НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

К У Х А Р Ч У К Микола Макарович

К В А З И Л І Н І Й Н І Е Л І П Т И Ч Н І Р І В Н Я Н Н Я Т А Н Е Л І Н І Й Н І П І В Г Р У П И С Т И С К У

01.01.02 - диференціальні рівняння

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в НТУУ " КПІ"

Офіційні опоненти: доктор фіз.-мат. наук, професор, академік ДАЛЕЦЬКИЙ Ю.Л.

доктор фіз.-мат. наук, професор СЙДЕЛЬМАН С.Д.

доктор фіз.-мат. наук, професор ШИШКОВ А.Є.

Провідна установа: Львівський державний університет

Захист відбудеться "28" травня 1996р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "24" квітня 1996р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз.-мат. наук Лучко А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

АКТУАЛЬНІСТЬ ТЕМИ. Десертаційна робота присв'ячена дослідженню слабкої розв'язоності квазілінійних еліптичних рівнянь з повільно зростаючими вимірними коефіцієнтами в шкалі соболевих просторів $W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$, $p>2$, $l\geqslant 3$, виду

$$\lambda u - \sum_i \nabla_i a_i(x,u,Du) + b(x,u,Du) = f\,,\ \lambda>0,\ \text{де}\ (0.1)$$

$$|\bar{a}(x,y,z)| \leqslant \mu_1^{\,a}(x)|z| + \mu_2^{\,a}(x)|y|^{\gamma} + \mu_3^{\,a}(x)\,,\ 0\leqslant\gamma<\frac{l}{l-2},$$

$$|b(x,y,z)| \leqslant \mu_1^{\,b}(x)|z| + \mu_2^{\,b}(x)|y|^{\gamma_1} + \mu_3^{\,b}(x)\,,\ 0\leqslant\gamma_1\leqslant\frac{l}{l-2}\,.$$

гладкості розв'зків в залежності від диференціальних властиввостей функцій $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $f(x)$, побудови нелінійної півгрупи стиску, генераторами якої яляються оператори , породжені лівою частиною рівняння (0.1), а також розгляду аналогічних питань для рівняння

$$\lambda u + \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} D^{\alpha} A\alpha\,(x,u,Du,\dots,Du^{m}) = f$$

за тих же обмежень.

Дослідження такого роду стимулюються, з одного боку, внутрішньою логікою розвитку теорії квазілінійних рінянь, функціонального аналізу, з другого боку,- можливими практичними застосуваннями в математичній фізиці .

Наші дослідженя стосуються класу рінянь недосить вивчених в літературі навіть для випадку лінійних рівнянь. Спроба побудувати нелінійну півгрупу стиску в L^p, $p>2$ для конкретних диференціальних операторів $A:\ \ D(A) \to L^p$, породжених лівою частиною вищезгаданих диференціальних рівнянь, зроблена нами вперше і являється аналогом побудови нелінійної півгрупи для випадку $p=2$ Ю.Комурою.

Таким чином, актуальність виконаного нами дослідження визначається як можливими важливими практичними застосуваннями, так і внутрішніми потребами розвитку теорії.

МЕТОЮ РОБОТИ було встановлення умов слабкої розв'язності рівнянь в шкалі соболевих просторів, дослідження гладкості розв'язків в залежності від диференціальних властивостей структури рівнянь, побудова нелінійної півгрупи в L^p, $p>2$, генератором якої являлись би оператори, породжені лівою частиною рівнянь.

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ. В роботі використовується новий метод нелінійного функціонального аналізу, створений автором для $p>2$ і співпадаючий з раніше відомими традиційними методами при $p = 2$ - деякий аналог методу монотонних, слабко-компактних операторів, метод апріорних оцінок, що в подальшому стають апостеріорними, які дозволили відповісти, на питання ров'язності рівняння, єдиності розв'язку, регулярності самих розв'зків за обмежень на коефіцієнти рівняння по проеторовій змінній x, раніше не розглядуваних навіть для лінійних рівнянь, виняток тут складають тільки роботи Київського математика Ю.Семенова та його учнів для деякого класу лінійних рівнянь.

НАУКОВА НОВИЗНА ТА ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ РОБОТИ.

Головним моментом дослідження являється відмови автора від традиційних обмежень на коефіцієнти рівняяння, при яких справедлива сильна нерівність коерцитивності:

$$||L(x,u||_{L^p} \geq C\,||u||_{W_2^{\,p}},$$

тобто, відмова від умов, за яких $a(x,0,0)$, $b(x,0,0)$, $\mu_2{}^a(x)$, $\mu_1{}^b(x)$, $\mu_2{}^b(x) \in L^q$, $q>1$.

За допомогою форми

$$h^P(u,V) = \lambda\langle u,V\rangle + \langle \bar{a}(x,u,Du),\ \bar{\nabla}V\rangle + \langle b(x,u,Du),V\rangle$$

$$v \in W_{1,0}{}^P,\ u \in D(h^P\lambda) =: \{ u \in W_1{}^P \,|\, |h^P\lambda(u,V)| < \infty \}$$

введено аналог вищезгаданої нерівності коерцитивності, а саме, слабку нерівність коерцитивності за мінімальних обмежень на коефіцієнти рівняння. Вищезгадана форма, $h^P\lambda(u,v)$ за цих обмежень породжує обмежений, коерцитивний (некоерцитивний) хемінеперервний оператор $A^p\lambda : W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0$ $(\gamma,\gamma_1,p,\varepsilon,\beta)>0$, аккретивний (псевдоакретивний) в L^p, $p>2$. При $p=2$ цей оператор має властивості коерцитивності (некоерцитивності) хемінеперервності, як оператор, що діє із $W_1{}^2(R^l,d^lx)$ в $W_{-1}{}^2(R^l,d^lx)$, властивості монотонності (псевдомонотонності) в L^2, тобто автором створено аналог теорій коерцитивних хемінеперервних, монотонних операторів в L^p, $p>2$, діючих із $W_1{}^p(R^l,d^lx) \to W_{-1}{}^p(R^l,d^lx)$, до речі, вони тут не являються і опуклими.

Отже, додаючи до вищесказаного Лему 1.5 - аналог Леми "об остром угле" при p=2, приходимо до нового методу нелінійного аналізу дослідження розв'язності еліптичних рівнянь в просторах Соболева.

Для випадку $2<p<l/2$ результати одержані вперше і, як це доведено в роботі, вони не можуть бути встановлені в рамках традиційних обмежень на структуру рівняння раніше принятими методами дослідження.

В дисертації одержано наступні нові наукові результати:

- досліджена розв'язність рівняння (0,1) з гладкими коефіцієнтами в $W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$ $f \in W_{-1}^{\,p}(R^l, d^l x)$;
- встановлено апріорні оцінки похідних першого та другого порядку узагальнених розв'язків рівняння (0,1) з гладкими коефіцієнтами;
- досліджена розв'язність рівняння (0,1) з вимірними коефіцієнтами при умові, що функції $\mu_2^{\,a}(x)$, $\mu_1^{\,b}(x)$, $\mu_2^{\,b}(x)$ належать класу форм-обмежених потенціалів

$\Pi_k\beta(-\Delta) = \{\, u \,/\, \|fu\|_2^{\,2} \leq \beta\|\nabla f\|_2^{\,2} + C(\beta)\|f\|_2^{\,2},\ f \in C_0^{\infty}(R^l)\,\}$, $\beta>0$, $C(\beta)>0$;

