Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

МАГАР Наталія Семенівна

ПОВНА КОНФЛІКТНА КЕРОВАНІСТЬ ДИСКРЕТНИХ ПРОЦЕСІВ

01.05.01 — теоретичні основи інформатики та кібернетики

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор ЧИКРІЙ Аркадій Олексійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент ЯСІНСЬКИЙ Василь Васильович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук МАЛЮКОВ Володимир Павлович,
кандидат фізико-математичних наук ПИЛИПЕНКО Юрій Віталійович.

Провідна організація: Київський національний університет ім. Т. Шевченка.

Захист відбудеться «24» травня 1996 р. о 11.00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися у науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «24» квітня 1996 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Великого значення у теорії і практиці оптимального керування набувають дискретні процеси керування тому, що на практиці інформація про стан процесу та керування ним здійснюється в дискретні моменти часу. Розв'язання класичних задач керування динамічних систем з дискретним часом знімає багато питань аналітичного характеру, що притаманні неперервним моделям процесів, хоча в загальному випадку перенесення ефективних методів знаходження оптимального керування для неперервних систем на системи дискретні неможливе. Тому дискретні системи є предметом особливого вивчення у теорії оптимального керування.

Проблема керованості динамічних об'єктів, що виникає при розв'язанні багатьох технічних задач, є центральною у теорії оптимального керування. Для керованих процесів, що функціонують в умовах конфлікту, існує ряд методів розв'язання задачі глобального керування щодо неперервного випадку. Однак при їх практичному застосуванні та чисельній реалізації виникає необхідність розглянути відповідні системи різницевих рівнянь, що викликає зміну достатніх умов розв'язності задачі повного керування.

Мета роботи. Для дискретних квазілінійних процесів, що функціонують в умовах конфлікту, одержати загальні достатні умови розв'язання задачі повного керування, застосовуючи дискретні аналоги методу розв'язувальних функцій та методу першого поглинання Н.Н. Красовського; розробити модифікації даних методів, що дозволяють ефективно розв'язувати ряд модельних прикладів, враховуючи динаміку процесів, співвідношення ресурсів керованих об'єктів та структуру термінальних множин; провести порівняння результатів застосування різних методів розв'язання глобальної дискретної задачі переслідування; одержати достатні умови розв'язання задачі переслідування для модельних процесів переслідування-втечі.

Методи досліджень. Математичну основу досліджень складають методи теорії диференційних ігор, функціонального аналізу та апарат теорії оптимального керування.

Наукова новизна роботи. Розроблено схему методу розв'язувальних функцій для розв'язання задачі глобального керування квазілінійних конфліктно керованих дискретних процесів, яка враховує динаміку і структуру процесів та за допомогою якої отримані достатні умови розв'язання задачі переслідування з будь-яких початкових положень системи. Для об'єктів з різною інерційністю отримано умови, за яких існує розв'язок задачі повного керування. Вперше наведено дискретний аналог методу першого поглинання Н.Н. Красовського для розв'язання глобальної задачі переслідування. У класі позиційних стратегій отримано достатні умови повної керованості квазілінійних процесів, що функціонують в умовах конфлікту. Для лінійних процесів подана конкретизація умов, за яких процес переслідування може бути закінчено з будь-яких початкових положень у класі позиційних стратегій та у класі квазістратегій. Проведено порівняння результатів застосування методу розв'язувальних функцій та методу першого поглинання Н.Н. Красовського. Наведено умови, за яких час переслідування у класі квазістратегій та позиційних стратегій співпадає.

Теоретична та практична цінність роботи полягає у побудові схем ефективного розв'язання задачі повного керування для квазілінійних дискретних процесів, що функціонують в умовах конфлікту, які можна застосовувати при чисельній реалізації відповідних схем розв'язання неперервних задач. Використання цих методів знімає деякі обмеження на параметри процесу, що притаманні неперервним аналогам, та дозволяє спростити достатні умови розв'язання задачі повного керування для квазілінійних конфліктно керованих процесів.

Апробація роботи. Результи доповідались на IV Міжнародній конференції ім. Академіка М. Кравчука (Київ, 1996), на IV Міжнародній конференції "Многокритериальные игровые задачи при неопределенности" (Орєхово-Зуєво, 1996).

Публікації. Основні результати досліджень викладені у публікаціях [1- 6].

