

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ВЛАСЮК Анатолій Павлович

УДК 532.72:532.546:517.54:519.63

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ
ПРОЦЕСІВ РОЗЧИНЕННЯ
ТА ВИМИВАННЯ СОЛЕЙ
І КАРСТОВИХ ПОРІД
ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ПІДЗЕМНИХ ВОД
В ОБЛАСТЯХ З КРИВОЛІНІЙНИМИ
ТА ВІЛЬНИМИ ГРАНИЦЯМИ

05.13.02 — математичне моделювання
в наукових дослідженнях

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ 1996



АВ 34. 730

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Українському інституті інженерів водного господарства (м. Рівне).

Науковий консультант: доктор технічних наук,
професор Лаврик Володимир Іванович

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор Скопечкий Василь Васильович

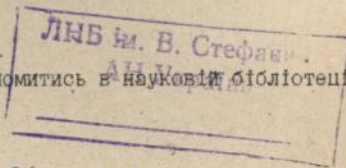
доктор фізико-математичних наук,
професор Глуценко Андрій Арсенійович

доктор технічних наук,
ведучий науковий співробітник
Поляков Вадим Леонтійович

Провідна організація - Львівський державний університет
імені Івана Франка

Захист відбудеться 29 травня 1996 р. о 14 год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.20 при
Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою:
252127, Київ-127, пр-кт Академіка Глушкова, 6, факультет
кібернетики.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці
Київського університету.



Автореферат розісланий 24 августа 1996 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат фізико-математичних
наук, доцент

Зінько П. М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В сучасних умовах інтенсивного розвитку енергетики, промисловості та сільського будівництва великого значення набувають проблеми, пов'язані з стійкістю гідротехнічних споруд, атомних електростанцій та інших важливих енергетичних об'єктів і комплексів, які часто в силу обставин будуються в несприятливих гідрогеологічних умовах – залягання під ними водорозчинних порід, загальній закарстованості ґрунтів, тектонічних розломів та ін.

Після введення вищезгаданих споруд в експлуатацію, водорозчинні породи, які залягають в їх основі, внаслідок фільтрації підземних вод або води, яка вільно заповнює пори ґрунту, повільно розчиняються, в результаті чого відбувається вимивання і винесення солей фільтраційним потоком у нижній б'єф. Крім цього відбувається зміна пористості ґрунту, збільшуються витрати рідини та швидкості фільтрації під даними спорудами. В багатьох випадках в практиці такого будівництва мають місце корозія підземної частини таких споруд, утворення карстових осідань та каверн в їх основах (як приклад – Рівненська АЕС), що можуть призводити до деформації елементів будівель та їх аварій.

В зв'язку з цим виникає необхідність у володінні інформацією про швидкість протікання процесів розчинення і вимивання солей і карстових порід та оцінку величини деформації ґрунтів при утворенні карстових осідань і каверн в основах даних споруд, що дасть можливість оцінити стійкість споруд, які будуються в таких гідрогеологічних умовах.

Питаннями розчинення підземних ґрунтів і порід та їх переносом в підземних водах займалися О. М. Шукарев, І.Г. Богуський, М.О. Каєндер, А. Нернст, О.М. Патрашев, М.Х. Арутюнян, С. М. Нумеров та ін.

Відомими роботами І.І.Ляшко, В.І. Лаврика, А.А. Глуценка, І.В. Сергієнка, В.В. Скопєцького, О.Я. Олійника, В.С.Дейнеки, М.О. Веригіна, Б.С. Шержукова, В.М. Ніколаєвського, В.С. Голубєва, Г.А. Аксельруда та інших дані дослідження були поставлені на строгу математичну основу і отримали значний розвиток.

В даних роботах враховувались не всі фактори, що впливають на процеси розчинення і масопереносу розчинних речовин при фільтрації підземних вод.

В дисертаційній роботі процеси масопереносу розчинних ре-

човин при фільтрації підземних вод моделюються з врахуванням таких факторів: градієнта концентрації розчинних речовин (молекулярної та конвективної дифузії), геометричної форми області фільтрації, зміни швидкості фільтрації на різних ділянках області фільтрації; впливу поля швидкості фільтрації на компоненти коефіцієнта конвективної дифузії; виду кінетики масообміну між рідкою і твердою фазами; впливу температури підземних вод; неоднорідності та анізотропії підземних ґрунтів і порід; наявності вільних границь при безнапірній фільтрації; зміни положення границі розчинення порід, що вимиваються підземними водами, яка шукається в ході побудови розв'язку.

Побудовано математичні моделі процесів масопереносу розчинних порід, зокрема солей і карстових порід, що залягають в основі гідротехнічних та енергетичних об'єктів і комплексів у вигляді сольових включень та пластів або їх частин. Розглядаються також різні фізичні моделі розчинення. Задача полягає в тому, щоб визначити кількість розчинних речовин, зокрема солей і карстових порід, що вимиваються з основ даних споруд при фільтрації підземних вод.

Мета роботи. Сформулювати фізичні і математичні постановки задач розчинення та вимивання солей і карстових порід, які залягають в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів, при фільтрації підземних вод в складних областях фільтрації з криволінійними фіксованими границями, вільними нерухомими та вільними рухомими границями при неоднорідності та анізотропії ґрунту. Розробити чисельні та чисельно-аналітичні методи розв'язання поставлених задач для дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід, які моделюють утворення карстових осідань та каверн в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів.

Основні завдання:

Для досягнення даної мети розглядалися такі питання:

- формулювання фізичних і математичних постановок задач розчинення і вимивання солей, які залягають в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів для складних областей в неоднорідно-анізотропних середовищах;
- методика зведення вихідної крайової задачі масопереносу в фізичній області до крайової задачі в допоміжній комплексній площині $\zeta = \xi + i \eta$ (зокрема, площині комплексного потенціалу $\psi = \phi + i \phi$), де фізичній області відповідає

параметричний прямокутник;

- розробка чисельного методу конформних та квазіконформних відображень побудови різницевих сіток в областях складної геометричної форми (однов'язних областях, криволінійних чотирикутниках, двозв'язних та трив'язних областях) в прямій і оберненій постановці;
- реалізація методики управління системою криволінійних координат за допомогою чисельного методу квазіконформних відображень з метою досягнення локальних згущень ізоліній різницевої сітки в околі окремих меж розглядуваної області або в окремих її підобластях;
- програмна реалізація розроблених алгоритмів побудови різницевих сіток в криволінійних чотирикутних, однов'язних, двозв'язних і трив'язних областях та проведення чисельних експериментів для отримання каталогу чисельних конформних та квазіконформних відображень найбільш характерних областей;
- розробка чисельного методу розв'язання змішаних крайових задач для систем диференціальних рівнянь еліптичного типу в криволінійних чотирикутниках та його застосування до розв'язання крайових задач безнапірної фільтрації з вільними нерухомими границями;
- отримання на основі балансу солі нових (балансних) крайових умов на межі фронту розчинення сольового пласта як для нерухомого, так і для рухомого фронту розчинення пласта;
- розробка чисельно-аналітичного методу розв'язання крайових задач масопереносу розчинних речовин при фільтрації підземних вод в допоміжній області з прямолінійними фіксованими границями та в областях, які рівномірно деформуються;
- розробка чисельно-аналітичного методу розв'язання крайових задач класу Стефана та Стефана-Верігіна, які моделюють розчинення солей і карстових порід в умовах фазових перетворень;
- програмна реалізація розроблених алгоритмів розв'язання крайових задач розчинення та вимивання солей і карстових порід з основ гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів та проведення чисельних експериментів при варіації різних параметрів з метою отримання прогнозу еволюції утворення карстових осідань та каверн в основах даних споруд, побудованих на закарстованих ґрунтах.