- доведені: теорема-аналог теореми Мінті-Браудера для $p>2$, теорема-аналог теореми 1.2, C.30 із [2] для псевдоакретивних операторів $A^p\lambda$: $W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$, $\lambda>\lambda_0$ $(P,\gamma,\gamma_1,\beta,l)>0$ в L^p;
- одержані нові апріорні оцінки похідних узагальнених розв'язків рівняння (0,1) при умові, що $\mu_2^{\,a}(x)$, $\mu_1^{\,b}(x)$, $\mu_2^{\,b}(x) \in \Pi_k\beta\ (-\Delta)$;
- доведена слабка збіжність розв'язків "зглажених" рівнянь до розв'язків рівняння (0,1);
- для випадку

$$|\bar{a}^r(x,u,Du)| = \left|\left(\frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta x_r}\right)\right| \leq \mu_1^{\,r}(x)|\bar{\nabla} U|,$$

$$|\bar{a}^u(x,u,Du)| = \left|\left(\frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta u}\right)\right| \leq \mu_1^{\,u}(x),\ \mu_1^{\,r}(x),\ \mu_1^{\,u}(x) \in$$

$\Pi_k\beta(-\Delta)$ доведена належність розв'язків рівняння (0,1) $f \in L^q$, $q>l/2$; $\mu_1^{\,r}(x)$, $\mu_2^{\,u}(x) \in L^2(R^l, d^l x) \cap L^p(R^l, d^l x)$, або $\in L^2(R^l, d^l x) \cap L^{p'}(R^l, d^l x)$ простору

$L^{\infty}(R^l, d^l x) \cap W_2^{\,p/2}(B_R, d^l x) \cap W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$, $R>0$, $2<p<3$;

$L^{\infty}(R^l, d^l x) \cap W_2^{\,p/2}(R^l, d^l x) \cap W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$, $3<p<4$;

$L^{\infty}(R^l, d^l x) \cap W_2^{\,2}(R^l, d^l x) \cap W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$, $p>4$;

- побудована нелінійна півгруппа стиску в L^p, $p>2$, генераторами якої являються оператори - $A^p\lambda\beta$ ∤ $L^p(R^l, d^l x)$;

- досліджена розв'язність, однозначна розв'язність рівняння

$$\lambda u + \sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} D^{\alpha} A_{\alpha} (x, u, Du, \ldots, D^m u) = f \text{ в } W_m^2 (R^l, d^l x)\ f \in$$

$\in W_{-m}^2 (R^l, d^l x)$ за тих же обмежень на структуру рівняння, що і для рівняння (0,1).

Розроблені в роботі методи можуть знайти застосування в дослідженні конкретних систем математичної фізики, а одержані результати можуть бути використані в теорії рівняннь в частинних похідних.

ПУБЛІКАЦІЇ Основні результати роботи опубліковані в роботах [1-16].

АПРОБАЦІЯ РОБОТИ. Основні результати роботи доповідались на 5-й, 6-й, 7-й, 8-й Республіканських конференціях по нелінійних задачах математичної фізики (Львів, 1985; Донецьк, 1987; Чернівці, 1989; Донецьк, 1991), об'єднаному семінарі ім.Петровського та Московського математичного товариства (МДУ, 1989-1991) семінарі член-корреспондента АНСРСР С.І.Похожаєва в Московському енергетичному інституті в 1991 році, семінарі академіка АН України І.В.Скрипника в Донецьку в 1991 році, семінарі відділу диференціальних рівнянь в частинних похідних (кер.професор М.Л.Горбачук) Ін-ту математики АН України (1991 р., 1996 р.), Міжнародних конференціях, присвячених пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ, 1992, 1995).

СТРУКТУРА ТА ОБ'ЄМ РОБОТИ. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів та доповнення-"Выводы", списку літератури, що складає 81 назву.

ЗМІСТ РОБОТИ.

Вступ складається з трьох пунктів: 1^0 - Приняті позначення, допоміжні твердження; 2^0 - Наукова новизна та практичне значення роботи; де ставиться мета роботи, практичне значення, аналіз основних результатів та зв'язок між ними.

РОЗДІЛ І присвячений дослідженню розв'язності квазілінійних еліптичних рівнянь (0,1) з повільно зростаючими гладкими коефіцієнтами в Соболевих просторах $W_1^p(R^l, d^l x)$, $p>2$, $l>3$. Розділ має два параграфи.

Результати одержані в §1 мають, взагалі кажучи, методичне значення.

Одначе, Лема 1.5, та методи встановлення розв'язності рівняння (0,1) лежать в основі доведення розв'язності рівнянь (0,1) з вимірними коефіцієнтами і належать автору.

§2 присвячений дослідженню розв'язності частинного випадку рівняння (0,1) з неперервними операторними коефіцієнтами. Розв'язність цього рівняння встановлюється за допомогою методів дослідження, запропонованих в §1, гладлість розв'язків - як наслідок роботи Ю.О.Семенова [19].

Коротко викладемо результати §1.

Нехай функції $R^l x R x R^l \in (x,y,z) \to a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$ задовольняють умовам:

1) $a_i(x,y,z), i=1,\dots,l$, $b(x,y,z)$ - неперервні на $R^l x R x R^l$ скалярні функції, неперервно диференційовані по (y,z);

2) $|\bar{a}(x,y,z)| \leq \mu_1{}^a(x)|z| + \mu_2{}^a(x)|y|^{\gamma} + \mu_3{}^a(x)$, $0<\gamma<l/(l-2)$,

$|b(x,y,z)| \leq \mu_1{}^b(x)|z| + \mu_2{}^b(x)|y|^{\gamma_1} + \mu_3{}^b(x)$, $0<\gamma_1<l/(l-2)$,

$$|\bar{a}(x,y,z)-\bar{a}(x,y_1,z_1)| \leq \tilde{\mu}_1{}^a(x)|z-z_1| + \tilde{\mu}_2{}^a(x)|y-y_1| \begin{cases} |\tilde{y}|^{\gamma-1}, & 1<\gamma<l/(l-2), \\ 1, & 0<\gamma<1, \end{cases}$$

$$|b(x,y,z)-b(x,y_1,z_1)| \leq \tilde{\mu}_1{}^b(x)|z-z_1| + \tilde{\mu}_2{}^b(x)|y-y_1| \begin{cases} 1, & 0<\gamma_1<1, \\ |\tilde{y}|^{\gamma_1-1}, & 1<\gamma_1<l/(l-2), \end{cases}$$

де $|\tilde{y}|^{\gamma-1}=|y|^{\gamma-1} + |y_1|^{\gamma-1}$; $\mu_1{}^a(x)$, $\tilde{\mu}_1{}^a(x)$, $\mu_1{}^b(x)$, $\tilde{\mu}_1{}^b(x)$ - обмежені функції, причому $\mu_3{}^a(x)$, $\mu_3{}^b(x)$ $\in$ $L^p(R^l,d^lx)$; $\mu_2{}^a(x)$, $\tilde{\mu}_2{}^a(x)$, $\mu_2{}^b(x)$, $\tilde{\mu}_2{}^b(x)$ $\in L^{pl/l-\gamma_1(l-2)}(R^l,d^lx)$ для $1<\gamma$, $\gamma_1<l/(l-2)$.

3) $\xi_0 a^0(x,y,z)_0 \xi = \sum_{ij}^{l} \dfrac{\delta a_i(x,y,z)}{\delta z_j} \xi_i \xi_j \geq \xi^2 \quad \xi \in R^l$,

$$a^0(x,y,z) = \left(\frac{\delta a_i(x,y,\theta z)}{\delta z_j} \right), \quad 0<\theta<1,$$

$$\frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta D_j u} \in L^{\infty}(R^l,d^lx) \quad U=U(x) \in W^p{}_{1,0}(R^l,d^lx).$$

Розглянуто три різні випадки : 1) $\gamma=\gamma_1=1$; 2) $0<\gamma$, $\gamma_1<1$, 3) $1<\gamma$, $\gamma_1<l/(l-2)$.