Структура і обсяг роботи. Робота складається з вступу, двох глав, поділених на 13 параграфів, висновку та списку літератури з 109 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 100 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, зроблено огляд отриманих на даний час результатів з проблем керування процесами, що функціонують в умовах конфлікту, і стисло викладено зміст дисертаційної роботи.

У першому параграфі першої глави подано основні результати, що застосовуються в подальших математичних конструкціях.

У § 2 сформульовано задачу глобального керування для квазілінійних процесів з циліндричною термінальною множиною та визначено розв'язувальну функцію, за допомогою якої введено гарантований час закінчення гри.

Нехай рух конфліктно керованого об'єкта z в $\mathbb{R}^n$ описується системою різницевих рівнянь

$$z(t+1) = Az(t) + \varphi(u(t), v(t)),$$

$$t = 0, 1, \ldots, \quad z(0) = z^0, \tag{1}$$

де $z(t)$ — фазовий вектор об'єкту, A — квадратна матриця порядку n; $\varphi(u, v)$, $\varphi\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$ — неперервна функція; u та v — параметри керування переслідувача та втікача, які належать областям керування U та V, де U та V — непусті компакти з $\mathbb{R}^n$.

Метою переслідувача є закінчення гри, тобто виведення об'єкта z на деяку замкнену множину M^*, яка називається термінальною за допомогою параметру u. Мета втікача — запобігти закінченню гри, тобто відвернути об'єкт z від множини M^* за допомогою параметра v.

Термінальна множина M^* є циліндричною, тобто

$$M^* = M + M^0, \tag{2}$$

де M^0 — лінійний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, M — опуклий компакт з ортогонального доповнення L до M^0.

Квазістратегія переслідувача задається відображенням $U(t, z^0, v_t(\cdot))$, яке початковому стану системи (1) z^0, кожному моменту часу $t = 0, 1, \ldots$ та довільній передісторії керування втікача $v_t(\cdot) = \{v(s)\colon v(s) \in V,\ s = 0, \ldots, t\}$ ставить у відповідність функцію $u(t) = U(t, z^0, v_t(\cdot))$, $t = 0, 1, \ldots$, значення якої належать множині U.

Гра (1), (2) з початкового положення $(0, z^0)$ може бути закінчена за T кроків, $T = T(z^0)$, $0 < T < +\infty$, якщо існує відображення $U(z^0, v_t(\cdot))$, яке елементам z^0 та $v_t(\cdot)$ ставить у відповідність функцію $u(t) = U(z^0, v_t(\cdot))$ з множини U, таку, що при довільному керуванні $v(t)$ з V, $t = 0, \dots, T-1$, $z(t) \in M^*$, де $z(t)$ — розв'язок системи різницевих рівнянь.

Глобальна задача переслідування полягає у знаходженні умов на параметри процесу (1), (2), що є достатніми для того, щоб об'єкт z привести на термінальну множину (2) за T кроків, де $0 < T < +\infty$ з будь-якого початкового стану у класі квазістратегій при довільних керуваннях втікача.

Позначимо π — оператор ортогонального проектування з $\mathbb{R}^n$ на L.

Розглянемо багатозначне відображення

$$\Phi(t, k, v) = \pi A^{t-k-1}\varphi(U, v(k)) - \omega(t, k)M,$$

де $\omega(t, k)$, $k = 0, 1, \dots, t-1$ — деяка числова функція.

$$\Phi(t, k) = \bigcap_{v \in V} \Phi(t, k, v), \quad t = 1, 2, \dots, \; k = 0, 1, \dots, t-1.$$

Умова 1. Існує число $a > 0$, таке, що $\|\pi A^t\| \leq a$ для всіх $t = 0, 1, \dots$.

Умова 2. Існує функція $\omega(t, k)$, що є невід'ємною та

1) $0 \in \Phi(T, k)$, $t = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, t-1$;

2) $\sum_{k=0}^{t-1} \omega(t, k) = 1$, $t = 1, 2, \dots$.

Розглянемо багатозначне відображення

$$Q(t, k, v, z) = \{\rho \geq 0 \colon \rho z \in \Phi(t, k, v)\},$$

$$z \neq 0, \; z \in L, \; t = 1, 2, \dots, \; k = 0, 1, \dots, t-1, \; v \in V.$$

Умова 3. Багатозначне відображення $Q(t, k, \cdot, z)$ є опуклозначним для всіх $t = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, t-1$ та $v \in V$.

Умова 4. Відображення $\Phi(t, k, v)$ є зірковозначним відносно нульового елемента для всіх $t = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, t-1$, $v \in V$.

