.