Теорема 1.1. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1) - 3), то воно має единий узагальнений розв'язок в $W_1^{\,2}(R^l, d^l x)$ $f \in W_{-1}^{\,2}$.

Доведення теореми безпосередньо слідує із аналізу форми $h^p\lambda(u,v)$, яка в наших умовах породжує оператор $A^2\lambda$: $W_1^{\,2} \to W_{-1}^{\,2}$, який задовольняє умовам абстрактної відомої теореми Мінті-Браудера.

2. Нехай γ, $\gamma_1 \neq 1$, $p>2$. Умови 1) - 3) не гарантують розв'язності рівняння (0,1) в просторі $W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$ $f \in W_{-1}^{\,p}$. Тому, припускаючи додатково, що

$$4)\ |\bar{a}^r(x,u,Du)| = \left| \left(\frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta x_r} \right) \right| \leqslant \mu_1^{\,ar}(x)|\nabla u| + \mu_2^{\,ar}(x)|u| + \mu_3^{\,ar}(x),$$

$$|\bar{a}^u(x,u,Du)| = \left| \left(\frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta u} \right) \right| \leqslant \mu_2^{\,u}(x),$$

$$|\bar{b}^r(x,u,Du)| = \left| \left(\frac{\delta b(x,u,Du)}{\delta x_r} \right) \right| \leqslant \mu_1^{\,br}(x)|\bar{\nabla} u| + \mu_2^{\,br}(x)|u| + \mu_3^{\,br}(x),$$

де $\mu_3^{\,ar}(x)$, $\mu_3^{\,br}(x) \in L^p(R^l, d^l x) \cap L^\infty(R^l, d^l x)$; $\mu_2^{\,ar}(x)$, $\mu_2^{\,br}(x)$, $\mu_1^{\,ar}(x)$, $\mu_1^{\,br}(x)$ $\in L^\infty(R^l, d^l x)$, доводимо, що справедливий аналог теореми Мінті-Браудера для $p>2$.

Теорема 1.2. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1) - 5), то воно однозначно розв'язне в $W_1^{\,p}(R^l, d^l x)$ $f \in W_{-1}^{\,p}$.

Доведенню теореми передують наступні леми.

Лема 1.1. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1) - 5), то форма $h^p\lambda(u,v)$ породжує обмежений оператор $A^p\lambda$: $W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$.

Лема 1.2. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1) - 3), то оператор $A^p\lambda$: $W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$ породжений формою $h^p\lambda(u,v)$, - коерцитивне відображення $\varepsilon \in\ ]\,0, 4/p\,[$, $\lambda > \lambda_0(p, \varepsilon||\mu_1^{\,a}||\infty) > 0$.

Означення. Оператор $A^p\lambda$: $W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$ називається коерцитивним, якщо

$$\lim_{||u|u|^{p-2}||_{W_1^{\,p}} \to \infty} \frac{h^p\lambda(u, u|u|^{p-2})}{||u|u|^{p-2}||_{W_1^{\,p'}}} = \infty .$$

Лема 1.3. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1)-3), то оператор $A^p\lambda$: $W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$ - хемінеперервне відображення для $\lambda>\lambda_0(p, \varepsilon, ||\mu_1^{\,a}||\infty)$, $0<\varepsilon<4/p$, $p>2$.

Означення. Оператор $A^p\lambda$: $W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$ називається хемінеперервним, якщо

$$\lim_{t\to 0} A^p\lambda(u+tv) \xrightarrow[W_{-1}{}^p]{} A^p\lambda(u), \ u, \ v \in W_1{}^p.$$

Лема 1.4. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1)-3), то оператор $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ аккретивне в L^p відображення $\varepsilon \in]0,4/p[$, $p>2$, $\lambda>\lambda_0(p,\varepsilon,||\mu_1{}^a||^\infty)$, тобто

$\langle A^p\lambda(u) - A^p\lambda(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \geqslant 0$

Нехай $\{V_i\}$, $\{V_i{}^*\}$ - гладкі базиси просторів $W_{1,0}{}^p$ та $W_{1,0}{}^{p'}$ відповідно. Нехай $Un = \sum_{i=1}^{n} C_i V_i$, Un^* - дуальний по відношенню до Un елемент відносно норми в $L^p(R^l,d^lx)$, чи $W_1{}^p$ (R^l,d^lx)

Складемо систему рівнянь:

$\langle A^p\lambda(Un) - f, V_i{}^*\rangle=0$, $i=1,\dots,n$, що, згідно умов 1)-3) задає неперевне відображення B: $R^n \to R^n$. Справедлива наступна

Лема 1.5. Нехай на сфері $S_R=(C;|C|=R)$ $(R>0$ - деяке число) виконується умова "гострого кута" $\langle B(C),C^*\rangle \geqslant 0$ Тоді існує принаймні, одна точка C, $|C| \leqslant R$, така, що $B(C)=0$.

Доведення теореми 1.2 проводиться з допомогою методу Гальоркіна, леми 1.5, властивості аккретивності в L^p та хемінеперервності оператора $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(p,\varepsilon,||\mu_1{}^a||^\infty)>0$, $0<\varepsilon<4/p$, $p>2$, на основі апріорних оцінок $||Un||_{W_1{}^p} < C$, які одержані в Лемі 1.6.

3. Нехай $p>2$, $1<\gamma$, $\gamma_1<l/l-2$. Нехай структура рівняння задовольняє умовам 1)-3). Тоді справедлива

Лема 1.7. Якщо сттруктура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1)-3), то оператор $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(p,\varepsilon,||\mu_1{}^a||^\infty) > 0$, $0<\varepsilon<4/p$, $p>2$ обмежене, хемінеперервне відображення. Одначе оператор $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ в цьому випадку не являється коерцетивним, аккретивним в L^p відображенням.

Справедлива

Лема 1.8. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам 1)-3), то оператор $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(p,\varepsilon,||\mu_1{}^a||^\infty,||\mu_2{}^n||_{L}\times$ $\times pl/(1-\gamma(l-2))||)$ $\gamma \in]1, l/(l-2)]$ - псевдоаккретивне відображення в L^p: $\langle A^p\lambda(u) - A^p\lambda(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \geqslant -C\left(R,||W||_{W_1{}^2}\right)$,

$W = (u-v)|u-v|^{(p-2)/2}$, де $C(R,\rho t)$ - неперервна додатня функція, причому $\lim_{t\to 0} C(R,\rho t)\ t^{1-p} = 0$.

Якщо при цьому галеркінські наближення задовольняють равномірній оцінці $||U_u||_{W,p} < C$, де C функція від структури рівняння, то справедлива наступна теорема.

Теорема 1.3. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам лем 1.7, 1.8, то рівняння (0,1) розв'язне в $W_1{}^p$ $f \in W_{-1}{}^p$ хоча і неоднозначно.

Справедлива теорема 1.4. Якщо для рівняння (0,1) виконані умови 1) - 5) і воно розв'язне в $W_1{}^p$, причому $f \in L^2 \cap L^q$, $q>l/2$, то цей розв'язок рівномірно обмежений.

В умовах справедливості теореми 1.4 має місце теорема, якою і закінчується $1.

Теорема 1.5. Якщо структура рівняння задовольняє умовам 1) -5) і воно розв'язне в $W_1{}^p$, то його узагальнений розв'язок належить

$L^\infty \cap W_2{}^{p/2}(B_R, d^{l x}) \cap W_1{}^p$, $2<p<3$,

$L^\infty \cap W_2{}^{p/2} \cap W_1{}^p$, $3<p<4$,

$L^\infty \cap W_2{}^2 \cap W_1{}^p$, $p>4$ $f \in L^2 \cap L^q$, $q>l/2$.