Якщо виконані умови 2 та 3, або 2 та 4, то визначена функція

$$\rho(t, k, v, z) = \max_{\rho \in Q(t, k, v, z)} \rho,$$

$$t = 1, 2, \dots, \; k = 0, 1, \dots, t-1, \; v \in V, \; z \in L, \; z \neq 0,$$

яка є оберненою до функціоналу Мінковського множини $\Phi(t, k, v)$.

Функція $\rho(t, k, v, z) \neq +\infty$, якщо $z \neq 0$, в протилежному випадку— $\rho(t, k, v, z) = +\infty$.

Позначимо

$$\alpha(t, k, z) = \inf_{v \in V} \rho(t, k, v, z).$$

Якщо виконана умова 3, або 2 та 4, то

$$\alpha(t, k, z) = \sup\{\rho \geq 0: \rho z \in \Phi(t, k)\}.$$

Відомо, що для довільної матриці A існує розкладання простору $\mathbb{R}^n$ в пряму суму лінійних підпросторів, які інваріантні відносно оператора A та відповідають власним числам матриці A по модулю менше одиниці, рівному одиниці та більше одиниці:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_{\lambda_1} \oplus \mathbb{R}_{\lambda_2} \oplus \mathbb{R}_{\lambda_3}.$$

Позначимо

$$\partial S = \{z \in L: \|z\| = 1\}, \ \ S = \{z \in L: \|z\| \leq 1\}, \ \ S_0 = \partial S \cap \pi R_{\lambda_2}.$$

Умова 5. Існують числа $\varepsilon > 0$ та $\theta > 0$, такі, що множина

$$T(\varepsilon, \theta) = \{t \geq 0: \inf_{S \in \partial S} \sum_{k=0}^{\theta} \alpha(t, k, z) \geq \varepsilon\}$$

є необмеженою та непустою, окрім того

$$\sup_{t \in T(\varepsilon,\theta)} \inf_{S \in \partial S} \sum_{k=0}^{t-1} \alpha(t, k, z) = +\infty. \tag{3}$$

Якщо $S_0 = \varnothing$, то будемо вважати, що рівність (3) виконано, але у цьому випадку умову 4 може бути ослаблено.

Умова 6.

$$\lim_{t \to +\infty} \inf_{S \in \partial S} \sum_{k=0}^{t-1} \alpha(t, k, z) > 0.$$

Теорема 1. Якщо для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1, 2, 3 або 4 та умова 5, то він є повністю керованим.

Наслідок 1. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 2, 3 або 4 та умова 5. Тоді стає можливим виведення об'єкта z, рух якого задано системою різницевих рівнянь (1), на термінальну множину M^* за обмежену кількість кроків з будь-якого початкового стану z^0, $z^0 \in R_{\lambda_1} \cup R_2$, де R_2 — напівпростір, який натягнено на ті вектори, що відповідають власним числам матриці A з модулями, які дорівнюють одиниці і є простими коренями характеристичного многочлена матриці A.

Наслідок 2. Нехай задано конфліктно керований процес (1), (2), для якого виконуються умови 2, 3 або 4 та умова 6.

Тоді, якщо $R_{\lambda_3} \oplus R_{\lambda_2} \subset M^0$, то процес (1), (2) є повністю керованим.

Покладемо

$$g_1(t, k) = \inf_{S \in \partial S} \alpha(t, k, s),$$

$$g_2(t, k) = \inf_{S \in S} \alpha(t, k, s).$$

Умова 7. Існують числа $\varepsilon > 0$ та $\theta > 0$, такі, що множина

$$T(\varepsilon, \theta) = \{t \geq 0: \sum_{k=0}^{\theta} g_1(t, k) \geq \varepsilon\}$$

є непустою та необмеженою, а $\sup\limits_{t \in T(\varepsilon, \theta)} \sum\limits_{k=0}^{t-1} g_2(t, k) = +\infty$.

Наслідок 3. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1, 2, 3 або 4, а також умова 7, тоді процес (1), (2) є повністю керованим.

У §3 дисертаційної роботи гарантований час наведення об'єкта z, рух якого задається системою різницевих рівнянь (1), на термінальну множину подається в явному вигляді за допомогою дискретного аналога функції Л.С. Понтрягіна.

