

ПАВЛЮЧЕНКО Ольга Гаврилівна

УДК 517.977

ЗАДАЧІ МІНІМАКСНОГО ОЦІНЮВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ
РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.05.04 - системний аналіз та
теорія оптимальних рішень

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

АВ 34.680

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі моделювання складних систем Київського університету імені Тараса Шевченка.

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор НАКОНЕЧНИЙ Олександр Григорович,
доктор фізико-математичних наук ПОДЛИПЕНКО Юрій Костянтинович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, КНОПОВ Павло Соломонович,
кандидат фізико-математичних наук МАТВІЄНКО Володимир Тихонович.

Провідна установа: Інститут математики НАН України.

Захист відбудеться "30" травня 1996 р.
о 14 год. ___ хв. в ауд. 40 на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.20 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою:

252127 м.Київ, проспект Академіка Глушкова, 6,
факультет кібернетики.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Київського університету за адресою:

252033 м.Київ, вул.Володимирська, 58.

Автореферат розіслано "___" _____ 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
канд. фіз.-мат.наук

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України
[Signature]
Зінько П.М.

ЛНБ України ім.В.Стефаника
00760301 (Н)

Актуальність тем. Відомо, що задачі оптимальної обробки результатів експериментів в умовах неповної інформації є одними з найважливіших у сучасній теорії керування. Вони використовуються при розробці систем автоматизованої обробки вимірювань, при інтерпретації результатів під-роакустичних, геофізичних, геологічних спостережень.

Як правило, в експериментах вимірюється не сама величина ϕ , яка описує дане явище, а деякий її прояв вигляду $y = C\phi + f$, де C - оператор, що визначає спосіб вимірювання, а f - похибка вимірювання.

Оскільки на практиці точні значення похибки f невідомі, то по даному y , взагалі кажучи, неможливо однозначно визначити шукану величину ϕ . Тому природньо ставити задачу про знаходження такої величини $\hat{\phi}$ (оптимальної оцінки), яка в деякому розумінні найкращим способом наближала б шукану величину ϕ з урахуванням наявної інформації про похибку вимірювання.

Мінімаксий підхід до розв'язку таких задач застосовувався в роботах Н.Н.Красовського, А.Б.Куржанського, Б.М.Бублика, М.Ф.Кириченка, О.Г.Наконечного, Б.М.Пшеничного, Ф.Л.Черноуська та інших.

В 1979-1985 рр. в циклі статей О.Г.Наконечного була побудована теорія мінімаксного оцінювання для варіаційних рівнянь в гільбертових просторах i , зокрема, для основних типів рівнянь з частинними похідними варіаційного типу. А саме, при умові, що ϕ є розв'язком абстрактних варіаційних рівнянь, C - лінійний оператор, що діє у відповідних гільбертових просторах, i . відомі множини, яким належать

праві частини рівнянь та похибки вимірювань, знайдено оптимальні оцінки лінійних функціоналів від величин φ , а також наближені оптимальні оцінки цих функціоналів.

Але, питання, пов'язані з одержанням мінімаксних прогностичних оцінок функціоналів від розв'язків еволюційних рівнянь, а також з теорією мінімаксного оцінювання в задачах дифракції, вивчені недостатньо повно. В цьому напрямку існують лише окремі результати О.Г.Наконечного, Ю.К.Подлипенка.

Названі задачі мають важливе прикладне значення в екології, акустиці океану, геофізиці, медицині і багатьох інших областях, тому їх теоретичний аналіз є актуальним.

Мета роботи. Метою роботи є теоретична розробка методів мінімаксного прогнозування і оцінювання функціоналів від розв'язків крайових задач для параболічних і гіперболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Методика досліджень. В роботі застосовані методи загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії оптимального керування, елементи теорії випадкових процесів.

Наукова новизна. В процесі досліджень отримані наступні нові результати: доведені теореми про знаходження оптимальних прогностичних оцінок функціоналів від розв'язків рівнянь гіперболічного і параболічного типів та теореми, в яких отримані похибки прогнозу, для крайових задач дифракції в плоскопаралельному хвильоводі знайдені мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків цих задач та похибки оцінювання; в умовах неповної інформації отримані мінімаксні середньоквадратичні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач без початкових умов для хвильового рівняння; встановлено, що знаходження згаданих оцінок функціоналів зводиться до розв'язку деяких систем інтегро-диференціальних рівнянь.