Зауваження. Випадок $b(x,u,Du) = 0$ при виконанні умов 1) -5), як це слідує із дослідження форми $h^p(u,v)$, нічим суттєвим не відрізняється від попереднього, оскілбки форма $h^p\lambda(u,v)$ в цьому випадку породжує оператор $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, який має тіж властивості, що й для випадку $b(x,u,Du) = 0$.

В $2 досліджується розв'язність рівняння

$$\lambda_u - d_0 a^0(x,u,Du)_0\, du = f, \quad f>0 \qquad (0,1')$$

в шкалі просторів $W_1{}^p$, $p>2$ за припущень , що функція

$$a^0(x,u,Du) = a^0(x,\varphi(\int_{|t|\leqslant|x|} (|u(t)|^p+|\nabla u(t)|^p)dt)$$

Задовольняє умовам:

1) $a^0(x,y) \in C(R^l\times R\times R^l)$ - рівномірно не перервна матрична функція,
2) $\xi_0\, a^0(x,u,Du)_0\, \xi \geqslant \xi^2 \quad \xi \in R^l$

1. Нехай u: $R^l \to R$. Визначимо форму

$$h^p\lambda(u,v) = \lambda(u,v) + \langle du_0 a^0(x,u,Du)_0 dv\rangle,$$

$$v \in W_{1,0}{}^{p'};\ 1/p+1/p'=1,\ u \in D(h^p\lambda)=\{u \in W_1{}^p\,|\,h^p\lambda(u,v)|<\infty\}.$$

Форма $h^p\lambda(u,v)$ породжує обмежений оператор $A^p\lambda$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, для якого справедливі леми 1.1 - 1.3, 1.8.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.6. Якщо для рівняння (0,1') виконані умови 1), 2), то воно розв'язне в $W_1{}^p$, хоча і неоднозначно.

Для p=2 при додаткових умовах

$$\xi_0\ a^0(x,u,Du)_0\ \xi > \left(1 + ||u||^2_{W_1^2}\right)\xi^2$$

$$||\ a^0\ (x,\tilde{u},D\tilde{u})_0 \cdot (a^0(x,u,Du))^{-1}||_\infty < \frac{1}{\left(||u||_{W_1^2} + ||v||_{W_1^2}\right)^2}$$

$$\tilde{u} = u + \theta(v-u),\ 0<\theta<1,$$

справедлива наступна теорема.

Теорема 1.7. Якщо для рівняння (0,1') виконані умови лем 1.10 - 1.12 та вищевказані умови, то оператор $A^p\lambda$: $W_1^p \to W_{-1}^p$, $\lambda>0$ - бієктивне відображення.

Як наслідок теореми 1.7 одержуємо теорему 1.9.

Теорема 1.9. Нехай для рівняння (0,1') виконані умови теореми 1.7. Нехай $f \in L^1 \cap L^\infty$. Тоді рівняння (0,1') має єдиний узагальнений розв'язок

$u = u(x) \in \bigcap_p W_1^p\ 1<p<\infty$.

Закінчується §2 доведенням рівномірної обмеженості розв'язків рівняння (0,1') при виконанні умов теореми 1.9 методом Мозера.

РОЗДІЛ II присвячений встановленню апріорних оцінок похідних першого та другого порядку узагальнених розв'язків лінійних еліптичних рівнянь, їх систем та квазилінійних еліптичних рівнянь другого порядку з гладкими коефіцієнтами. З допомогою цих оцінок в розділі III встановлюється гладкість узагальнених розв'язків рівняннь в залежності від диференціальних властивостей структури цих рівнянь. Вперше ці оцінки були опубліковані в роботах [4,9].

Розділ II складається із двох параграфів. В першому із них доведена така теорема.

Теорема 2.1. Нехай самоспряжена l×l матриця з дійсними коефіцієнтами $a_{kj} \in C^\infty \cap L^\infty$, $k,j = 1,\dots,l$. Нехай $f = \mathrm{Re} f \in L^1 \cap L^\infty \cap C^\infty$, $\lambda>0$. В просторі L^p, $p>1$ розглянемо рівняння

$$(\lambda - d_0 a_0 d)\ u = f,\ u \in L^2 \cap L^\infty \tag{2.1}$$

Нехай $a_{kj}{}^r = \dfrac{\delta a_{kj}}{\delta x_r}$, $||\ \overset{\delta}{a}\ ||_q = \max\limits_{k,j,r} ||a_{kj}{}^r||_q$

Тоді справедливі апріорні оцінки:

$$1.\ \sum_{i,j}\left(||\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j u||^p_{L^p} + ||\bar{\nabla}_i u||^{2p}_{L^p}\right) \le C\left(l,p,||u||_\infty\right)\left(||\overset{\delta}{a}||^{2p}_{2p} + \right.$$

$$+ \|\bar{\nabla} f\|_{2p/3}^{2p/3} + \|f\|_p^p + \|u\|_2^2);$$

$$\sum_i \|\nabla_i u\|_{L^p}^{2p} \leq C\left(l, p, \|u\|_\infty\right)\left(\|a^\delta\|_{2p}^{2p} + \|\bar{\nabla} f\|_{2p/3}^{2p/3} +\right.$$

$$\left. + \|f\|_p^p + \|u\|_2^2\right), \ p \in]\ 3/2,\ 2\ [;$$

$$2.\ \sum_{i,r} \|\nabla_i \nabla_r u\|_2^2 < I_{1,\nu} \leq C\left(l, p, \|u\|_\infty\right)\left(\|f\|_p^p + \|a^\delta\|_{2p}^{2p}\right) +$$

$$+ C\left(\lambda, p, \|u\|_\infty\right)\left(\|f\|_2^2 + \|u\|_2^2\right),\ p > 2;$$

$$\sum_r \|\nabla_r u\|_{2p}^{2p} \leq C\left(p, l, \|u\|_\infty\right)\left(\|f\|_p^p + \|a^\delta\|_{2p}^{2p}\right) +$$

$$+ C\left(\lambda, p, \|u\|_\infty\right)\left(\|f\|_2^2 + \|u\|_2^2\right),\ p > 2;$$

$$3.\ \sum_{i,r} \|\nabla_i \nabla_r u\|_{L^p(B_R, d^1 x)}^p \leq C(l, p, R, \varepsilon) + C_1\left(l_1 \|f\|_2, \|a^\delta\|_2,\right.$$

$$\left. K, \|u\|_\infty\right) + C\left(p, k, \|u\|_\infty\right)\left(\|f\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|f\|_p^p +\right.$$

$$\left. + \|a^\delta\|_{2p'}^{2p'}\right);$$

$$3.\ \sum_{i,r} \|\nabla_i \nabla_r u\|_{L^p(B_R, d^1 x)}^p \leq C(l, p, R, \varepsilon) + C_1\left(l, \|f\|_2, \|a^\delta\|_2,\right.$$

$$\left. k, \|u\|_\infty\right) + C\left(p, k, \|u\|_\infty\right)\left(\|f\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|f\|_p^p +\right.$$

$$\left. + \|a^\delta\|_{2p'}^{2p'}\right);$$

$$\sum_i \|\nabla_i u\|_{2p}^{2p} \leq C\left(\|f\|_2, \|a^\delta\|_2, k, \|u\|_\infty\right) + C\left(\lambda, p, \varepsilon, \|u\|_\infty\right) \times$$

$$\times \left(\|f\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|a^\delta\|_{2p'}^{2p'}\right),\ \varepsilon = \frac{-k\nu}{4(1-\nu)},\ \ 1 < p < 3/2.$$

Доведення теореми 2.1. встановлення кожної із оцінок 1,2,3 проводиться з допомогою диференціювання рівняння, вибору встановлення кожної із оцінок відповідної "пробної" функції з використанням під час доведення самого рівняння (2.1).