Теорема 2. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1, 2, 3 або 4 та умова 5, тоді об'єкт z можна привести на термінальну множину з положення z^0 не більше ніж за $P(z^0)$ кроків, де

$$P(z) = \min\{t = 0, 1, \ldots : -\pi A^t z \in \sum_{k=0}^{t-1} \Phi(t, k)\}.$$

У ! розглядаються процеси, для яких виконується умова Л.С. Понтрягіна Для процесу (1), (2) введено багатозначні відображення

$$W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), \quad t = 0, 1, \dots .$$

Умова 8. Має місце таке включення

$$0 \in W(t)$$

для всіх $t = 0, 1, \dots$.

Розглянемо багатозначне відображення

$$X(t, z, v) = \{\sigma \geq 0: \sigma z \in W(t, v)\}, \ z \in L, \ t = 0, 1, \dots, \ v \in V, \ z \neq 0.$$

Умова 9. Багатозначне відображення $X(t, z, v)$ є опуклозначним для всіх $v \in V, t = 0, 1, \dots, z \in L$.

Розв'язувальну функцію визначимо за формулою

$$\sigma(t, z, v) = \max_{\sigma \in X(t, z, v)} \sigma$$

та покладемо

$$\beta(t, z) = \inf_{v \in V} \sigma(t, z, v), \ z \in L, \ z \neq 0, \ t = 0, 1, \dots .$$

Якщо $z = 0$, то $\sigma(t, z, v) = +\infty$ та $\beta(t, z) = +\infty$.

Умова 10. Багатозначне відображення $W(t, v)$ є зірковозначним відносно нульового елемента для всіх $t = 0, 1, \dots, v \in V$.

Умова 11. Мають місце такі співвідношення:

1) $\sup\limits_{t \geq 0} \inf\limits_{s \in \partial S} \sum\limits_{k=0}^{t-1} \beta(t, k) > 0;$

2) $\sup\limits_{t \geq 0} \inf\limits_{s \in S_0} \sum\limits_{k=0}^{t-1} \beta(k, s) = +\infty.$.

Теорема 3. Якщо $M^* = m + M$ — многовид та для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1, 8, 9 або 10 та умова 11, тоді процес (1), (2) є повністю керованим для довільного вектора $m \in \mathbb{R}_{\lambda_3} \oplus \mathbb{R}_{\lambda_2}$.

Розглянемо функції

$$\psi_1(t) = \inf_{s \in \partial S} \beta(t, s),$$

$$\psi_2(t) = \inf_{s \in S_0} \beta(t, s).$$

Умова 12. Мають місце співвідношення

1) $\sup\limits_{t \geq 0} \sum\limits_{k=1}^{t-1} \psi_1(k) > 0;$

2) $\sup\limits_{t \geq 0} \sum\limits_{k=1}^{t-1} \psi_1(k) = +\infty.$

Наслідок 4. Якщо для конфліктн керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1, 8, 9 або 10 та умова 12, $M^* = m + M$, тоді для будь-якого $m \in \mathbb{R}_{\lambda_3} \oplus \mathbb{R}_{\lambda_2}$ об'єкт z, рух якого задається системою рівнянь (1), можна привести на термінальну множину M^*за обмежену кількість кроків з будь-якого початкового положення.

Наслідок 5. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 8, 9 або 10, $0 \in M$, а також $\mathbb{R}_{\lambda_3} \oplus \mathbb{R}_{\lambda_2} \subset M^0$.

Тоді конфліктно керований процес (1), (2) є повністю керованим.

§5 присвячено процесам, для яких вдається коректно визначити розв'язувальну функцію у випадку, коли умова 8 не виконується. Тоді стає можливим попадання об'єкта на термінальну множину за нефіксовану кількість кроків.

Теорема 4. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1 та 9, визначена функція $\sigma(t, k, s)$ для всіх $t = 0, 1, \ldots, s \in \partial S$, $v \in V$, а також має місце умова 11 та $\pi A = A\pi$, $0 \in M$. Тоді процес (1), (2) є повністю керованим.

Наслідок 6. Нехай для конфліктно керованого процесу виконуються умови

1. $A = \lambda E$, E — одинична матриця порядку n, $|\lambda| < 1$.
2. $0 \in M$.
3. Множина $H(z, v) = \{\sigma \geq 0: \sigma z \in \pi\varphi(U, v)\}$ є опуклою для всіх $z \in L$, $z \neq 0$, $v \in V$, існує таке число $\varepsilon > 0$, що для довільних $v \in V$ та $s \in \partial S$

$$\max_{\sigma \in H(s, v)} \sigma \geq \varepsilon.$$

Тоді процес (1), (2) є повністю керованим.