Практична та теоретична цінність.

Результати дисертаційної роботи вносять суттєвий вклад в теорію оцінювання розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними в умовах невизначеності. Розроблені методи прогнозування розв'язків можуть бути ефективно використані при обробці результатів експериментів в екології, акустиці, електродинаміці, гідромеханіці і т.п.

Апробація работ. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (м.Чернівці, 1994 р.), на Міжнародній конференції Second International Conference on Difference Equations and Applications (Угорщина, м.Веспрем, 1995 р.), на Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" (м.Київ, 1995 р.) та на наукових семінарах кафедри моделювання складних систем факультету кібернетики Київського університету.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 7 наукових праць.

Структура і обсяг работ. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновку і списку використаної літератури з 111 найменувань. Обсяг роботи складає 110 сторінок машинописного тексту.

З М І С Т Р О Б О Т И

У вступі приводиться короткий огляд літератури з питань мінімаксного оцінювання в умовах неповної інформації, обґрунтовано актуальність теми дисертації та викладено основний зміст отриманих результатів.

В роботі використовуємо такі позначення:

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - просторова змінна, x змінюється у відкритій множині $\Omega \subset R^n$ з границею Γ ; t - часова змінна;

$Q_T = \Omega \times (t_0, T)$ - відкритий циліндр;

$H^1(\Omega)$ - простір Соболева порядку 1 в області Ω ;

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \varphi = 0 \text{ на } \partial\Omega \right\};$$

$H^{-1}(\Omega)$ - простір, спряжений до $H_0^1(\Omega)$;

(\cdot, \cdot) - відношення двоїстості на $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$;

$L^\infty(Q_T)$ - простір вимірних в циліндрі Q_T функцій і обмежених там, крім, можливо, множини міри нуль;

$L^2(t_0, T; H_0^1(\Omega))$ - простір функцій, визначених і вимірних по відношенню до міри Лебега dt на інтервалі (t_0, T) зі значеннями в гільбертовому просторі $H_0^1(\Omega)$ і таких, що

$$\int_{t_0}^{T_0} \|f(\cdot; t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt < \infty$$

(аналогічно визначається простір $L^2(t_0, T; H^{-1}(\Omega))$)

$C^0([t_0, T]; L^2(\Omega))$ - простір неперервних на проміжку $[t_0, T]$ функцій, що приймають значення в $L^2(\Omega)$;

$L^2(G)$ - простір функцій, сумованих з квадратом в області G .

$A(t)$ - диференціальний оператор, що визначається рівністю

$$A(t)\varphi(x, t) = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x_j}) ,$$

коефіцієнти якого $a_{ij}(x, t)$ задовольняють умовам

$$a_{ij}(x, t) \in L^\infty(Q_{T_1}),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R}$$

майже скрізь в Q_{T_1} (так що $A(t)$ - лінійний неперервний оператор, який відображає $L^2(t_0, T; H_0^1(\Omega))$ в $L^2(t_0, T; H^{-1}(\Omega))$;

$A^*(t)$ -оператор, спряжений до $A(t)$ вигляду

$$A^*(t)\psi = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ji}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_j})$$

У першому розділі розглядаються задачі знаходження прогнозних оцінок функціоналів від розв'язків рівнянь параболічного типу.

Нехай стан системи $\varphi(x, t)$ визначається як розв'язок граничної задачі Коші-Діріхле (1)-(3)

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + A(t)\varphi(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_{T_1} \quad (1)$$

$$\varphi(x, t_0) = \xi_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2)$$

$$\varphi(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (t_0, T_1), \quad (3)$$

де f і ξ_0 - дані елементи просторів $L^2(Q_{T_1})$ і $L^2(\Omega)$ відповідно.

Відомо, що існує єдина функція

$$\varphi \in L^2(t_0, T_1; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([t_0, T_1]; L^2(\Omega)),$$

яка задовольняє рівняння (1) в розумінні розподілів в Q_{T_1} і

початкову умову (2) в $L^2(\Omega)$. Гранична умова (3) означає, що

$$\varphi \in L^2(t_0, T_1; H_0^1(\Omega)).$$

Припустимо, що на інтервалі $[t_0, T]$, $T < T_1$, спостерігаються реалізації функцій вигляду

$$y_k(t) = \int_{\Omega} G_k(x, t) \varphi(x, t) dx + \eta_k(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad T < T_1, \quad k = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де $G_k \in L^2(Q_T)$ - задані функції, $\eta_k(t)$ реалізації неперервних в середньоквадратичному попарно некорельованих випадкових процесів (для яких ми також будемо далі використовувати ті ж самі позначення).