В теоремі 2.2. за аналогічних обмежень на коефіцієнти рівняння

$(\lambda - d_0 a_0 d)\,\bar{U} = \bar{U},\ \bar{u} \in L^p \cap L^\infty \cap C^\infty$,

$\bar{U}^r = \dfrac{\delta U}{\delta x_r}$ встановлені аналогічні оцінки та тими ж методами, що і в теоремі 2.1.

§2 присвячений встановленню апріорних оцінок похідних першого та другого порядків для узагальнених розв'язків рівняння (0.1) розділу I для випадку $\gamma=\gamma_1=1$, $p>2$, а саме, доведена наступна теорема.

Теорема 2.3. Нехай додатньо визначена $l \times l$ - матриця $a^0=(a_{kj})$

$$a_{kj} = \frac{\delta a_k(x,u,v)}{\delta v_j}, \quad (x,u,v) \in R^l \times R \times R^l,$$

з дійсними коефіцієнтами задовольняє умовам:

$$\xi_0\ a^0{}_0\ \xi \geq \xi^2 \quad \xi \in R^l,\ a_{kj} \in C^1(R^l \times R \times R^l) \cap L^\infty(R^l \times R \times R^l).$$

Нехай $f = \mathrm{Re}\, f \in L^1 \cap L^\infty \cap C^\infty$, $\lambda>0$. В просторі L^p, $p>1$, розглянемо рівняння

$$\lambda u - d_0\, a(x,u,Du) = f$$

$$a_i(x,u,v) \in C^1(R^l \times R \times R^l),\ u \in L^2 \cap L^\infty \cap W_2{}^p.$$

Нехай $W=(W_1,\dots,W_l)$, $W_r = \dfrac{\delta U}{\delta x_r}$, $f_r = \dfrac{\delta f}{\delta x_r}$,

$$a_i{}^r = \frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta x_r}, \quad a_i{}^u = \frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta u},$$

$$a^0(x,u,Du) = \left(\frac{\delta a_i(x,u,Du)}{\delta D_j u}\right), \text{ причому}$$

$|\,a_i{}^r\,| \leq \mu_i{}^r\,|\bar{\nabla} u|$, $|\,a_i{}^u\,| \leq \mu_i{}^u$, $0 < \mu_i{}^r$, $\mu_i{}^u \in L^2 \cap L^p$ або $L^2 \cap L^{p'}$. Тоді справедливі апріорні оцінки:

$$1.\ \sum_{i,r} \left(\|\nabla_i \nabla_r u\|_p^p + \|\nabla_r u\|_p^p\right) \leq C\left(p, l, \|u\|_\infty, C^a, \lambda\right) \left(\|\mu^r\|_{2p}^{2p} +\right.$$

$$+ ||\mu^u||_{2p}^{2p} + ||\bar{\nabla}f||_{2p/3}^{2p/3} + ||f||_p^p + ||u||_2^2\Big) ;$$

$$\sum_r ||\nabla_r u||_p^p \leqslant C\Big(p, l, ||u||_\infty, C^a, \lambda\Big) \Big(||\mu^r||_{2p}^{2p} + ||\mu^u||_{2p}^{2p} +$$

$$+ ||\bar{\nabla}f||_{2p/3}^{2p/3} + ||f||_p^p + ||u||_2^2\Big) \quad p \in]\ 3/2,\ 2\ [;$$

2. $$||\bar{\nabla}u||_{2p}^{2p} \leqslant C\Big(p, l, ||u||_\infty, C^a, \lambda\Big) \Big(||\mu^r||_{2p}^{2p} + ||\bar{\nabla}f||_{2p/3}^{2p/3} +$$

$$+ ||f||_p^p + ||u||_2^2\Big),\ p > 2 ;$$

$$\sum_r ||\nabla_{rr}^2 u||_p^p \leqslant C(p, l) \Big(||\mu^r||_2^2 + ||\mu^u||_2^2\Big) +$$

$$+ C\Big(p, l, ||u||_\infty, C^a, \lambda\Big)\Big(||\mu^r||_{2p}^{2p} + ||\mu^u||_{2p}^{2p} + ||\bar{\nabla}f||_{2p/3}^{2p/3} +$$

$$+ ||f||_p^p + ||u||_2^{2)}\Big),\ p > 2 ;$$

3. $$\sum_{i,r} ||\ \nabla_i \nabla_r u||_{L^p(B_R,\, d^l x)} \leqslant C(R, p, \varepsilon) + C\Big(||u||_2, ||\mu^r||_2,$$

$$||\mu^u||_2, C^a, k\Big) + C\Big(p, l, ||u||_\infty, C^a, \varepsilon\Big)\Big(||\mu^r||_2^2 + ||\mu^u||_{2p}^{2p} +$$

$$+ ||f||_2^2 + ||u||_2^2 + ||f||_p^p\Big) + C(p, l, \varepsilon)\Big(||\mu^u||_2^2 + ||\mu^u||_{2p}^{2p} +$$

$$+ ||f||_2^2 + ||f||_p^p\Big) + C\Big(p, l, ||u||_\infty\Big)\Big(||\mu^r||_{2p}^{2p} + ||\mu^u||_{2p}^{2p} +$$

$$+ ||\mu^r||_{2p'}^{2p'} + ||\mu^u||_{2p'}^{2p'}\Big) ;$$

$$||\bar{\nabla}u||_{2p}^{2p} \leqslant C(p, \varepsilon)\Big(||u||_2^2 + ||f||_2^2 + ||\mu^u||_2^2\Big) +$$

$$+ C\Big(p, l, ||u||_\infty, C^a, \varepsilon\Big)\Big(||\mu^r||_2^2 + ||\mu^u||_{2p}^{2p} + ||u||_2^2 + ||f||_2^2 +$$

$$+ ||f||_p^p + ||\mu^r||_{2p'}^{2p'} + ||\mu^u||_{2p'}^{2p'}\Big) + C\Big(||u||_2, ||f||_2, ||\mu^r||_2,$$

$$||\mu^u||_2, C^a, k, \lambda\Big)\ ,\ 1 < p < 3/2.$$

Аналіз доведення теореми показує, що аналогічні оцінки справедливі для випадку $0 < \gamma,\ \gamma_1 < 1,\ p > 2$.

Метод доведення застосований в данній роботі не дозволяє одержати аналогічні оцінки для випадку $1<\gamma$, $\gamma_1<l/(l-2)$.

РОЗДІЛ III присвячений розв'язності квазилінійних еліптичних рівнянь з повільно зростаючимиимірними коефіцієнтами в шкалі соболевих просторів $W_1^{\,p}\ (R^l, d^l x)$, $p\geq 2$, $l\geq 3$.

За достатньо загальних припущень на структуру рівняння (0.1) встановлено основні результати роботи:

- а) доведена розв'язність таких рівнянь в шкалі просторів $W_1^{\,p}\ (R^l, d^l x)$, $p\geq 2$;
- б) досліджена гладкість розв'язків в залежності від диференціальних властивостей структури рівняння (0.1);
- в) введено гладку апроксімацію рівняння (0.1), доведено теореми про слабку, сильну збіжність наближених розв'язків рівняння (0.1) в $W_1^{\,p}\ (R^l, d^l x)$ до роз'язків даного рівняння;
- г) введено оператори $A : D(A) \to L^p$ ($A = - A^p\lambda\beta \restriction L^p$, $D(A) = \{ u \in W_1^{\,p}\ (R^l, d^l x) \,/\, A^p\lambda\beta\,(u) \in L^p\}$), які, як показано в роботі, являються генераторами нелінійних підгруп в L^p.