Основні положення, винесені на захист. На захист виносяться:

1. Постановка нових крайових задач розчинення та вимивання солей і карстових порід, які залягають в основях гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів, при фільтрації підземних вод в складних областях з криволінійними фіксованими границями, вільними нерухомими та вільними рухомими границями при неоднорідності та анізотропії ґрунту.

2. Методи конформних і квазіконформних відображень зведення вихідної крайової задачі масопереносу в фізичній області до крайової задачі в допоміжній комплексній площині $\zeta = \xi + i \eta$ (зокрема, площині комплексного потенціалу $w = \varphi + i \psi$), де фізичній області відповідає параметричний прямокутник.

3. Чисельні методи конформних та квазіконформних відображень побудови різницевих сіток в областях складної геометричної форми (однов'язних областях, криволінійних чотирикутниках, двозв'язних та тризв'язних областях) в прямій і оберненій постановці.

4. Метод управління системою криволінійних координат за допомогою чисельного методу квазіконформних відображень з метою досягнення локальних згущень ізоліній різницевої сітки в околі окремих меж розглядуваної області або в окремих її підобластях.

5. Методика програмної реалізації алгоритмів побудови різницевих сіток в криволінійних чотирикутниках, однов'язних, двозв'язних та тризв'язних областях та проведення чисельних експериментів для отримання каталогу чисельних конформних та квазіконформних відображень найбільш характерних областей.

6. Чисельний метод розв'язання змішаних крайових задач для систем диференціальних рівнянь еліптичного типу в криволінійних чотирикутниках та його застосування до розв'язання крайових задач безнапірної фільтрації з вільними границями.

7. Нова балансна гранична умова на межі фронту розчинення солей. Кінематична умова, яка виражає закон руху фронту розчинення солей та карстових порід, на межі рухомого фронту розчинення. Рівняння руху фронту розчинення з врахуванням впливу термодифузії на процес розчинення.

8. Чисельно-аналітичний метод розв'язання крайових задач масопереносу розчинених речовин при фільтрації підземних вод в допоміжній області з прямолінійними фіксованими границями та в областях, які рівномірно деформуються.

9. Чисельно-аналітичний метод розв'язання крайових задач

класу Стефана та Стефана-Веригіна, які моделюють розчинення солей і карстових порід в основах гідротехнічних та енергетичних споруд в умовах фазових перетворень.

10. Виконання програмної реалізації розроблених алгоритмів розв'язання крайових задач розчинення та вимивання солей і карстових порід з основ гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів та проведення чисельних експериментів при варіації різних параметрів, результатом яких є отримання прогнозу еволюції утворення карстових осідань та каверн в основах даних споруд, побудованих на закарстованих ґрунтах, та проведення інженерних розрахунків і впровадження отриманих результатів.

Наукова новизна і теоретичне значення роботи. Наукова новизна отриманих в роботі результатів полягає в розробці методів математичного моделювання та прогнозування складних фізико-хімічних процесів, пов'язаних з розчиненням та вимиванням солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними фіксованими границями, вільними нерухомими границями та границями, що рухаються в результаті фазових перетворень.

Внаслідок проведених в роботі досліджень, одержані такі нові результати:

Виведено нову балансну граничну умову на межі фронту розчинення солей. На межі рухомого фронту розчинення отримано кінематичну умову, яка виражає закон руху фронту розчинення солей і карстових порід. Виведено рівняння руху фронту розчинення з врахуванням впливу термодифузії на процес розчинення. Виконано постановки нових актуальних задач підземної гідромеханіки, що стосуються моделювання та прогнозування утворення карстових осідань та каверн в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів; створено їх математичні моделі; розроблено і теоретично обґрунтовано чисельно-аналітичні методи розв'язання відповідних крайових задач, які включають розробку чисельних алгоритмів, конформних та квазіконформних відображень побудови різницевої сітки в областях складної геометричної форми (однозв'язних, криволінійних чотирикутних, двозв'язних та тризв'язних областях) в прямій і оберненій постановці; запропонована та реалізована методика управління системою криволінійних координат з метою досягнення локальних згущень ізоліній різницевої сітки в околі окремих меж області

фільтрації або в окремих її підобластях за допомогою чисельних квазіконформних відображень; здійснено перетворення вихідної крайової задачі в фізичній області до крайової задачі в допоміжній комплексній площині $\zeta = \xi + i\eta$, де фізичній області відповідає параметричний прямокутник; розроблено ефективні чисельно-аналітичні методи її розв'язання в перетвореній області; створено необхідне програмне забезпечення, адаптоване до сучасних ПЕОМ; проведено відповідні чисельні експерименти та виконано їх аналіз.

За допомогою розробленого в роботі підходу отримано чисельно-аналітичні розв'язки ряду нових важливих двовимірних нестационарних крайових задач, що моделюють розчинення солей і карстових порід в областях фільтрації з криволінійними та вільними нерухомими і рухомими границями. Розвинуто асимптотичний метод Вишика-Люстерника та розроблено алгоритм кутових погранфункцій розв'язання двовимірних крайових задач підземного масопереносу в областях фільтрації, що містять сольові включення, при наявності криволінійних границь, а також двовимірних крайових задач класу Стефана і Стефана-Верігіна в областях, які рівномірно деформуються.

Розроблені в роботі методи можуть бути застосовані до розв'язання крайових задач гідро-аеромеханіки, електро-магнітостатики, плоскої теорії пружності та інших задач механіки суцільного середовища, які описуються подібними математичними моделями.

Практичне значення. Проведені в роботі дослідження по розрахунку поля швидкостей фільтрації, поля концентрацій солей, температурного поля і маси розчинених речовин при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями, враховуючи неоднорідність та анізотропію ґрунту, можуть бути використані при розв'язанні різних конкретних практичних задач, зв'язаних з оцінкою величин деформацій ґрунтів при проходженні процесу розчинення та вимивання солей і карстових порід з метою прогнозування стійкості гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів, дають можливість проводити інженерні розрахунки при розробці багатьох практичних міроприємств, направлених на запобігання аварій даних споруд внаслідок їх осідань; дають можливість прогнозувати утворення карстових осідань та каверн в основах даних споруд.

Достовірність отриманих результатів забезпечується ко-

ректністю і строгістю постановок задач, застосуванням теоретично обґрунтованих математичних методів дослідження і розв'язання задач; встановленням порядків точності отриманих асимптотичних розкладів розв'язків задач; отриманням автотельних розв'язків для порівняння їх з наближеними розв'язками; використанням сучасних чисельних методів і засобів обчислювальної техніки.

Достовірність здобутих результатів з використанням чисельних методів конформних та квазіконформних відображень підтверджується багатьма конкретними прикладами по співставленню криволінійних різницьових сіток складної конфігурації з різницьовими сітками, отриманими за допомогою точних формул конформного відображення.