Вважатимемо, що функції $f(x, t)$, $\xi_0(x)$ та другі моменти випадкових процесів не визначені точно, а лише відомо, що

$$\int_{t_0}^{T_1} \int_{\Omega} f^2(x, t) q^2(x, t) dx dt + \int_{\Omega} (\xi_0(x) - a_0(x))^2 r_0^2(x) dx \leq I, \quad (5)$$

$$M\eta_k(t) = 0, \quad \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^T M\eta_k^2(t) \eta_k^2(t) dt \leq I, \quad (6)$$

де $a_0 \in L^2(\Omega)$, $q(x, t)$, $r_0(x)$ і $\eta_k(t)$, $k = \overline{1, m}$ - задані функції, неперервні на $\overline{Q_T}$, $\overline{\Omega}$ і $[t_0, T]$ відповідно, і які не перетворюються там в нуль. Позначимо через G_0 - множину функцій $\tilde{f} = (f, \xi_0)$, що задовольняють умову (5) і через G_1 множину випадкових функцій $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_m(t))$, які задовольняють умову (6).

Задача прогнозу полягає в тому, щоб за спостереженнями на інтервалі $[t_0, T]$, вигляду (4) за станом системи, яка описується параболічним рівнянням (1) за умов (2), (3) оцінити в довільний момент часу $T_1 > T$ лінійний функціонал

$$I(\varphi(\cdot, T_1)) := (\varphi(\cdot, T_1), l_0(\cdot)) = \int_{\Omega} l_0(x) \varphi(x, T_1) dx, \quad l_0 \in L^2(\Omega), \quad (7)$$

в класі лінійних оцінок вигляду

$$(l, \hat{\varphi}) = \int \sum_{k=1}^m u_k(t) y_k(t) dt + C, \quad (8)$$

де $u_k(t) \in L^2(t_0, T)$, $C \in R^1$.

Оцінку $(\hat{\ell}, \hat{\varphi})$, яка визначається як розв'язок екстремальної задачі

$$\sup_{\tilde{f} \in G, \eta \in G_1} M \left| l(\varphi(\cdot, T_1)) - (l, \hat{\varphi}) \right|^2 \longrightarrow \inf_{u_1, \dots, u_m \in L^2(t_0, T), C \in R} \quad (9)$$

назвемо оптимальною прогнозною оцінкою функціоналу $l(\varphi(\cdot, T_1))$ (7), а величину

$$\sigma := \left\{ \sup_{\tilde{f} \in G, \eta \in G_1} M \left| l(\varphi(\cdot, T_1)) - (l, \hat{\varphi}) \right|^2 \right\}^{1/2} \quad (10)$$

похибкою прогнозу.

Введемо функцію $z_1(x, t)$ як єдиний розв'язок задачі Коші-Діріхле (11) - (13):

$$-\frac{\partial z_1(x, t)}{\partial t} + A^*(t) z_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (T, T_1), \quad (11)$$

$$z_1 \in L^2(T, T_1; H_0^1(\Omega)), \quad (12)$$

$$z_1(x, T_1) = \ell_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (13)$$

Теорема 1. При сформульованих вище припущеннях оптимальна оцінка прогнозу $(\hat{\ell}, \hat{\varphi})$ функціоналу (7) має вигляд

$$(l, \varphi) = \int \sum_{k=1}^m \hat{u}_k(t) y_k(t) dx dt + \hat{C}, \quad (14)$$

$$\text{де } \hat{u}_k(t) = r_k^2(t) \int_{\Omega} p(x, t) G_k(x, t) dx, \quad k = \overline{1, m}, \quad (15)$$

$$\hat{C} := (z_2(\cdot, t_0), a_0(\cdot)), \quad (16)$$

а функції $z_2(x, t)$ і $p(x, t)$ визначаються як єдиний розв'язок наступної задачі (17) - (22).

$$-\frac{\partial z_2(x, t)}{\partial t} + A^*(t)z_2(x, t) = -\sum_{k=1}^m r_k^2(t) G_k(x, t) \int_{\Omega} p(\xi, t) G_k(\xi, t) d\xi, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (17)$$

$$z_2(x, T) = z_1(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (18)$$

$$z_2(x, t) \in L^2(t_0, T; H_0^1(Q)) \quad (19)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + A(t)p(x, t) = q^{-2}(x, t)z_2(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (20)$$

$$p(x, t_0) = r_0^{-2}(x)z_2(x, t_0), \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

$$p \in L^2(t_0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (22)$$

Інше зображення для оптимальної прогнозу оцінки знайдено в наступній теоремі.