Якщо рух об'єктів розділено, то достатні умови розв'язності задачі глобального переслідування конкретизуються та легко перевіряються на практиці. У §6 отримано такі умови і наводяться найбільш прості умови повного керування.

Припустимо, що рух переслідуючого та втікача задано відповідними системами різницевих рівнянь:

$$x(t + 1) = Bx(t) + u(t), \quad x(0) = x^0,$$

$$y(t + 1) = Dy(t) + v(t), \quad y(0) = y^0, \tag{4}$$

$$x \in R^n, \quad y \in R^n, \quad u \in U, \quad v \in V,$$

де B та D — квадратні матриці порядку n, U та V — непусті компакти з $\mathbb{R}^n$.

Термінальною множиною є множина

$$M^* = \{(x, y) \in R^n \times R^n:\ x = y\}\ . \qquad (5)$$

Якщо привести задачу (4), (5) до вигляду (1), (2), то

$$A = \begin{pmatrix} B & B - D \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$M^* = M^0 = \{z = (z_1, z_2):\ z_1 = 0\},$$

$$M = \{z = (z_1, z_2):\ z = 0\},$$

$$L = \{z = (z_1, z_2):\ z_2 = 0\}.$$

$$\pi z = z_1.$$

У цьому випадку багатозначне відображення $W(t)$ має вигляд

$$W(t) = B^t U \overset{*}{-} D^t V.$$

Умова 13. Існує числова функція $\gamma(t)$, $t = 0, 1, \dots$, $0 \leqslant \gamma(t) \leqslant 1$, така, що

$$D^t V \subset \gamma(t) B^t U$$

для всіх $t = 0, 1, \dots$.

Наслідок 6. Нехай виконуються наступні умови:

1. Існують такі числа b та d, що $\|B^t\| \leqslant b$, $\|D^t\| \leqslant d$ для всіх $0, 1, \dots$.
2. Множина U є опуклим компактом та $0 \in \mathrm{int} U$.
3. Виконується умова 13, а функція $\gamma(t)$ така, що $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) < 1$.

Тоді з будь-яких початкових положень x^0 та y^0 переслідування у задачі (4), (5) можна закінчити за обмежену кількість кроків.

Наслідок 7. Нехай для задачі (4), (5) виконуються наступні умови:

1. Власні числа матриць B та D по модулю менші одиниці.
2. Множина $W(t, v)$ є зірковозначною відносно нульового елемента напівпростору L для всіх $v \in V$, $t = 0, 1, \dots$, а також $0 \in \mathrm{int} W(t, v)$.

Тоді з довільних початкових положень x^0, y^0 переслідування можна закінчити за обмежену кількість кроків.

У §7 наводиться інша схема розв'язання задачі глобального переслідування, яка дозволяє ефективно розв'язувати проблему повного керування для об'єктів з різною інерційністю.

Для таких об'єктів умова Л.С. Понтрягіна не виконується у деякому інтервалі часу. У цьому випадку розглядаються багатозначні відображення

$$W^* = \pi A^t \varphi(U, G(t)v), \ t = 0, 1, \dots, \ v \in V;$$

$$W^* = \bigcap_{v \in V} W^*(t, v), \ t = 0, 1, \dots,$$

де $G(t)$ — деяка матрична функція.

Умова 14. Існує матрична функція $G(t)$, $t = 0, 1, \dots$, така, що багатозначне відображення $W^*(t)$ не є пустим для всіх $t = 0, 1, \dots$.

Умова 15. Багатозначне відображення $W^*(t, v)$ є опуклозначним для всіх $t = 0, 1, \dots, v \in V$.

Покладемо

$$\varphi^*(t, u, v) = \varphi(u, v) - \varphi(u, G(t)V), \ t = 0, 1, \dots, \ u \in U, \ v \in V.$$

Розглянемо багатозначне відображення

$$M(t) = M \pm \sum_{k=0}^{t-1} \pi A^{t-k-1} \varphi^*(k, U, V), \ t = 0, 1, \dots.$$

Умова 16. Для вищезгаданої математичної функції $G(t)$ багатозначне відображення $M(t)$ не є пустим та є опуклозначним.

Введемо дискретний аналог функції Л.С. Понтрягіна $P^*(t)$, $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$,

$$P^*(z) = \min\{t = 0, 1, \dots : \pi A^t z \in M(t) - \sum_{k=0}^{t-1} W^*(k)\}.$$

Теорема 5. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 14 — 16, для деякого початкового положення z^0 $P^*(z^0) < +\infty$. Тоді об'єкт z, рух якого описується системою різницевих рівнянь (1), можна привести на термінальну множину за $P^*(z^0)$ кроків.