Основні обмеження на структуру рівняння за яких одержані вищевказані результати.

Функції $\bar{a}(x,y,z)$, $b(x,y,z) \leftarrow (x,y,z) \leftarrow R^l{}_1 \times R \times R^l$ задовольняють умовам:

1) $a_i\,(x,y,z)$, $i=1,\dots,l$, $b(x,y,z)$ - вимірні на $R^l \times R \times R^l$ скалярні відображення, неперервні по (y,z) для майже всіх $x \in R^l$;

2) $|\bar{a}(x,y,z)| \leq \mu_1{}^a(x)|z| + \mu_2{}^a(x)|y|^{\gamma} + \mu_3{}^a(x)$

$$|\bar{a}(x,y,z) - \bar{a}(x_1,y_1,z_1)| \leq \tilde{\mu}_1{}^a(x)|z - z_1| + \tilde{\mu}_2{}^a(x)|y - y_1| \times \begin{cases} 1, & 0 < \gamma \leq 1 \\ |\tilde{y}|^{\gamma-1}, & 1 < \gamma \leq l/(l-2) \end{cases}, \quad |\tilde{y}|^{\gamma-1} = |y|^{\gamma-1} - |y|^{\gamma-1};$$

$$|b(x,y,z)| \leq \mu_1{}^b(x)|z| + \mu_2{}^b(x)|y|^{\gamma_1} + \mu_3{}^b(x), \quad 0 \leq \gamma_1 \leq l/(l-2)$$

$$|b(x,y,z) - b(x_1,y_1,z_1)| \leq \tilde{\mu}_1{}^b(x)|z - z_1| + \tilde{\mu}_2{}^b(x)|y - y_1| \times \begin{cases} 1, & 0 < \gamma_1 \leq 1 \\ |\tilde{y}|^{\gamma-1}, & 1 < \gamma_1 \leq l/(l-2). \end{cases}$$

2') $|\bar{a}(x,y,z) - \bar{a}(x_1,y_1,z_1)| \leq \tilde{\mu}_1{}^a(x)|z-z_1| + \tilde{\mu}_2{}^a(x)|y-y_1|^{\gamma}$

$|b(x,y,z) - b(x_1,y_1,z_1)| \leq \tilde{\mu}_1{}^b(x)|z-z_1| + \tilde{\mu}_2{}^b(x)|y-y_1|^{\gamma}$, де

$\mu_3{}^a(x)$, $\mu_3{}^b(x) \in L^p$; $\mu_1{}^a(x)$, $\tilde{\mu}_1{}^a(x) \in L^\infty$; $\mu_2{}^a(x)$, $\mu_1{}^b(x)$, $\mu_2{}^b(x)$, $\tilde{\mu}_1{}^b(x), \tilde{\mu}_2{}^a(x) \in \Pi_k\beta(-\Delta)$ для $0 < \gamma, \gamma_1 < 1$, або в умовах 2') при $1 < \gamma, \gamma_1 < 1/(1-2)$;

3) $\xi_0 \bar{a}^0{}_0 \xi > \xi^2$ $\xi \in R^l$, $a^0(x,u,Du) \in L^\infty$ $u \in W_{1,0}{}^p(R^l, d^l x)$.

Умови 1), 2), 2'), 3) дозволяють визначити форму

$h^p\lambda(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle + \langle\bar{a}(x,u,Du),\nabla v\rangle + \langle b(x,u,Du),v\rangle$

$v \in W_{1,0}{}^{p'}(R^l,d^l x)$, $u \in D(h^p\lambda) =: \{u \in W_1{}^p / |h^p\lambda(u,v)| < \infty\}$, наслідками якої і являються вище вказані результати.

Будемо розрізнять випадки: 1) $\gamma = \gamma_1 = 1$; 2) $0 < \gamma, \gamma_1 < 1$; 3) $1 < \gamma, \gamma_1 < 1/(1-2)$.

Не обмежуючи загальності та уникаючи громіздких викладок, вважаємо в подальшому $b(x,u,Du) \equiv 0$.

Розділ III складається із трьох параграфів.

В $ 1 розлянуто випадки: 1) $\gamma=\gamma_1=1$, 2) $0 < \gamma,\gamma_1 < 1$ для $p=2$, $\mu_3{}^a(x) \equiv 0$.

Форма $h\lambda^2(u,V)$ при виконанні умов 1)-3) породжує оператор $A^2\lambda\beta: W_1{}^2 \to W_{-1}{}^2$, $\lambda > \lambda_0(\beta)$, $0<\beta<1$, обмежено діючий із $W_1{}^2$ в $W_{-1}{}^2$, хемінеперервний, коерцитивний та монотонний в L^2, тому. в цьому випадку, виконані всі умови абстрактної теореми Мінті-Браудера, тобто має місце аналог цієї теореми в нашому конкретному випадку - це теореми 3.1 та 3.2.

Розглянута гладка апроксимація рівняняння (0.1) і доведена збіжність (слабка, сильна) наближених розв'язків до розв'язків рівняння (0,1). Це теореми 3.3, 3.4.

При заміні умови 2) на 2') доведена теорема про розв'язність рівняння (0,1) $f \in W_{-1}{}^2$. Новим фактором тут являється умова "псевдомонотонності оператора $A^2\lambda\beta: W_1{}^2 \to W_{-1}{}^2$ ця теорема являється аналогом відомої теореми 1.2 із роботи Ю.А.Дубинського "Нелинейные параболические, элиптические уравнения". М.:ВИНИТИ. 1976.- С.5-130.

Випадок $0 < \gamma,\gamma_1 < 1/(1-2)$, $p=2$ нами тут не розглядається, оскільки оператор $A^2\lambda\beta: W_1{}^2 \to W_{-1}{}^2$ не являється коерцитивним.

В $2 виконана програма досліджень $1 для $p>2$. При виконанні умов 1)-3) показано, що форма $h\lambda^p(u,v)$ породжує оператори $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>0$, що мають властивості коерцитивності, хемінеперервності, аккретивності, "псевдоаккретивності" в L^p, тобто введені аналоги монотонних, "псевдомонотонних" операторів для $p>2$.

Для випадку $p>2$, $0 < \gamma,\gamma_1 < 1$ доведено теорему - аналог теореми Мінті-Браудера - це теореми 3.7, 3.9. В основі доведення лежить метод слабкокомпактних граничних переходів - його забезпечують властивості коерцитивністі, хемінеперервності оператора $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ $\lambda > \lambda_0(\beta, \beta_1, \gamma)$, $0 < \beta < 4/p^2$, аккретивності в L^p та метод апріорних оцінок, одержаних в теоремі 3.8 за додаткових умов 4), 5), оскільки сама властивість коерцитивності оператора $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ не гарантує апріорних оцінок

$\|U_n\|_{W_1{}^p} < C$ де C залежить від структури рівняння.

Для частинного випадку рівняння (0,1) $f \in L^q$, $q>l/2$, доведена теорема.