Для наближених розв'язків ряду задач проведено моделювання на спеціалізованих установках ЕГДА в Українському інституті інженерів водного господарства, що дало достатньо добре співпадіння результатів.

Впровадження. Робота виконувалась у відповідності з планом науково-дослідних робіт Західного наукового центру по темі: "Застосування конформних та квазіконформних відображень до розв'язання крайових задач математичної фізики в областях складної геометричної форми", одним із співкерівників якої був автор. Отримані в роботі результати і розроблена автором методика розрахунку величини деформацій ґрунтів під гідротехнічними та енергетичними спорудами і комплексами внаслідок вимивання солей знайшли впровадження на кафедрах основ і фундаментів, гідротехнічних споруд Українського інституту інженерів водного господарства при виконанні курсових та дипломних робіт.

Результати роботи застосовані при прогнозуванні параметрів фільтраційної консолідації та її впливу на стійкість укосу земляної греблі хвостосховища Стебницького державного гірничо-хімічного підприємства "Полімінерал".

Результати роботи використовувались при прогнозуванні еволюції утворення карстових осідань та каверн в основі гідротехнічних та енергетичних споруд Рівненської атомної електростанції та у ґрунтах основи верхнього басейну Дністровської гідроакумулюючої електростанції.

Результати теоретичних досліджень, отримані в даній роботі, систематично використовуються в навчальному процесі Українського інституту інженерів водного господарства. Розроблена

в роботі комплексна програма побудови гідродинамічних сіток фільтрації в областях складної конфігурації використовується студентами, аспірантами та викладачами вузу для виконання курсових, дипломних та науково-дослідних робіт. На основі досліджень та розробок автора, під його керівництвом розроблено і впроваджено в навчальний процес програмний комплекс з дисципліни "Математичні методи та моделі в розрахунках на ЕОМ". Використання розробленого компілятора та його адаптація до конкретних програм даного комплексу дозволило реалізувати вибраний набір чисельних методів в автоматизованому режимі і не потребує глибоких знань з мов програмування.

Апробація роботи. Основні результати і розділи дисертації в період з 1988 р. по 1996 р. доповідались і обговорювались на різних міжнародних, всесоюзних, республіканських і відомчих наукових конференціях і семінарах, в тім числі на: кафедрах обчислювальної математики, гідротехнічних споруд, основ і фундаментів та засіданнях технічної ради Українського інституту інженерів водного господарства (Рівне, 1988 - 1995); міському семінарі математиків м. Рівне (кер. проф. В.Ю. Слюсарчук, Рівне, 1989 - 1992); наукових семінарах відділу математичного моделювання та прогнозування Інституту гідробіології НАН України (кер. проф. В.І. Лаврик, Київ, 1988 - 1995); науковому семінарі кафедри прикладної математики Львівського державного університету імені Івана Франка (кер. проф. Я.Г. Савула, Львів, 1996); об'єднаному науковому семінарі кафедри моделювання складних систем і кафедри обчислювальної математики Київського університету імені Тараса Шевченка (кер. чл.-кор. НАН України, проф. Б.М. Бублик, проф. О.Г. Наконечний, проф. С.І. Ляшко, Київ, 1995); науковому семінарі кафедри математичної фізики Київського університету імені Тараса Шевченка (кер. проф. А.А. Глушенко, Київ, 1995); науковому семінарі відділу № 175 Систем автоматизації моделювання проблем екології та енергетики Наукової ради НАН України по проблемі "Кібернетики" НАН України Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України (кер. чл.-кор. НАН України, проф. В.В. Скопечкий, Київ, 1995); засідання секції математичного моделювання Західного наукового центру АН Української РСР (Чернівці, 1988); Всесоюзній конференції по геометричній теорії функцій (Новосибірськ, 1988); конференції "Розвиток прикладної математики в західному регіоні" (Львів,

1991); Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Львів, 1994); Першій міжнародній конференції по інформаційних технологіях і системах (Львів, 1993); Першій міжнародній конференції "Чисельні методи в гідравліці і гідродинаміці" (Донецьк, 1994); школі-семінарі "Нелінійні граничні задачі математичної фізики та їх застосування" (Тернопіль, 1994); Всеукраїнській конференції "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях" (Львів, 1994); науково-технічній конференції, присвяченій 70-річчю УІВГ (Рівне, 1992); науковому семінарі, присвяченому 80-річчю з дня народження Г.М. Положія (Київ, 1994); науково-технічній конференції, присвяченій 50-річчю перемоги у Великій Вітчизняній війні (Рівне, 1995).

Публікації результатів. По темі дисертації опубліковано 25 друкованих робіт.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, шести розділів і висновків, які разом з рисунками містять 298 сторінок машинописного тексту, списку літератури із 392 найменувань та додатків з графіками і таблицями.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність теми, сформульована мета досліджень, наукова новизна отриманих результатів та їх практична цінність, дається короткий огляд основних робіт по темі дисертації та анотація отриманих результатів.

В першому розділі розглядаються фізична і математична постановки задач розчинення, вимивання і винесення солей і карстових порід з основ гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів та викладені основні принципи підходу до розв'язання відповідних крайових задач в областях з криволінійними фіксованими та невідомими (вільними) як нерухомими, так і рухомими границями. Суть цього підходу полягає у використанні конформних та квазіконформних відображень побудови різних сіток в таких областях.

Як відомо, при невеликих концентраціях (до 100 г/л) процес масопереносу мігруючих речовин при фільтрації підземних вод в неоднорідних анізотропних середовищах можна описати такою системою диференціальних рівнянь.

- фільтрації підземних вод

$$\vec{v} = -\alpha \text{ grad } h, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

- конвективної дифузії розчинення речовин

$$\begin{aligned} \text{div}(D \text{ grad } c + D_T \rho \text{ grad } T - D_B \text{ grad } P) - \vec{v} \text{ grad } c = \\ = \frac{\partial(c\rho)}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

- конвективно-дифузійного теплопереносу

$$\text{div}(\lambda \text{ grad } T) - \rho c_p \vec{v} \text{ grad } T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3)$$

- кінетики розчинення

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, c^*, N^*, T, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (4)$$

при відповідних крайових умовах на межі області фільтрації. Тут $\vec{v} = \{v_x, v_y\}$ - вектор швидкості фільтрації; h - гідростатичний напір; α , D , D_T , D_B , λ - відповідно коефіцієнти (тензори) фільтрації, конвективної дифузії, термодифузії, бародифузії та ефективною теплопровідності вологого ґрунту; $c(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ - масові концентрації розчиненої речовини в точці $z=x+iy$ в момент часу t відповідно в рідкій (на одиницю об'єму розчину) і в твердій (на одиницю об'єму пористого середовища) фазах; c_m , N_m - масові концентрації речовини в рідкій і твердій фазах в умовах рівноваги; σ - пористість середовища; $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ - константи, які характеризують швидкість масообміну; $T(x, y, t)$ - біжуча температура пласта в точці $z = x + iy$ в момент часу t ; c_p - питома теплоємність порового розчину; c_T - питома теплоємність ґрунту при сталому об'ємі; ρ - густина скелету ґрунту.