Теорема 2. Оптимальна оцінка прогнозу функціоналу (7) має вигляд

$$(l, \hat{\varphi}) = l(\hat{\varphi}(\cdot, T_1)) = \int_{\Omega} z_1(x, T) \hat{\varphi}(x, T) dx = (z_1(\cdot, T), \hat{\varphi}(\cdot, T)), \quad (23)$$

де функція $\hat{\varphi}$ є єдиним розв'язком задачі (24) - (26):

$$\frac{\partial \hat{\varphi}(x, t)}{\partial t} + A(t)\hat{\varphi}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (T, T_1), \quad (24)$$

$$\hat{\hat{\phi}}(x, T) = \hat{\phi}(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

$$\hat{\phi} \in L^2(T, T_1; H_0^1(\Omega)) \quad (26)$$

а функції $\hat{\phi}$ і \hat{p} є єдиним розв'язком задачі (27) - (32):

$$-\frac{\partial \hat{p}(x, t)}{\partial t} + A^-(t)\hat{p}(x, t) = \sum_{k=1}^m \tau_k^2(t)G_k(x, t) \left[y_k(t) - \int_{\Omega} \hat{\phi}(\xi, t)G_k(\xi, t)d\xi \right], \quad (27)$$

$$(x, t) \in Q_T,$$

$$\hat{p}(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (28)$$

$$\hat{p} \in L^2(t_0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (29)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}(x, t)}{\partial t} + A(t)\hat{\phi}(x, t) = q^{-2}(x, t)\hat{p}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (30)$$

$$\hat{\phi}(x, t_0) = \tau_0^{-2}(x)\hat{p}(x, t_0) + a_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (31)$$

$$\hat{\phi} \in L^2(t_0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (32)$$

Теорема 3. Похибку прогнозу σ можна подати у вигляді

$$\sigma = \left[l(\hat{\hat{p}}(\cdot, T_1)) \right]^{\frac{1}{2}},$$

де функція $\hat{\hat{p}}(x, t)$ визначається як єдиний розв'язок наступної задачі

$$\frac{\partial \hat{\hat{p}}(x, t)}{\partial t} + A(t)\hat{\hat{p}}(x, t) = q^{-2}(x, t)z_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (T, T_1), \quad (33)$$

$$\hat{\hat{p}}(x, T) = p(x, T), \quad x \in \Omega, \quad (34)$$

$$\hat{\hat{p}} \in L^2(T, T_1; H_0^1(\Omega)). \quad (35)$$

Зауваження: 1. Одержані результати розповсюджуються на задачу Коші-Неймана, а також на початково-крайову задачу зі змішаними крайовими умовами.

2. Використовуючи функції Гріна для операторів $A(t)$ і $A^*(t)$ задачі (17)-(22) і (27)-(32) легко зводяться до відповідних систем інтегральних рівнянь.

3. Розглядуваний в цьому параграфі метод може бути застосований для моделювання процесу розповсюдження домішок в атмосфері.

У другому розділі за спостереженнями на скінченному інтервалі часу за станом систем, що описуються початково-крайовими задачами для рівнянь гіперболічного типу, одержані прогностні оцінки для функціоналів від розв'язків цих задач у довільний момент часу в майбутньому.

Нехай у підобласті Ω_1 обмеженої області $\Omega \subset R^n$ з границею Γ спостерігається функція вигляду

$$y(x, t) = \int_{\Omega_2} R_k(x, \xi) \varphi(\xi, t) d\xi + \eta_k(x, t), \quad x \in \Omega_1, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (36)$$

де Ω_2 —підобласть Ω , $\varphi(x, t)$ —розв'язок початково-крайової задачі, (37)-(40):

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} + A(t)\varphi(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_{T_1} = \Omega \times (t_0, T_1), \quad (37)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, t_0)}{\partial t} = \xi_1(x), \quad \varphi(x, t_0) = \xi_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (38)$$

$$\varphi \in H^1(Q_{T_1}), \quad \xi_0 \in H_0^1(\Omega), \quad \xi_1 \in L^2(\Omega), \quad (39)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (t_0, T_1), \quad (40)$$