Теорема 3.5. Нехай функції $a_i(x,y,z)$, $i=1,\dots,l$, поряд з умовами 1)-3) задовольняють додатковим умовам:

4) $a^r(x,y,z) = \left(\dfrac{\delta a_i(x,y,z)}{\delta x_r}\right)$, $a^r(x,y,z) = \left(\dfrac{\delta a_i(x,y,z)}{\delta y}\right)$

неперервні по (y,z) для майже всіх $x \in R^l$;

5) $|a^r(x,u,Du)| \leqslant \mu^r(x)|\bar{\nabla} u|$, $|a^u(x,u,Du)| \leqslant \mu^u(x)$, де $0 < \mu^r(x)$, $\mu^u(x)$: 1) обмежені, 2) належать L^4, 3) представлені у вигляді суми $\mu^r(x) = \mu_1{}^r(x) + \mu_2{}^r(x)$, $\mu^u(x) = \mu_1{}^u(x) + \mu_2{}^u(x)$, де $\mu_1{}^r(x)$, $\mu_1{}^u(x) \in L^\infty$; $\mu_2{}^r(x)$, $\mu_2{}^u(x) \in L^4$. Тоді розв'язок належить $L^\infty \cap W_1{}^4 \cap W_2{}^2$.

В основі доведення лежить метод слабкокомпактних граничних переходів, апріорних оцінок, нерівності Гальярдо-Ніренберга

$$\|\bar{\nabla} u\|^2_{L^4} \leqslant \varepsilon\|\nabla_{xx}{}^2 u\|_2^2 + C(\varepsilon)\|u\|^2_\infty .$$

Для випадку $0 < \gamma < 1$, $p>2$, де умова 2) замінена умовою 2') форма $h\lambda^p(u,V)$, визначена рівністю (3.1), як це випливає із лем 3.5', 3.6', породжує обмежений оператор $A^p\lambda: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(\gamma,p,l,\varepsilon)$, реалізуючий коерцитивне, хемінеперервне відображення. Але, як це випливає із леми 3,7', цей оператор являється "псевдоаккретивним" в L^p. Отже, справедлива теорема-аналог теореми 1.2 Ю.А.Дубинського із вказаної вище роботи.

Теорема 3.10. Якщо функції $a_i(x,y,z)$, $i=1,\dots,l$ задовольняють умовам 1), 2'), 3)-5), то рівняння (0,1) розвязне в $W_1{}^p$, хоча і неоднозначно $f \in W_{-1}{}^p$. Доведення цілком аналогічне доведенню теорем 3.6, 3.7, 3.9.

Випадок $1 < \gamma \leqslant l/(l-2)$, $p>2$ аналогічний до випадку $p=2$ і тут не досліджується. Нехай $0 < \gamma < 1$, $p>2$. Нехай виконані умови 1)-5), тоді оператор $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(\beta, p, l, \varepsilon) > 0$, $0<\beta<4/p^2$, обмежене, хемінеперервне в L^p відображення. Як наслідок теорем 3.3, 3.7-3.9 маємо, - оператор $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ - биєктивне відображення. Розглянемо звуження оператора $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ на L^p:

$$\tilde{A}^p\lambda\beta = A^p\lambda\beta \restriction L^p, D(\tilde{A}^p\lambda\beta)) =: \{ u \; W_1{}^p | A^p\lambda\beta(u) \in L^p \}.$$

Оскільки вкладання $W_1{}^p \quad L^p \quad W_{-1}{}^p$ -неперервне та щільне, а оператор $\tilde{A}^p\lambda\beta: \; W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$ - бієктивне відображення, то, отже, оператор $\tilde{A}^p\lambda\beta: D(\tilde{A}^p\lambda\beta) \to L^p$ - теж бієктивне відображення.

§3 присвячений дослідженню гладкості розв'язків рівняння (0,1) в залежності від диференціальних властивостей структури цього рівняння.

Теорема 3.11. Якщо функції $a_i(x, y, z)$, $i=1,\dots,l$, задовольняють умовам 1),2),2'),3)-5), причому $\mu_2{}^a(x)$, $\mu_1{}^{ar}(x)$, $\mu_2{}^{ar}(x) \in L^2 \cap L^p$ або $L^2 \cap L^{p'}$, то рівняння (0,1) розв'язне в $W_1{}^p$, його розв'язки обмежені для $f \in L^q$, $q>l/2$ і належать

$$L^\infty_\infty \cap W_1{}^{p/2}(B_R, d^l x) \cap W_1{}^p, \; R>0, \; 2<p<3,$$

$$L^\infty \cap W_1{}^{p/2} \cap W_1{}^p, \; 3<p<4,$$

$$L^\infty \cap W_1{}^2 \cap W_1{}^p \quad , \; p>4$$

Доведення цілком аналогічне доведенню теорем 3.3, 3.5-3.9 і основане на апріорних оцінках наближених розв'язків одержаних для рівняння (3,6) методами доведення теореми 3.2 із розділу II.

Випадок $b(x, y, z) = 0$ аналогічний розглянутому вище, оскільки умови 1),2),2')-5) гарантують основні властивості оператора $A^p\lambda\beta$: $W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(\beta, \gamma, p, l, \varepsilon)$, тобто властивості коерцитивності, хемінеперервності, аккретивності або "псевдоаккретивності" в L^p, умови 4), 5) забезпечують рівномірні апріорні оцінки наближених розв'язків рівняння (3,6), які в силу попередніх міркувань слабко збігаються до розв'язків рівняння (0,1).

§4 присвячений розв'язності рівняння (0,1')

$$\lambda u + \sum_\alpha (-1)^\alpha D^\alpha A\alpha(x, u, Du, \dots, D^m u) = f, \; \lambda>0 \text{ в } W_m{}^2(R^l, d^l x).$$

За обмежень на структуру рівняння, аналогічних, що і для рівняння (0,1), за допомогою форми

$$h(u, v) = \lambda<u, v> + \sum_\alpha <A\alpha(x, u, Du, \dots, D^m u) \, D^\alpha v>, \; v \in W_m{}^{2,0}(R^l, d^l x)$$

доведені теореми 1., 2.- аналоги теорем Мінті-Браудера та Дубинського.

РОЗДІЛ IV присвячений побудові нелінійної півгрупи стиску в L^p, $p>2$.

В цьому розділі вивчаються нелінійні оператори породжені формою $h\lambda^p(u,V)$, введеною в розділі III для квазілінійних рівнянь (0,1) для випадку, коли виконуються умови теорем 3.3, 3.7-3.9.

Показано, що оператори $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $p>2$, $\lambda>\lambda_0(\beta,\gamma,p,l,\varepsilon)$, $0<\beta<4/p^2$ або $0<\beta<1$, $0<\gamma,\gamma_1<1$, точніше їх звуження на L^p, являються, генераторами нелінійних півгруп в L^p.

А саме, справедлива наступна

Теорема 4.1. Якщо структура рівняння (0,1) задовольняє умовам теорем 3.3, 3.7-3.9 розділу III, то оператор

A: $D(A)\to L^p(A=-\tilde{A}^p\lambda\beta$, $\tilde{A}^p\lambda\beta=A^p\lambda\beta \mid L^p$, $D(A)=D(\tilde{A}^p\lambda\beta)$ - генератор півгрупи стиску, тобто $U_0 \in D(A)$ існує єдиний розв'зок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = A\,(U(t)), & t>0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

Доведенню теореми 4.1 передують леми 4.1-4.4, аналоги лем 4.1-4.4, наведені у вищезгаданій роботі Ю.А.Дубинського.

Доведення цієї теореми, лем 4.1-4.3 побудовано на застосуванні властивостей оператора $A^p\lambda\beta: W_1{}^p \to W_{-1}{}^p$, $\lambda>\lambda_0(\beta,\gamma,p,l,\varepsilon)$, $p>2$ і схематично близьке доведенню лем 4.1-4.3.

При доведенні леми 4.4 автору необхідно було подолати декілька перепонів, що не мали місце для $p=2$.

Доведена теорема, на відміну від лінійного випадку, не допускає безпосереднього обернення. Проте, це все ж має місце для багатозначного оператора A(u).