Умова 17. Існує невід'ємна функція $r(t)$, $r: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ і функція $\chi(t)$, $\chi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, що

$$r(t)S + \chi(t) \subset M(t) - \sum_{k=0}^{t-1} W^*(k),$$

де S — шар одиничного радіуса з центром у нулі напівпростору L.

Умова 18.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\|\pi A^t\| + \|\chi(t)\|}{r(t)} = 0.$$

Наслідок 8. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 14 — 18, тоді для будь-якого початкового положення $z^0 = z(0)$ $\quad P^* < +\infty$. •

Другу главу присвячено розв'язанню задачі повного керування дискретних конфліктно керованих процесів за допомогою дискретного аналогу методу першого поглинання Н.Н. Красовського. У цьому випадку у кожний момент часу керування переслідуючого будується на основі інформації про фазові координати об'єктів на цей час, тобто в цьому методі реалізується позиційний підхід до вибору керування.

У §9 наводиться основна схема методу першого поглинання Н.Н. Красовського для квазілінійних дискретних систем.

Позиційна стратегія переслідуючого визначається багатозначним відображенням $U(t, z, v)$, яке ставить у відповідність векторам $z(t)$ та $v(t)$ вектор $u(t)$, $t = 0, 1, \ldots$ з множини U.

Для задачі (1), (2) розглянемо багатозначні відображення

$$\Phi(t, k, v) = \pi A^{t-k} \varphi(U, v), \; t = 1, 2, \ldots, \; k = 0, 1, \ldots, t-1, \; v \in V,$$

$$W(t, v(\cdot)) = M - \sum_{k=0}^{t-1} \Phi(t-1, k, v), \; t = 1, 2, \ldots, \; v(\cdot) \in \Omega_V,$$

$$W(t) = \bigcap_{v(\cdot) \in \Omega_V} W(t, v(\cdot)), \; t = 0, 1, \ldots,$$

де $\Omega_V = \{v(\cdot): v(t) \in V, \; t = 0, 1, \ldots\}$.

Умова 19. Багатозначне відображення $W(t)$ не є пустим для всіх $t = 0$, $1, \ldots$

Умова 20. Багатозначне відображення $\Phi(t, k, v)$ є опуклим для кожного $t = 1, 2, \ldots, \; k = 0, 1, \ldots, t-1, \; v \in V$.

Запровадимо дискретний аналог функції Н.Н. Красовського $T(z)$, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$.

$$T(z) = \min\{t = 0, 1, \ldots : \pi A^t z \in W(t)\}.$$

Якщо z — початкове положення процесу, то функція $T(z)$ визначає час першого поглинання.

Визначимо функцію $\alpha(t, z)$

$$\alpha(t, z) = \min_{\|p\|=1, p\in L} [C(W(t); p) - (p, A^t z)],$$

де $C(W(t); p)$ — опорна функція багатозначного відображення $W(t)$.

Функція $\alpha(t, z) < 0$ тільки тоді, коли $z \notin M^*$. У цьому випадку час повного поглинання визначається таким чином

$$T(z) = \min\{t = 0, 1, \ldots : \alpha(t, z) \geqslant 0\}.$$

Умова 21.

1) множина $\bigcap_{v\in V} \pi A^t \varphi(U, v)$ є непустою для кожного $t = 0, 1, \ldots$;

2) функція $\min_{v\in V} \max_{u\in U} (p, A^t \varphi(u, v))$, де $p \in L$, $t = 0, 1, \ldots$ є опуклою.

Лема 1. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 19 та 20, тоді

$$W(t) = M - \sum_{k=1}^{t-1} \bigcap_{v\in V} \pi A^{t-k-1} \varphi(U, v),$$

а

$$C(W(t); p) = C(M; p) + \sum_{k=0}^{t-1} \min_{v\in V} \max_{u\in U} (-p, A^{t-k-1} \varphi(u, v)),$$

$$p \in L, \ t = 1, 2, \ldots$$

Лема 2. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконані умови 19, 20 та 21, а також $T(z^0) < +\infty$. Тоді об'єкт z можна вивести на термінальну множину M^* з початкового положення z^0 за $T(z^0)$ кроків.

У §10 подаються достатні умови розв'язності задачі повного керування процесу (1), (2) у класі позиційних стратегій.