$f \in L^2(Q_{T_1})$, $R \in L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\eta(x, t)$ —випіркова функція неперервно-го в середньоквадратичному випадкового поля, для якого ми далі будемо використовувати те ж саме позначення. Вважатимемо

також, що диференціальний оператор $A(t)$ задається формулою на стор. 4 і задовольняє такі умови:

$$a_{ij}(x, t) \in L^\infty(\Omega)$$

при фіксованому $t \in [t_0, T]$, $a_{ij}(x, t) \in C^1([t_0, T_1])$,

при фіксованому $x \in \Omega$, $a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t)$, $\forall i, j$;

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2), \quad \alpha > 0, \quad \xi_i \in \mathbb{R} ;$$

і крім того, будемо вважати, що функції $f(x, t)$, $\xi_0(x)$, $\xi_1(x)$ та другий момент $M\eta^2(x, t)$ випадкового поля не визначені точно, а відомо лише, що

$$\int_{t_0}^{T_1} \int_{\Omega} f^2(x, t) q^2(x, t) dx dt + \int_{\Omega} (\xi_0(x) - a_0(x))^2 r_0^2(x) dx + \int_{\Omega} (\xi_1(x) - a_1(x))^2 r_1^2(x) dx \leq 1 \quad (41)$$

$$M\eta(x, t) = 0, \quad \int_{t_0}^T \int_{\Omega} r^2(x, t) M\eta^2(x, t) dx dt \leq 1 \quad (42)$$

де $a_0 \in H_0^1(\Omega)$, $a_1 \in L^2(\Omega)$, а $q(x, t)$, $r(x, t)$, $\eta_k(x)$ ($k=0, 1$) — задані, неперервні відповідно на $\overline{Q_{T_1}}$, $\overline{\Omega_1} \times [t_0, T_1]$ і $\overline{\Omega}$ функції, які не перетворюються в нуль.

Множину функцій $\tilde{f} = (f, \xi_0, \xi_1)$, що задовольняють умову (41), позначимо через G_0 , а множину випадкових функцій $\eta(x, t)$, які задовольняють умовам (42), позначимо через G_1 .

Сформулюємо тепер задачу прогнозу. Вона полягає в тому, що за спостереженнями (36) за системою, яка описується гіперболічним рівнянням (37) за умов (38)–(40) в будь-який момент часу $T_1 > T$ оцінити лінійний функціонал

$$l(\varphi(\cdot, T_1)) = (\varphi(\cdot, T_1), l_1(\cdot)) + \left(\frac{\partial \varphi(\cdot, T_1)}{\partial t}, l_2(\cdot) \right), \quad (43)$$

$$(l_1 \in L^2(\Omega), l_2 \in H_0^1(\Omega))$$

в класі лінійних оцінок вигляду

$$(\hat{l}, \varphi) = \int_{t_0}^T \int_{\Omega} u(x, t) y(x, t) dx dt + C, \quad (44)$$

$$\text{де } u \in L^2(\Omega, \times (t_0, T_1)), C \in \mathbb{R}^1$$

Оцінку (\hat{l}, φ) , яка визначається з умови

$$\sup_{\tilde{f} \in G, \eta \in G} M \left| l(\varphi(\cdot, T_1)) - (\hat{l}, \varphi) \right|^2 \longrightarrow \inf_{u \in L^2(\Omega, \times (t_0, T_1)), C \in \mathbb{R}^1} \quad (45)$$

назвемо оптимальною прогнозною оцінкою функціоналу $l(\varphi(\cdot, T_1))$ а величину

$$\sigma := \left\{ \sup_{u \in L^2(\Omega, \times (t_0, T_1)), C \in \mathbb{R}^1} M \left| l(\varphi(\cdot, T_1)) - (\hat{l}, \varphi) \right|^2 \right\}^{1/2} \quad (46)$$

назвемо похибкою прогнозу.