Теорема 4.2. Нехай A: $D(A)\to L^p$ - дисипативний багатозначний оператор, причому $R(I-A) = L^p$. Тоді $U_0 \in D(A)$ існує єдиний розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} \in A\,(U(t)), & t>0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.1 і встановлюється за тією ж схемою, що і в випадку однозначного оператора $A: D(A) \to L^p$. Таким чином, в розділі IV наведено нелінійний аналог теореми Хілле-Іосида-Філіпса для конкретних диференціальних операторів для банахового простору L^p, $p>2$.

В Доповнені "Выводи" в пункті 1^0 автор звертає увагу на те, що квазілінійні еліптичні рівняння високого порядку при умові їх належності до класу рівнянь з повільно зростаючими коефіцієнтами, звичайно, при виконанні умов типу 1)-5) розділу III, досліджуються тими ж методами, що і рівняння (0.1). Для p=2 вони повністю співпадають з результатами §1 розділу III.

Для $p>2$ форма $h\lambda^p(u,V)$ породжує оператори $A^p\lambda\beta: W_1^{\,p} \to W_{-1}^{\,p}$, $\lambda>\lambda_0>0$, обмежено діючі, хемінеперервні, псевдоаккретивні в L^p.

В пункті 2^0 наведено клас рівнянь

$\lambda u - a(x,u)_0\ d^2u + b(x,u,Du) = f,\ \lambda>0,$

розв'язність якого в просторі $W_1^{\,p}$ зводиться до розв'язності рівняння (0.1), якщо функції $a(x,u)$, $b(x,u,Du)$ задовольняють умовам 1)- 5).

В пункті 3^0 при виконанні умов теореми 3.11 для рівняння (0.1) помічено, що локально його розв'язки належать

$L^\infty \cap W_2^{2+\varepsilon}(B_R, d^1x) \cap W_1^{\,p}$, $p>4$. Цей результат випливає із теореми 3.2 розділу II.

В пункті 4^0 помічено, що для випадку $1 < \gamma, \gamma_1 < 1/(1-2)$ апріорні оцінки узагальнених розв'язків рівняння (3.6) не слідують із методів дослідження рівнянь (0.1), розглянутих в роботі.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Кухарчук Н.М. Гладкость обобщеных решений квазилинейных эллиптических уравнений с непрырывными коэффициентами// Тр. 5-й Республ. конф. по нелинейн. задачам мат. физики, Донецк, 9-16 сент. 1985 г. : Тез. докл. - Донецк, 1985.

2. Кухарчук Н.М. О принадлежности обобщеных решений квазилинейных эллиптических уравнений в дивергентной форме с разрывными коэффициентами пространству $L^\infty(R^1) \cap W_1^{\,p}(R^1) \cap W_2^{\,2}(R^1)$. - Киев, 1986 г. -48 с. (Препр./ АН УССР. Ин-и математики; (36.13).

3. Кухарчук Н.М. О гладкости обобщенных решений нелинейных равномерных эллиптических уравнений. Киев, 1986.- 12 с. Деп. в УкрНИИНТИ 03.01.86, N 156.

4. Кухарчук Н.М. Априорные оценки обобщенных производных реше-

ний квазилинейных элиптических уравнений второго порядка. -Киев, 1987. - 60 с. - (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.61)

5. Кухарчук Н.М. Разрешимость квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми медленно растущими коэффициентами в пространствах $W_1^p(R^l, d^l x)$, $p>2$. -Киев, 1988. - 52 с. -(Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 88.61).

6. Кухарчук Н.М., Коваленко В.Ф., Семёнов Ю.А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором $-1/2\,\Delta + a_0\,\nabla$. - Киев, 1985. - 21 с. -Деп. в УкрНИИНТИ, N 2380.

7. Кухарчук Н.М. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в пространствах $L^p(R^l, d^l x)$ // 6-ая Республ. конф. по нелинейн. задачам мат. физики, Донецк, 10-15 сент. 1987г.: Тез. докл. -Донецк,1987.- с.80.

8. Кухарчук Н.М. Априорные оценки обобщенных производных решений линейных эллиптических уравнений и их систем второго порядка// Вычисл. и прикл. математика. -1988. -Вып. 66. -с. 27-33.

9. Кухарчук Н.М. Априорные оценки обобщенных производных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Там же. -1989. - Вып. 68. - с. 37-48.

10. Кухарчук Н.М. Квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка и нелинейные полугруппы сжатий в L^p, $p>2$ //. Применение методов функционального анализа в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. -с. 35- 43.

11. Кухарчук Н.М. О разрешимости, гладкости решений квазилинейных эллипических уравнений с измеримыми медленно растущими коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. - N2 - с. 12-14.

12. Кухарчук Н.М. Нелинейные полугруппы сжатий в L^p // Там же -N 3. -с. 9-12.

13. Кухарчук Н.М. О разрешимоси квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка // Тези міжнародної конференції. присвячаної пам'яті академіка М.П. Кравчука, Київ. -1992. - с.61.

14. Кухарчук Н.М. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка // Доклады АН Украины. -Сер. А. 1993 N 6. -с. 17-22.

15. Кухарчук М.М. Про розв'язаність рівняння $\lambda u - \operatorname{div} \bar{a}\,(x, u, Du) = 0$ в $W^p{}_1\ (R^l, d^l x)$, $p>2$, $l>3$ // Тези міжнародної конференції, присвяченої пам'яті М.П. Кравчука, Київ.-1995.

16. Kuharchuk N.M. NON-LINEAR SEMI-GROUPS ASSOCI-TED WITH ONE

ELIPTICEQUATION // Тези міжнародної конференції по нелінійним диф. рівнянням, Київ. - 1995. - с. 63.

Кухарчук М.М. Квазіленійні еліптичні рівняння та нелінійні півгрупи стиску. Дисертацією являється рукопис, що становить 207 ст. машинописного тексту.

Дисертація на здобуття вченого ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 - диференціальні рівняння. Інститут математики Національної Академії Наук України. - Київ: 1996.

Захищається рукопис, котрий присв'ячений дослідженню слабкої розв'язанності квазілінійних еліптичних рівнянь, недостатньо вивчених в літературі, за мінімальних обмежень на функції, що утворюють ці рівняння в просторах Соболева $W^p{}_1(R^l, d^l x)$, $p>2$, $l>3$, гладкості розв'язків в залежності від диференціальних властивостей структури цих рівнянь, а також побудови нелінійної півгрупи стиску в L^p, $p>2$, генераторами яких являються оператори, побудовані за лівою частиною цих рівнянь.

Koukharchiouk N.M. Quasilinear ellyptic equations and non-linear semigroups of compresions. The thesis is represented by handwriting of 207 pages of printed text. The thesis for a doctor's degree in physics and mathematics was made for a profession 01.01.02 - differential equations. The Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Science.- Kiev: 1996.

The thesis, which is depended, concerns the investigation of weak solvability, unambiguos solvability of quasilinear ellyptic equations of divergent form. This problem had been never studied completely under the minimal limitations on functions, which form the equations in Sobolev spaces $W^p{}_1(R^l, d^l x)$, $p>2$, $l>3$, solution smoothness depending on differential properties of functions which form the equations, and also the construction of non-linear semigroups of compressions in L^p, $p>2$. The generators of these compressions are the operators, which were constructed utilizing the left part of equations.

Ключові слова: Квазілінійні, диференціальні, хемінеперервні, монотонні, аккрективні, коерцитивні, апріорні оцінки, узагальнені функції.

Підписано до друку 02.04.1996. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,63. Ум. фарбо-відб. 1,63. Обл.-вид. арк. 1,2. Тираж 100 пр. Зам. 16. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.