В роботі розглядаються наступні випадки кінетики масообміну: а) $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ - масообмін між рідкою та твердою фазами відсутній; б) $\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma \frac{\partial c}{\partial t}$ - миттєве встановлення рівноваги між рідкою та твердою фазами; в) $\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma(c - c_m)$ - визначається лінійною залежністю.

На межі фронту розчинення Γ_Φ задається концентрація граничного насичення

$$c(x, y, t) \Big|_{\Gamma_\Phi} = c_m, \quad (5)$$

або більш строга (балансна) гранична умова, отримана в даній роботі на основі умови балансу солі на межі фронту розчинення соляного пласта,

$$\left[D \frac{\partial c}{\partial n} + \left(-\frac{D}{\sigma} + v_n \right) c \right] \Big|_{\Gamma_\Phi} = -\frac{Dc_m}{\sigma}, \quad (6)$$

де δ - товщина дифузійного примежевого шару, \bar{n} - внутрішня нормаль до межі фронту розчинення.

На рухомій межі фронту розчинення крім цього задається ще кінематична умова, яка виражає закон руху фронту розчинення і має вигляд відповідно: а) для одновимірного випадку

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{D}{\rho} \chi \frac{\partial c(-l, t)}{\partial x}, \quad (7)$$

де $l(t)$ - товщина зони повного або неповного (зони корозії) розчинення, χ - коефіцієнт, що залежить від пористості цієї зони; б) для двовимірного випадку

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{c_m S_l} \int_{(S)} \left[(v_n c - D \frac{\partial c}{\partial n}) \right]_{t=l} ds, \quad (8)$$

де $S(l)$ - площа зони повного або неповного (зони корозії) розчинення, $l(t)$ - геометричний параметр, що характеризує сімейство фронтів розчинення пласта.

Згідно розробленого в роботі підходу здійснено введення математичних моделей досліджуваних задач до відповідних крайових задач в криволінійних координатах ξ, η комплексної області параметричного прямокутника, зокрема, до криволінійних координат ϕ, ψ області комплексного потенціалу за допомогою спряжених гармонічних функцій, що задовольняють систему Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (\xi, \eta) \in G_c, \quad (9)$$

або квазігармонічних функцій, що задовольняють систему рівнянь Бельтрамі

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{p(\xi, \eta)} \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad -\frac{\partial v}{\partial \xi} = p(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad (\xi, \eta) \in G_c, \quad (10)$$

де $p(\xi, \eta)$ - характеристика квазіконформного відображення. Рівняння (10) використовуються для управління криволінійною системою координат з метою згущення ізоліній різницевої сітки в околі інтересуючих меж розглядуваної області чи в окремих її підобластях.

Рівняння конвективної дифузії розчинених речовин (2) в безрозмірних криволінійних координатах, що генеруються за допомогою довільної пари гармонічних функцій $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, прийме вигляд

$$\bar{A} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \bar{B} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + \bar{D} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \bar{E} \frac{\partial c}{\partial \eta} + \bar{F} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (11)$$

де $\bar{A} = J_1^{-2} \cdot [D_1 \cdot y_\eta^2 + D_2 \cdot x_\eta^2]$, $\bar{B} = -2 J_1^{-2} [D_1 \cdot y_\xi y_\eta + D_2 \cdot x_\xi x_\eta]$,

$$\bar{D} = J_1^{-2} \cdot \left[D_1 \cdot y_{\xi}^2 + D_2 \cdot x_{\eta}^2 \right], \quad \bar{F} = -\gamma(c-1),$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = & (D_1 - D_2) J_1^{-2} \cdot \left[y_{\eta} y_{\xi \eta} - y_{\xi} y_{\eta \eta} - y_{\eta} \left(y_{\eta} \cdot J_{1\xi} - y_{\xi} \cdot J_{1\eta} \right) \right] + \\ & + J_1^{-1} \cdot \left[D_2 \cdot p_{\xi}^2 - \frac{p^1}{p^2} \cdot \varphi_{\xi} + x_t y_{\eta} - y_t x_{\eta} \right] + J_1^{-2} \cdot \left[\frac{\partial D_1}{\partial \xi} \cdot y_{\eta}^2 - \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial D_1}{\partial \eta} \cdot y_{\xi} y_{\eta} + \frac{\partial D_2}{\partial \eta} \cdot x_{\xi} x_{\eta} \right) + \frac{\partial D_2}{\partial \xi} \cdot x_{\eta}^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E} = & -(D_1 - D_2) J_1^{-2} \cdot \left[y_{\eta} y_{\xi \xi} - y_{\xi} y_{\xi \eta} + y_{\xi} \left(y_{\eta} \cdot J_{1\xi} - y_{\xi} \cdot J_{1\eta} \right) \right] + \\ & + J_1^{-1} \cdot \left[D_2 \cdot p_{\eta}^2 - \frac{p^2}{p^1} \cdot \varphi_{\eta} - x_t y_{\xi} + y_t x_{\xi} \right] + \\ & + J_1^{-2} \cdot \left[\frac{\partial D_1}{\partial \eta} \cdot y_{\xi}^2 - \left(\frac{\partial D_1}{\partial \xi} \cdot y_{\xi} y_{\eta} + \frac{\partial D_2}{\partial \xi} \cdot x_{\xi} x_{\eta} \right) + \frac{\partial D_2}{\partial \eta} \cdot x_{\xi}^2 \right], \end{aligned}$$

де J_1 - якобіан оберненого відображення. Отримано часткові випадки запису рівняння (11) при відображеннях (9), (10).

В змінних φ, ψ зведеного комплексного потенціалу $w = \varphi + i\psi$ рівняння (2) та крайові умови на фронті розчинення (5), (8) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} v^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[D_1 \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[D_2 \frac{\partial c}{\partial \psi} \right] - (1 + x_{\psi} \cdot y_t - y_{\psi} \cdot x_t) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \right. \\ \left. - (x_t \cdot y_{\psi} - y_t \cdot x_{\psi}) \frac{\partial c}{\partial \psi} \right\} - \gamma(c-1) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$c(\varphi, \psi, t) = 1, \quad \frac{dQ}{dt} = \left[\frac{\alpha \varphi}{\int_0^1 v^2(\varphi, Q(t))} \right]^{-1} \int_0^1 \left[-D_2 \frac{\partial c}{\partial \psi} \Big|_{\psi=Q(t)} \right] \alpha \varphi, \quad (13)$$

де $D_1 = D_{1m} + \lambda_1 \cdot |v|$, $D_2 = D_{2m} + \lambda_2 \cdot |v|$ - коефіцієнти відповідно поздовжньої (вздовж лінії течії) і поперечної (вздовж еквіпотенціальної лінії) конвективної дифузії; λ_1, λ_2 - відповідно параметри поздовжньої і поперечної гідродинамічної дисперсії; D_{1m}, D_{2m} - відповідні коефіцієнти молекулярної дифузії вздовж осей криволінійних координат; $Q(t)$ - зведена фільтраційна витрата рідини.