Введемо функцію $z_1(x, t)$ як єдиний розв'язок наступної початково-граничної задачі:

$$\frac{\partial^2 z_1(x, t)}{\partial t^2} + A(t)z_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (T, T_1),$$

$$z_2 \in H^1(\Omega \times (T, T_1)),$$

$$z_1(x, T_1) = \ell_2(x), \quad \partial z_1(x, T_1) / \partial t = -\ell_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$z_1(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (T, T_1),$$

Теорема 2.1. При сформульованих вище припущеннях опти-

мальна оцінка прогнозу (\hat{l}, φ) функціоналу (43) має вигляд

$$(l, \hat{\varphi}) = \int_{t_0}^T \int_{\Omega_1} \hat{u}(x, t) y(x, t) dx dt + \hat{C} \quad (47)$$

де

$$\hat{u}(x, t) = r^2(x, t) \int_{\Omega_1} R(x, \eta) p(\eta, t) d\eta, \quad (48)$$

$$\hat{C} = - \int_{\Omega} a_0(x) \frac{\partial z_2(x, t_0)}{\partial t} dx + \int_{\Omega} a_1(x) z_2(x, t_0) dx,$$

а функції $z_2(x, t)$ і $p(x, t)$ є єдиним розв'язком такої системи інтегродиференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2 z_2(x, t)}{\partial t^2} + A(t)z_2(x, t) = -\chi_{\Omega_1}(x) \int_{\Omega_1} R(y, x) r^2(y, t) \int_{\Omega_1} R(y, \eta) p(\eta, t) d\eta dy, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (49)$$

$$z_2 \in H^1(Q_T), \quad (50)$$

$$z_2(x, T) = z_1(x, T) \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{\partial z_2(x, T)}{\partial t} = \frac{\partial z_1(x, T)}{\partial t} \in L^2(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (51)$$

$$z_2(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (t_0, T), \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} + A(t)p(x, t) = z_2(x, t) q^{-2}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (53)$$

$$p \in L^2(Q_T), \quad (54)$$

$$p(x, t_0) = -r_0^{-2}(x) \frac{\partial z_2(x, t_0)}{\partial t} \in L_2(\Omega), \quad \frac{\partial p(x, t_0)}{\partial t} = r_1^{-2}(x) z_2(x, t_0) \in H_0^1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (55)$$

$$p(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (t_0, T), \quad (56)$$

де $\chi_{\Omega_i}(x) = 1$ якщо $x \in \Omega_i$, $i = 0$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_2$.

В теоремі 2 розділу II одержано ім'я зображення оптимальної прогновної оцінки, аналогічне тому, що одержане в теоремі 2 для параболічного випадку, а в теоремі 3 розділу II знайдено похибку прогнозу.

В третьому розділі опержано мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач дифракції в шарі.

Нехай $\Omega = R^2 \times (-h, 0)$ - шар глибини h між двома паралельними площинами

$$S_1 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = 0\},$$

$$S_2 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = -h\},$$

D - обмежена відкрита область з границею ∂D , яка складається із скінченного числа неперетинних замкнених поверхонь, класу C^2 , така, що $\bar{D} \subset \Omega$ і область $\Omega \setminus \bar{D}$ зв'язна.

Розглянемо таку крайову задачу. Потрібно визначити розв'язок дисипативного хвильового рівняння з гармонічною за часом правою частиною

$$L[\Phi(x, t)] = \Delta \Phi(x, t) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t} = -Re[f(x)e^{i\alpha t}], \quad (57)$$

або зведеного хвильового рівняння (рівняння Гельмгольца)

$$\Delta \varphi(x) + k^2 \varphi(x) = -f(x), \quad x \in \Omega \setminus \bar{D}, \quad k^2 = \frac{w^2}{a^2} - i\beta w, \quad (58)$$

яке одержано із (57), якщо шукати розв'язок $\Phi(x, t)$ вигляду

$$\Phi(x, t) = Re[e^{i\alpha t} \varphi(x)] \quad (59)$$

$$\text{де } \varphi \in V := \{\psi \in H^1(\Omega \setminus \bar{D}) \mid \Delta \psi \in L^2(\Omega \setminus \bar{D})\}, \quad (60)$$

$$\varphi = 0 \text{ на } \partial D \cup S_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } S_2, \quad (61)$$

$f \in L^2(\Omega \setminus \bar{D})$, оператор Δ слід розуміти в смислі теорії розподілу, а граничні умови в (61) - як сліди функції φ і її нормальної похідної відповідно на $S_1 \cup \partial D$ і S_2 .

Відомо, що крайова задача (57)-(61) однозначно розв'язна. Вона виникає при вивченні дифракції акустичних

хвиль на перешкодах, що містяться в плоскопаралельному хвильоводі.