Розглядаються функції

$$C_M = \min_{\|p\|=1, p\in L} C(M; p),$$

$$\gamma(t) = \min_{\|p\|=1, p\in L} \max_{u\in U} \min_{v\in V} (-p, A^t \varphi(u, v)),$$

$$\beta(t) = \min_{\|p\|=1, p\in L} \sum_{k=0}^{t-1} \min_{v\in V} \max_{u\in U} (-p, A^t \varphi(u, v))$$

Наслідок 9. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконується умова 19, $\|\pi A^t\| \leq K$, де K, $t = 0, 1, \ldots$ та $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) > 0$. Тоді для довільного $z \in \mathbb{R}^n$, $T(z) < +\infty$.

Наслідок 10. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконується умова 19, функція $\gamma(t)$, $t = 0, 1, \ldots$ є невід'ємною, $C_M > 0$ та $\lim\limits_{t \to +\infty} \|\pi A^t\| = 0$. Тоді $T(z) < +\infty$ для довільного $z \in \mathbb{R}^n$.

Наслідок 11. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконується умова 19 та $\lim\limits_{t \to +\infty} \beta(t)/\|\pi A^t\| = +\infty$. Тоді $T(z) < +\infty$ для довільного $z \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 6. Нехай для конфліктно керованого процесу (1), (2) виконуються умови 19, 20 та 21, а також мають місце припущення про параметри процесу хоча б одного з наслідків 9 — 11. Тоді з будь-якого початкового положення $z^0 = z(0)$ системи (1) об'єкт z можна вивести на термінальну множину (2) за обмежену кількість кроків.

У §11 розглядається лінійна дискретна система, тобто

$$z(t+1) = Az(t) + Bu(t) - Dv(t), \tag{6}$$

де B та D — квадратні матриці порядку n, $t = 0, 1, \ldots$.
У цьому випадку багатозначне відображення має вигляд

$$W(t) = \left(M - \sum_{k=0}^{t-1} \pi A^{t-k-1} BU\right) \overset{*}{-} \sum_{k=0}^{t-1} \pi A^{t-k-1} DV, \; t = 1, 2, \ldots .$$

Умова 22. $\pi BU \overset{*}{-} \pi DV \neq 0$ та множина πDV повністю вимітає множину πBU

Лема 3. Якщо для лінійного конфліктно керованого процесу (6), (2) виконуються умови 19 та 21, а також $T(z) < +\infty$, тоді об'єкт z можна вивести на термінальну множину M^* з початкового положення $z^0 = z(0)$ не більше ніж за $T(z^0)$ кроків.

Наслідок 12. Нехай для лінійного конфліктно керованого процесу (6), (2) виконуються наступні умови:

1) $A = \lambda I$, I — одинична матриця порядку n, $|\lambda| < 1$;

2) $0 \in M$;

3) U — непустий опуклий компакт, $0 \in \pi BU$, $\pi BU \overset{*}{-} \pi DV \neq \varnothing$ та множина πDV повністю вимітає множину πBU. Тоді процес (1), (2) є повністю керованим.

Параграфи 8 та 13 присвячено розгляданню модельних прикладів задач переслідування.

У § 12 здійснено порівняння результатів застосування методу розв'язувальних функцій та методу першого поглинання Н.Н. Красовського, а також подано умови, за яких час переслідування в обох випадках співпадає.

Теорема 7. Нехай задано конфліктно керований процес (6), (2), для якого виконується умова 1, $\pi A^t U$, $\pi A^t V$ – опуклозначні відображення, тоді, якщо існує невід'ємна числова функ...ія $\omega(t, k)$, $t = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots t - 1$, така, що

$$\sum_{k=0}^{t-1} \omega(t, k) = 1$$

для всіх $t = 1, 2, \ldots$, та багатозначне відображення $\pi A^t V$ повністю вимітає відображення $\pi A^t U$, а також

$$0 \in (\pi A^{t-k-1} U + \omega(t, k) M) \stackrel{*}{-} \pi A^{t-k-1} V$$

для всіх $t = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots t - 1$, тоді процес (6), (2) є повністю керованим і $P(z) = T(z)$ для всіх $z \in R^n$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Запропоновано дискретний аналог методу розв'язувальних функцій для розв'язання задачі повного конфліктного керування дискретних процесів, який дозволяє ефективно застосовувати динаміку та структуру процесів і співвідношення ресурсів об'єктів. Отримано достатні умови розв'язності задачі глобального керування для квазілінійних процесів переслідування, у випадку коли виконується вимога Л.С. Понтрягіна.