У випадку розміщення пласта, що розчиняється, на лінії течії або на еквіпотенціальній лінії гранична умова (6) після перетворення до нових безрозмірних змінних φ, ψ прийме відповідно вигляд:

$$\left[\bar{z} \operatorname{grad} \frac{\partial c}{\partial \bar{\psi}} + c \right] \Big|_{\Gamma_{\Phi}} = 1, \quad (14)$$

$$\left[\bar{z} \operatorname{grad} \frac{\partial c}{\partial \bar{\psi}} + \frac{D \bar{z} \cdot \partial v}{D} c \right] \Big|_{\Gamma_{\Phi}} = 1, \quad (15)$$

В формулах (14), (15) верхній знак відповідає розміщенню розчинної межі відповідно на границях $\psi = \psi_0 + 0$, $\psi = \psi_0 + 0$, а нижній — $\psi = \psi_0 - 0$, $\psi = \psi_0 - 0$.

Другий розділ присвячений розробці чисельного методу конформних та квазіконформних відображень побудови різницевих сіток в криволінійних чотирикутниках, які адаптовані до розв'язання на них крайових задач фільтрації і масопереносу розчинних речовин (розділ 5, 6). Тут виділено характерні варіанти постановок задач про конформне і квазіконформне відображення криволінійних чотирикутних областей на параметричний прямокутник, які відрізняються способом задання границь області.

Початок розвитку методу побудови різницевих сіток за допомогою відображень покладено в роботах Winslow A.M. з використанням гармонічних відображень. В подальшому цей метод розвивався в роботах Годунова С.К., Прокопова Г.П., Вабіщевича П.М., Thompson J. F., Thames F.O., Mastin C.W., Warsi Z. W. та ін.

Узагальнена постановка задачі формулюється наступним чином: нехай задано відповідність конформного відображення параметричного прямокутника на криволінійний чотирикутник (рис.1)

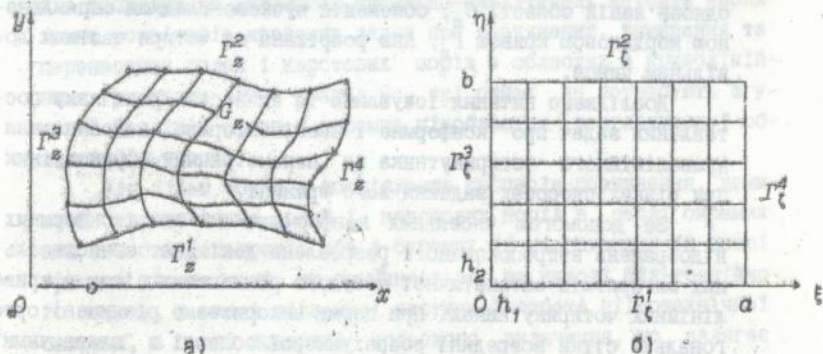


Рис. 1.

за допомогою задання його границі $\Gamma_z = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_z^i$, яка складається

з чотирьох кусково-гладких жорданових кривих, заданих рівняннями в неявному

$$g_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_z^i, \quad i=\overline{1, 4},$$
 параметричному

$$x_i = x_i(t), \quad y_i = y_i(t), \quad (x, y) \in \Gamma_z^i, \quad i=\overline{1, 4},$$
 або дискретному вигляді

$$\begin{aligned} (x_{i0}, y_{i0}), \quad i=\overline{0, n}, \quad (x_{i0}, y_{i0}) &\in \Gamma_z^1, \\ (x_{im}, y_{im}), \quad i=\overline{0, n}, \quad (x_{im}, y_{im}) &\in \Gamma_z^2, \\ (x_{0j}, y_{0j}), \quad j=\overline{0, m}, \quad (x_{0j}, y_{0j}) &\in \Gamma_z^3, \\ (x_{nj}, y_{nj}), \quad j=\overline{0, m}, \quad (x_{nj}, y_{nj}) &\in \Gamma_z^4. \end{aligned}$$

Шукається відображення $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$ в класі конформних або квазіконформних відображень.

При відшуканні чисельного оберненого відображення потрібно визначити: модуль області G_z , що забезпечує існування даного оберненого відображення, координати внутрішніх вузлів сітки, координати "плаваючих" вузлів по контуру області.

В наведеній постановці для криволінійного чотирикутника вузли передбачаються "плаваючими" по всьому контуру границі області G_z при умові аналітичного її задання. Модуль області визначений постановкою задачі, але невідомий (шукається в ході побудови відображення). До даної постановки зводиться побудова різницевої конформної сітки в будь-якій скінченній однозв'язній області G_z , обмеженій кусково-гладкою спрямованою жордановою кривою Γ_z , яка розрізана на чотири частини довільним чином.

Досліджено питання існування та єдиності розв'язку поставлених задач про конформне і квазіконформне відображення криволінійного чотирикутника на параметричний прямокутник при різних способах задання його границі.

За допомогою чисельних конформних та квазіконформних відображень запропоновано і розроблено декілька обчислювальних алгоритмів автоматичної побудови різницевих сіток в криволінійних чотирикутниках. При цьому використано різницеві ортогональні сітки всередині розрахункової області з "плаваючими" вузлами по фізичному профілю межі. Під "плаваючими" вузлами, вперше запровадженими в роботах С. К. Годунова і Г. П. Прокопова, потрібно розуміти ті кінцеві вузли ізоліній різницевої сітки, породженої відповідним конформним чи квазіконформним

відображенням прямокутної сітки параметричного прямокутника, одна координата яких обчислюється за даними постановки задачі, а інша - знаходиться з рівняння граничного контура області.

Перші два алгоритми базуються на чисельному розв'язанні двох послідовностей різницевих задач Діріхле відповідно для рівнянь Лапласа та системи рівнянь Коші-Рімана, чергуючи внутрішніх ітераційних процесів по уточненню координат внутрішніх вузлів різницевої сітки і "плаваючих" вузлів по межі області, а також зовнішніх ітераційних процесів по уточненню модуля області, який виступає параметром регуляризації даної задачі.

Третій алгоритм ґрунтується на мінімізації варіаційного функціоналу Рімана та наступному чисельному розв'язанні нелінійних систем рівнянь еліптичного типу.

Запропонована та реалізована методика управління системою криволінійних координат в криволінійних чотирикутниках з використанням одного класу нелінійних квазіконформних відображень.

Конформні різницеві сітки криволінійних координат в криволінійному чотирикутнику G_x площини (x, y) , розглянуті в п. 2.1, 2.2, є прообразами рівномірних (квадратних або прямокутних) різницевих сіток координат в параметричному прямокутнику G_ξ площини (ξ, η) . Такі різницеві сітки успішно застосовані для побудови за допомогою чисельно-аналітичних методів наближених розв'язків крайових задач про розчинення, вимивання та перенесення солей і карстових порід в областях з криволінійними границями (див. розділ 6), які однак не потребують згущення ізоліній сітки в окремих підобластях розглядуваної області фільтрації.

Для більш точного дослідження процесів розчинення, вимивання та винесення солей і карстових порід в околі окремих меж області фільтрації або в окремих її підобластях (в околі границь пласта солі, що розчиняється, на виході фільтраційного потоку, в околі підземної частини флітбета гідротехнічної споруди, в околі поверхні сольового включення, що залягає всередині області) часто виникає потреба в управлінні ізолініями різницевої сітки з метою досягнення локальних її згущень в даних підобластях. В зв'язку з цим використано квазіконформні відображення, розглянуті в п. 1.2.3.