Будемо далі вважати, що в рівняннях (57)-(58) функція $f(x)$ невідома і належить множині

$$G_0 := \left\{ \tilde{f} \in L^2(\Omega \setminus \bar{D}) \left| \int_{\Omega \setminus \bar{D}} g_0^2(x) \tilde{f}(x)^2 dx \leq 1 \right. \right\} \quad (62)$$

де $g_0(x)$ -вимірна в області $\Omega \setminus \bar{D}$ функція, така, що із умови

$$\tilde{f} \in L^2(\Omega \setminus \bar{D})$$

випливає, що $g_0^{\pm i} \tilde{f} \in L^2(\Omega \setminus \bar{D})$, $i = 1, 2$.

Нехай результати вимірювань стану системи (57)-(61) мають вигляд

$$y_k(t) = \int_{\Omega} R_k(x, t) \Phi(x, t) dx + \xi_k(t), \quad x \in \Omega, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad k = \overline{1, n}, \quad (63)$$

де $R_k \in L^2(\Omega \times (t_0, T))$, а $\xi_k(t)$ - реалізації неперервних в середньому квадратичному дійснозначних попарно некорельованих випадкових процесів з нульовими математичними сподіваннями:

$$M \xi_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (64)$$

і невідомими другими моментами $M \xi_k^2(t)$, які задовільняють нерівність:

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_0}^T g_k^2(t) M \xi_k^2(t) dt \leq 1, \quad (65)$$

в якій $g_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ - вимірні на інтервалі (t_0, T) такі, що з умови $w \in L^2(t_0, T)$ випливає, що

$[g_k(t)]^{\pm 1} w(t) \in L^2(t_0, T)$ множини випадкових елементів

$\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ які задовольняють умови (64) і (65), позначимо через G_1 .

Сформулюємо тепер задачу мінімаксного оцінювання. Будемо оцінювати функціонал $\ell(\Phi)$ від розв'язку крайової задачі (57)-(61), який визначається формулою

$$\ell(\Phi) = \int_{t_0}^T \int_{\Omega \setminus \bar{D}} \ell_0(x, t) \Phi(x, t) dx dt, \quad (66)$$

де $\ell_0(x, t)$ - дійсна функція, яка належить $L^2((\Omega \setminus \bar{D}) \times (t_0, T))$ в класі лінійних оцінок, тобто оцінку $\hat{\ell}(\Phi)$ функціоналу (66) будемо шукати у вигляді

$$\hat{\ell}(\Phi) = \int_{t_0}^T \sum_{j=1}^n u_j(t) y_j(t) dt, \quad (67)$$

де $u_j(t), j = \overline{1, n}$ - дійснозначні функції, що належать $L^2(t_0, T)$.

Оцінку $\hat{\ell}(\Phi)$, яка визначається як розв'язок екстремальної задачі

$$\sup_{f \in G, \eta \in G_1} M \left| \ell(\Phi) - \hat{\ell}(\Phi) \right|^2 \longrightarrow \inf_{u_1, \dots, u_n \in L^2(t_0, T_1)} \quad (68)$$

назвемо мінімаксною оцінкою функціоналу $\ell(\Phi)$, а величину

$$\sigma = \left\{ \sup_{f \in G, \eta \in G_1} M \left| \ell(\Phi) - \hat{\ell}(\Phi) \right|^2 \right\}^{1/2}$$

будемо називати мінімаксною похибкою оцінювання.

Теорема 3.1. Мінімаксна оцінка $\hat{\ell}(\Phi)$ функціоналу $\ell(\Phi)$ від розв'язку крайової задачі (57)-(61) за спостереженнями (63) за умов (64), (65) визначається за формулою

$$\hat{\ell}(\Phi) = \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^T \hat{u}_j(t) y_j(t) dt \quad (69)$$

де

$$\hat{u}_j(t) = g_j^2(t) \int_{\Omega \setminus \bar{D}} R_j(x, t) P(x, t) dx, \quad (70)$$