2. Сформульовано більш слабкі достатні умови повного керування, в яких враховано структуру термінальної множини, а опуклі обмеження замінено на неопуклі.

3. В явному вигляді наведено формулу для гарантованого часу попадання на термінальну множину у класі квазістратегій.

4. Представлено достатні умови повного керування у випадку нефіксованого часу попадання на термінальну множину.

5. Отримано конкретизовані умови повного керування, що легко перевіряються для задач з розділеним рухом переслідуючого та втікача.

6. Запропоновано схему розв'язання дискретної задачі переслідування для об'єктів з різною інерційністю. Отримано достатні умови, за яких переслідування можна здійснити з будь-яких початкових положень системи різноінерційних об'єктів.

7. Для задачі повного керування дискретних квазілінійних процесів застосовано дискретний аналог методу першого поглинання Н.Н. Красовського, за допомогою якого отримано достатні умови розв'язності задачі глобального переслідування у класі позиційних стратегій.

8. Для лінійних систем проведено порівняння результатів застосування методу розв'язувальних функцій та методу першого поглинання Н.Н. Красовського. Отримано достатні умови рівності часу першого поглинання та часу гарантованого попадання на термінальну множину.

9. Основні теоретичні положення дисертації демонструються на модельних прикладах ігрових ситуацій.

Основні положення дисертації опубліковано у таких працях:

1. *Магарь Н.С.* Полная конфликтная управляемость дискретных квазилинейных процессов. – Киев, 1993. – 29 с. (Препр. / АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 93-34).

2. *Магарь Н.С.* О полной конфликтной управляемости квазилинейных дискретных систем // Методы исследования экстремальных задач. – Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1994. – С. 28 – 35.

3. *Магарь Н.С.* Глобальные задачи преследования для дискретных процессов // Кибернетика и вычисл. техника.– 1995. – Вып. 103. – С. 92– 98.

4. *Магарь Н.С.* Позиционная конфликтная управляемость дискретных процессов // Проблемы управления и информатики.– 1995.– № 2. – С. 12– 20.

5. *Магар Н.С., Ясінський В.В.* Повна конфліктна керованість дискретних квазілінійних процесів // Тез. докл. IV Міжнар. наук. конф. ім. Академіка М. Кравчука. – Київ, 1996. – С. 32-34.

6. *Yasinskii V.V., Magar N.S.* Complete conflict controlability of descrete systems // Тез. докл. IV Междунар. науч. конф. "Многокритериальные игровые задачи при неопределенности". - Орехово-Зуево, 1996. – С. 109-110.

У спільних публікаціях з В.В. Ясінським особистий внесок Н.С. Магар становить розв'язання задачі повного конфліктного керування дискретними процесами, формулювання і доказ основних положень робіт та розв'язання модельних прикладів.

Магарь Н.С. Полная конфликтная управляемость дискретных процессов. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.01 – теоретические основы информатики и вычислительной техники. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Киев, 1996.

Работа посвящена исследованию полной управляемости дискретных процессов преследования. В классе квазистратегий получены достаточные условия глобальной управляемости. Для дискретных процессов преследования реализована позиционная стратегия выбора управления. Сформулированы достаточные условия завершения процесса преследования из любых начальных положений в классе позиционных стратегий. Получены условия равенства времен преследования при позиционном выборе управления и в классе квазистратегий. Результаты демонстрируются на модельных примерах.

N.S. Magar Complete conflict controlability of. Manuscript. Thesis for a degree of Candidat of Science (Ph. D.) in Physics and Mathematics in speciality 01.05.01 - Informatics and Cybernetics Theoretical Basis. V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine. Kiev, 1995.

This paper is devoted to the investigation of complete controlability of pursuit descrete processes. The sufficient conditions of the global conflict control under quasistrategy are obtained for the descrete processes. The positional strategy of optimal control are realized for pursuit descrete processes. The sufficient conditions are formulated for pursuit processes to be completed within any initial positions. The conditions of equality the pursuit time under quasistrategy and positional strategy are obtained. The results are demonstrated by the model examples.

Ключові слова: конфліктно керований процес, термінальна множина, багатозначне відображення, розв'язувальна функція, квазістратегія, позиційна стратегія, опорна функція, час першого поглинання.

Підп. до друку 18.04.96. Формат 60×84/16. Папір для розмнож. апар. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,05. Обл.-вид. арк. 1,0. Зам. 224. Тир. 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40