Для реалізації методики управління системою криволіній-

них координат розроблено дві математичні моделі, одна з яких ґрунтується на чисельному розв'язанні системи рівнянь Бельтрамі, а друга - оберненої до квазілінійної еліптичної системи рівнянь типу рівнянь Пуассона - нелінійної системи рівнянь еліптичного типу.

В першій з них породжуваними криволінійними координатами вибираються нелінійні квазіконформні відображення з другою парою характеристик

$$\eta_y = \frac{p'_1(\eta)}{p'^2_1(\xi)} \xi_x, \quad - \eta_x = \frac{p'_1(\eta)}{p'^2_1(\xi)} \xi_y, \quad (16)$$

де $p'_1(\eta)/p'^2_1(\xi) > 1$, а в другій - квазілінійна еліптична система рівнянь типу рівнянь Пуассона

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = p'^2_{1\xi} J, \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = p'_{1\eta} J. \end{cases} \quad (17)$$

В фізичній площині реалізація проблеми управління для першої математичної моделі здійснюється за допомогою чисельного розв'язання системи рівнянь Бельтрамі 1-го порядку (з врахуванням перепозначення характеристик $p^1(\eta) = p'_1(\eta)$, $p^2(\xi) = p'^2_1(\xi)$)

$$y_\eta = \frac{p^2(\xi)}{p^1(\eta)} x_\xi, \quad - y_\xi = \frac{p^1(\eta)}{p^2(\xi)} x_\eta \quad (18)$$

або, згідно другої математичної моделі, системи рівнянь еліптичного типу із змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{p^1} x_{\xi\xi} + \frac{p^1}{p^2} x_{\eta\eta} + \frac{p^2_\xi}{p^1} x_\xi + \frac{p^1_\eta}{p^2} x_\eta &= 0, \\ \frac{p^2}{p^1} y_{\xi\xi} + \frac{p^1}{p^2} y_{\eta\eta} + \frac{p^2_\xi}{p^1} y_\xi + \frac{p^1_\eta}{p^2} y_\eta &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

при умовах (18) для функцій $\xi = \xi(x, y)$ і $\eta = \eta(x, y)$ на сторонах параметричного прямокутника. Комплексним записом системи рівнянь (18) є рівняння

$$z_\xi = - \frac{p^1(\eta) - p^2(\xi)}{p^1(\eta) + p^2(\xi)} z_\eta. \quad (20)$$

В залежності від потреби ступеня згущення ізоліній різничевої сітки в околі окремих меж або в підобластях розглядуваної області вибором характеристик квазіконформного відобра-

ження (18) здійснюється управління (згущення) ізоліній різницевої сітки вздовж однієї осі координат $O\xi$ або $O\eta$ та вздовж двох осей координат $O\xi$ і $O\eta$ одночасно. І хоча зміна характеристик квазіконформного відображення викличе зміну ізоліній різницевої сітки по всій області, ефект цієї зміни буде найбільш значимий в околі певних меж або в окремих підобластях фізичної області, причому останній досягається вибором характеристик квазіконформного відображення.

Параметром регуляризації даних обернених задач чисельного конформного та квазіконформного відображення служить модуль параметричного прямокутника G_ζ , уточнення якого здійснюється ітераційним методом. Причому для уточнення модуля при квазіконформних відображеннях потрібно врахувати його зміну при цих відображеннях, що забезпечується вибором характеристик даного відображення.

Як відомо, довільний розв'язок рівняння (20) може бути представлений по деякому гомеоморфізму цього рівняння $\zeta_1 = \zeta_1(\zeta)$ через аналітичну функцію $F(\zeta_1) = z$. Використовуючи цю властивість, в роботі побудовано гомеоморфізм

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = \int_0^{\xi} \frac{1}{p^2(\tau)} d\tau + i \int_0^{\eta} \frac{1}{p^1(t)} dt, \quad (21)$$

який прямокутник G_ζ площини (ζ) відображає в прямокутник G_{ζ_1} ($0 < \xi_1 < a_1$, $0 < \eta_1 < b_1$) площини (ζ_1) , де

$$a_1 = \int_0^a \frac{1}{p^2(\tau)} d\tau, \quad b_1 = \int_0^b \frac{1}{p^1(t)} dt.$$

Якщо прямокутник G_ζ конформно відобразити за допомогою функції $z = F(\zeta_1)$ на область G_z , то задача відображення прямокутника G_ζ на область G_z буде розв'язана функцією

$$z = F(\zeta_1(\zeta)).$$

При відображенні за допомогою гомеоморфізму (21) квадратна сітка прямокутника G_ζ площини (ζ) перетворюється в прямокутну сітку, паралельну осям координат $O\xi_1$ і $O\eta_1$, прямокутника G_{ζ_1} із значним згущенням ліній $\xi = \text{const}$ і $\eta = \text{const}$ в місцях, де характеристика відображення $p_1(\xi, \eta) \gg 1$. Таким чином, при виборі характеристики квазіконформного відображення

$$p_1(\xi, \eta) = p_1^1(\eta)/p_1^2(\xi) \text{ здійснюється управління системою кри-}$$

вольнінних координат вздовж двох криволінійних осей $O\xi$ і $O\eta$ одночасно.

Якщо необхідно згущення ліній сітки $x(\xi_0, \eta) = x$, $y(\xi_0, \eta) = y$ (образів ліній $\xi = \xi_0 = const$), то характеристику p_1 квазіконформного відображення (20) виберемо залежною тільки від ξ : $p_1 = -p_1(\xi) = p^{-2}(\xi)$. Для здійснення управління системою криволінійних координат по $O\eta$ характеристику p_1 квазіконформного відображення (20) виберемо залежною тільки від η : $p_1 = p_1(\eta)$.

Розроблені алгоритми побудови різницевих сіток програмно реалізовані в системі програмування Turbo Pascal і адаптовані для ПК IBM PC AT та IBM-сумісних комп'ютерів. Розроблено комплекс програм для чисельної автоматичної побудови різницевих сіток в криволінійних чотирикутниках та двозв'язних областях.

На основі запропонованих і розроблених алгоритмів проведено чисельні експерименти, в результаті яких отримано каталог відображень найбільш характерних областей.

Як приклад застосування розробленого підходу, проведено комп'ютерну візуалізацію гідродинамічних полів в криволінійних чотирикутних областях.

В третьому розділі розроблена автоматична побудова різницевих сіток за допомогою чисельних конформних та квазіконформних відображень в двозв'язних і в тризв'язних областях.

Виділено характерні варіанти постановок задач конформного та квазіконформного відображення двозв'язних і тризв'язних областей на параметричний прямокутник з використанням "плаваючих" по межі вузлів, фіксованих та "вільних" розрізів. Сформульовані постановки відрізняються способом задання границь області та вибором розрізу.