а функції $P(x, t)$ і $z(x)$ є єдиним розв'язком задачі (71)–(75)

$$\Delta z(x) + k^2 z(x) = \int_{t_0}^T \left[\ell_0(x, t) - \sum_{j=1}^n g_j^2(t) \int_{\Omega \setminus \bar{D}} R_j(\xi, t) P(\xi, t) d\xi R_j(x, t) \right] e^{i\alpha x} dt, \quad (71)$$

$$L[P(x, t)] = -g_0^2(x) \operatorname{Re} [z(x) e^{-i\alpha x}], \quad x \in \Omega \setminus \bar{D}, \quad (72)$$

$$P(x, t) = \operatorname{Re} [p(x) e^{-i\alpha x}], \quad (73)$$

$$z, p \in V \quad (74)$$

$$p = z = 0 \quad \text{на} \quad \partial D \cup S_1, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} = \frac{\partial z}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad S_2, \quad (75)$$

Похибка оцінювання σ визначається за формулою

$$\sigma = [\ell(P)]^{1/2}$$

В останньому параграфі третього розділу за зашумленими спостереженнями одержані мінімаксні середньоквадратичні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач без початкових умов для хвильового рівняння в шарі з неперіодичними за часом правими частинами.

Основні результати роботи

За зашумленими спостереженнями в умовах неповної інформації одержані оптимальні прогнозні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач для параболічних і гіперболічних рівнянь в частинних похідних, а також мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач дифракції в плоскопаралельному хвильоводі. Встановлено, що

знаходження оптимальних оцінок зводиться до розв'язування деяких систем інтегро-диференціальних рівнянь.

За темою дисертації опубліковані такі роботи.

1. Наконечний О.Г., Павлюченко О.Г., Подлипенко Ю.К. О прогнозировании решений уравнений гиперболического типа. // Проблемы управления и информатики. -1995. -№1.с.98-113.
2. Nakonechny A.G., Pavluchenko O.G., Yu.K. Podlipenko. On the optimal prediction estimates to hiberbolic differential equations. // ДАН України. - 1995. -№11.с.66-68.
3. Наконечний О.Г., Павлужченко О.Г., Подлипенко Ю.К. О прогнозных оценках функционалов от решений гиперболических уравнений. // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана: Тези доповідей. -Чернівці, Україна. - 1994. -с.111.
4. Павлужченко О.Г. Минимаксное оценивание установившихся колебательных процессов в слое. // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана: Тези доповідей. -Чернівці, Україна. - 1994. -с.117.
5. Павлужченко О.Г. О минимаксных среднеквадратичных оценках функционалов от решений волнового уравнения в условиях неполной информации.. // Украинская коференция "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Исследование систем): Тезисы докладов конференции. -Київ. -1995. - с.88.
6. Павлужченко О.Г. Мінімаксні оцінки функціоналів від розв'язків крайових задач без початкових умов для дисипативних хвильових рівнянь з неперіодичними за часом правими частинами. -Київ. -1995. - 19 с. // Депон. в ДНТБ України 12.09.95. -N2065 - Уж95.
7. Pavluchenko O.G. The optimal prediction estimates for functionals of hyperbolic equations solutions // Second International Conference on Difference Eqquations and Applications. Abstract. -Vesprem, Hungary. -1995. -p.82.

Павлюченко О.Г. Задачи минимаксного оценивания и прогнозирования решений уравнений с частными производными. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 - системный анализ и теория оптимальных решений. Киев, 1996.

Диссертация содержит сведения, нашедшие отражение в семи опубликованных работах. Основные результаты заключаются в следующем. По зашумленным наблюдениям в условиях неполной информации получены оптимальные прогнозные оценки функционалов от решений краевых задач для параболических и гиперболических уравнений в частных производных, а также минимаксные оценки функционалов от решений краевых задач дифракции в плоско-параллельном волноводе. Установлено, что нахождение оптимальных оценок сводится к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений.

Pavluchenko O.G. Minimax estimation and prediction for solutions of partial differential equations. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of sciences (Ph.D) in Physics and Mathematics, the speciality 01.05.04 - system analysis and theory of optimal solutions. Kyiv, 1996.

The Thesis contains the information published in the seven autor's papers. The main results consist of the following. From noisy observations under incomplete data we find optimal prediction estimates for functionals from solution of boundary value problems for parabolic and hyperbolic partial differential equations, and also minimax estimates for functionals from solutions of boundary value problems of diffraction in the plane-paralled waveguide. It is established that determination of these estimates are reduced to solving some systems of integro-differential equations.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, оптимальні прогнозні оцінки, крайові задачі, функціонали, рівняння в частинних похідних, гіперболічні і параболічні рівняння, інтегро-диференціальні рівняння.

AB 3100

446806

AB 34.680

AB 34.680