Узагальнена постановка задачі конформного та квазіконформного відображення двозв'язної області формується наступним чином. Нехай задано відповідність конформного (квазіконформного) відображення параметричного прямокутника G_ζ на розрізану двозв'язну кільцеву область G_z за допомогою задання профілю межі $\Gamma_z = \Gamma_z^1 \cup \Gamma_z^2$ рівняннями в неявному

$$g_k(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, \quad k=1, 2,$$

параметричному

$$x = x_k(t), \quad y = y_k(t), \quad k=1, 2$$

або дискретному вигляді

$$x(th, 0) = x_{t0}, \quad y(th, 0) = y_{t0}, \quad t = \overline{0, n}.$$

$$x(th_1, mh_2) = x_{tm}, \quad y(th_1, mh_2) = y_{tm}, \quad t = \overline{0, n}.$$

Крім цього, рівнянням $\gamma(x, y) = 0$ задано фіксований розріз із сторонами $\gamma_z^{12}, \gamma_z^{21}$, що з'єднує криві Γ_z^1, Γ_z^2 .

У випадку "вільного" розрізу γ на ньому задаються умови періодичності

$$\begin{aligned} x(0, jh_2) &= x(nh_1, jh_2), \quad y(0, jh_2) = y(nh_1, jh_2), \\ x(h_1, jh_2) &= x((n+1)h_1, jh_2), \quad x(h_1, jh_2) = x((n+1)h_1, jh_2). \end{aligned}$$

Шукається відображення $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$ параметрично-го прямокутника на розрізану двозв'язну область в класі конформних або квазіконформних відображень. При відшуканні чисельного оберненого відображення потрібно визначити: модуль області, координати внутрішніх вузлів різницевої сітки, координати "плаваючих" вузлів по контуру області, координати вузлів фіксованого або "вільного" розрізу.

Досліджено питання існування та єдиності розв'язку поставлених задач про конформне або квазіконформне відображення двозв'язної та тризв'язної областей на параметричний прямокутник. Запропоновано і розроблено декілька обчислювальних алгоритмів побудови різницевої сітки в двозв'язних та тризв'язних областях за допомогою чисельних конформних та квазіконформних відображень з використанням ортогональних сіток всередині області, методики "плаваючих" вузлів, "вільних" та фіксованих розрізів.

У випадку двозв'язної області з фіксованим розрізом побудова різницевої сітки аналогічна побудові різницевої сітки в криволінійних чотирикутниках. Інтерес представляє побудова різницевої сітки в двозв'язних областях з "вільним" розрізом.

Координати внутрішніх вузлів $x_{i,j}, y_{i,j}, t = \overline{0, n}, j = \overline{1, m-1}$, визначаються в цьому випадку із розв'язку двох періодичних різницевоїх задач типу Дірікле

$$\begin{cases} (\Delta u)_{i,j} = 0, \\ u_{i,0} = u_{i,0}^{(0)}, \quad u_{i,m} = u_{i,m}^{(0)}, \quad t = \overline{0, n}, \\ u_{0,j} = u_{n,j}, \quad u_{1,j} = u_{n+1,j}, \quad j = \overline{1, m-1}, \end{cases} \quad (22)$$

де Δ - різницевий оператор Лапласа, різницевий оператор Коші-

Рівняна або більш загальний еліптичний різницевий оператор, що апроксимує (22) на квадратній або прямокутній сітці, визначений на п'ятиточковому шаблоні "хрест" або на дев'ятиточковому шаблоні типу "ящик"; під u розуміється x або y . Розроблено збіжні алгоритми їх реалізації.

Побудовані різницеві схеми другого та підвищеного (четвертого) порядку точності, які апроксимують різницевий оператор Лапласа відповідно на п'ятиточковому шаблоні "хрест" та дев'ятиточковому шаблоні типу "ящик". Отримано розв'язок даних різницевих схем методом послідовної верхньої релаксації.

Реалізована методика управління системою криволінійних координат в двозв'язних та тризв'язних областях з використанням одного класу нелінійних квазіконформних відображень (16). В фізичній площині реалізація методики управління здійснюється за допомогою системи рівнянь Бельтрамі (18). Вибором характеристик квазіконформного відображення (18) здійснюється управління криволінійною системою координат - викликаються локальні згущення ізоліній різницевої сітки в околі границь двозв'язної та тризв'язної області або всередині розглядуваної області. Параметром регуляризації даних обернених задач чисельного конформного та квазіконформного відображення слугує модуль параметричного прямокутника G_c , для уточнення якого потрібно врахувати його зміну при квазіконформних відображеннях, що забезпечується конкретним вибором характеристик даного відображення.

Розроблені алгоритми побудови різницевих сіток в двозв'язних і тризв'язних областях програмно реалізовані в системі програмування *Turbo Pascal*, на основі чого проведено чисельні експерименти та отримано каталог чисельних конформних відображень найбільш характерних областей. Приклади побудови різницевих сіток за допомогою чисельних конформних відображень та реалізація управління ізолініями різницевих сіток за допомогою квазіконформних відображень наведено на рис. 2, 3.

В четвертому розділі розроблено чисельний метод розв'язання класу змішаних крайових задач з вільними нерухомими границями в криволінійних чотирикутниках для систем диференціальних рівнянь першого порядку або для рівнянь другого порядку еліптичного типу. Він реалізує розроблений в розділах 2, 3 даної роботи чисельний метод конформних відображень побудови різницевих сіток в областях з криволінійними фіксова-

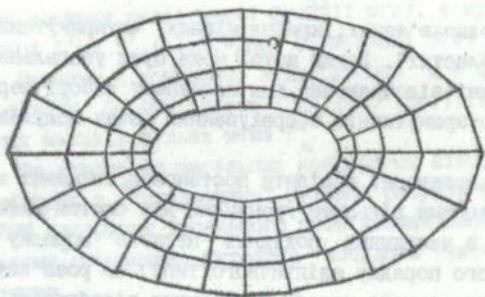


Рис. 2.

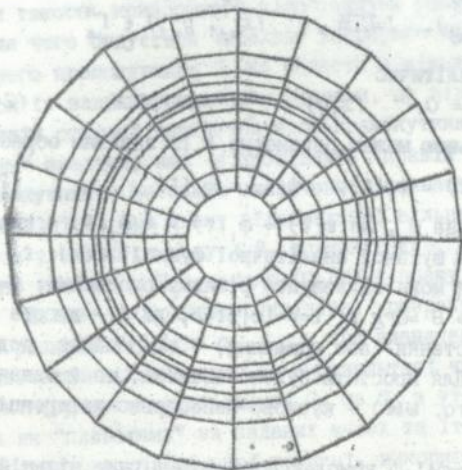


Рис. 3.

ними границями (однозв'язних, криволінійних чотирикутних та багатозв'язних областях). Даний метод може бути узагальнений і на квазіконформні відображення при належному виборі вершин криволінійних чотирикутників з врахуванням зміни модулів даних областей.

Досліджено характерні варіанти постановок змішаних крайових задач з нерухомими вільними границями для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку або для рівнянь другого порядку еліптичного типу, що розв'язуються за допомогою чисельного методу конформних відображень.

Один з варіантів постановки задачі для криволінійного чотирикутника, одна сторона (або дві сторони) якого є вільною границею, формулюється наступним чином: нехай чотирикутна область G_z із заданими трьома криволінійними сторонами, які апроксимуються достатньо густою таблицею точок

$$\begin{aligned} (x_{im}, y_{im}), \quad i=\overline{0, n}, \quad (x_{im}, y_{im}) \in \Gamma_z^1, \\ (x_{0j}, y_{0j}), \quad j=\overline{0, m}, \quad (x_{0j}, y_{0j}) \in \Gamma_z^3, \\ (x_{nj}, y_{nj}), \quad j=\overline{0, m}, \quad (x_{nj}, y_{nj}) \in \Gamma_z^4 \end{aligned} \quad (23)$$

або задаються аналітично

$$g_i(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_z^i, \quad i=1, 3, 4, \quad (24)$$

а четверта є вільною межею параметра t із заданим образом

$$\varphi(t) = \varphi_1(t), \quad \psi(t) = \psi_1(t) \quad (25)$$

частини межі образу G_w , де $w(t) = \varphi_1(t) + i\psi_1(t)$ — граничне (межове) значення шуканої аналітичної функції $w(z)$; t означає параметр, який може задватися різними способами: $t=x=Re z$; $t = \arctg \frac{dy}{dx}$; $t = \theta = \arg z$; $t=r=|z|$; $t=s$, де s — дугова абсциса, для яких зростання (або спадання) t відповідає додатному обходу Γ_z^2 . Для простоти будемо вважати, що t означає $x = Re z$, крім того, $w(t)$ — кусково-неперервно-диференційовна функція.

В площині $w=\varphi+i\psi$ комплексного потенціалу вільній межі Γ_z^2 відповідає межа Γ_w^2 . Інші межі області G_w , які доповнюють вільну межу до замкненого контура, задовольняють співвідношення

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0. \quad (26)$$

Функції (25) задають гладку криву, а функція $\Phi(\varphi, \psi)$ — кусково-гладкі криві з гладкістю на окремих частинах кривої $L_w^i = \cup \Gamma_w^i$, $i=1, 3, 4$. Рівняння (26), яке зв'язує дійсну та

уявну частину аналітичної функції $w(z)$, є крайовою умовою на контурі $L'_z = \cup \Gamma'_z, t=1,3,4$, при відшуканні $w(z)$ всередині області.

Шукаємо конформне відображення $w = \phi \cdot t \cdot \psi$ області G_z на область G_w при умовах (23), (або (24)), (25), (26) на відповідних межах і вільна межа Γ_z^2 .

За допомогою чисельних конформних відображень різницеви-ми сітками з "плаваючими" вузлами розроблено та реалізовано на ЕОМ алгоритми чисельного розв'язання даного класу задач з вільними границями. Методика побудови чисельного розв'язку наступна.

Спочатку знаходиться конформне відображення G_w з чотирьма відміченими точками, дві з яких є образами кінців вільної межі, на параметричний прямокутник G_ζ : $0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq b$ (ζ) - площини. При цьому, нехай крива L'_z відповідає лівій і верхній стороні параметричного прямокутника, а нижня і права є образами кривої Γ_z^2 . У випадку варіанту, відміченого у постановці задачі в дужках, кривій L'_z відповідає нижня сторона параметричного прямокутника. Алгоритми чисельної побудови такого конформного відображення розроблені в розділі 2. Після чого будеться чисельно конформне відображення параметричного прямокутника G_ζ на область з вільною межею G_z методом сіток із заданими межовими вузлами, що відповідають лівій і верхній стороні параметричного прямокутника, і "умовно плаваючими" вузлами, які відповідають правій і нижній сторонам прямокутника. Методика визначення "плаваючих" вузлів описана в розділі 2. При цьому відображенні вільна межа Γ_z^2 відображається у нижню сторону $A_\zeta B_\zeta$ прямокутника, а $\Gamma_z^1, \Gamma_z^3, \Gamma_z^4$ - відповідно у ліву ($A_\zeta D_\zeta$), верхню ($C_\zeta D_\zeta$) і праву ($B_\zeta C_\zeta$) його сторони.

Далше проводиться чисельний розрахунок внутрішніх вузлів різницевої сітки x_{ij}, y_{ij} при визначеному модулі прямокутника. Останній знаходиться в результаті чисельного розрахунку конформного відображення G_ζ на G_w з уточненням межових вузлів як "плаваючих" на заданих межах та ітераційному уточненні координат вузлів вільної границі, використовуючи останню граничну умову (25), з якої

$$x = \phi_1^{-1}(\psi) \quad \text{або} \quad x = \psi_1^{-1}(\phi), \quad (x, y) \in \Gamma_z^2,$$

та одну з умов ортогональності ізоліній різницевої сітки вільній границі. Наприклад,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0.$$

Як приклад застосування розробленого методу наведено розв'язання задачі фільтрації з вільною поверхнею в тілі однорідно-ізотропної земляної греблі, обернена постановка якої має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_w,$$

$$x(0, \psi) = 0, \quad 0 \leq y(0, \psi) \leq H,$$

$$y(l, \psi) = 0, \quad l_1 \leq x(l, \psi) \leq l_2,$$

$$y(\varphi, 0) = 0, \quad 0 \leq x(\varphi, 0) \leq l_1,$$

$$\begin{cases} y(\varphi, Q) = \varphi_0 - \varphi, & 0 \leq x(\varphi, Q) \leq l_2, \\ x_\varphi \cdot x_\psi + y_\varphi \cdot y_\psi = 0, & (x, y) \in DC. \end{cases}$$

Отримана гідродинамічна різницєва сітка фільтраційного потоку розглянутої задачі, за допомогою якої визначаються інші гідродинамічні характеристики потоку.

В н'ятому розділі розроблено чисельно-аналітичні методи розв'язання двовимірних нестационарних крайових задач масопереносу розчинених речовин при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними фіксованими границями. Дані методи ґрунтуються на точному та розроблених в розділах 2,3 чисельних методах конформних та квазіконформних відображень побудови гідродинамічної сітки фільтраційного потоку, методі локально-одновимірних сіток, асимптотичному методі Винака-Ластерника та методі куткових погранфункцій.

Використання розроблених методів дало можливість провести математичне моделювання та прогнозування складних фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки, зв'язаних з проблемою розчинення і вимивання солей і карстових порід, прогнозування їх осідань та утворення каверн в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів; ефективно проводити розрахунок розподілу концентрації розчинених речовин по області фільтрації та вздовж окремих ділянок межі, а також визначати масу речовини, що проходить через різні ділянки області фільтрації та її границі. Розглянуті задачі моделюють процеси розчинення, вимивання та винесення солей і карстових порід в межах моделей абсолютно непроникного та сильно проникного тіл.

В п. 5.1 отримано розв'язок двовимірної нестационарної задачі розчинення і винесення солей з основи гідротехнічних

та енергетичних споруд і комплексів для області фільтрації з криволінійною границею при залежності компонент коефіцієнта конвективної дифузії від швидкості фільтрації.

Математична модель задачі в безрозмірних криволінійних координатах φ, ψ області комплексного потенціалу $w = \varphi + i\psi$ в загальноприйнятих позначеннях приймає вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \quad (27)$$

$$y(0, \psi) = 0, \quad y(1, \psi) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (28)$$

$$g(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad y(\varphi, Q) = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad (29)$$

$$v^2(\varphi, \psi) \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[D_1 \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} \left[D_2 \frac{\partial c}{\partial \psi} \right] - \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] - \gamma(c-1) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (30)$$

$$c(0, \psi, t) = c_1, \quad \frac{\partial c(1, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad c(\varphi, Q, t) = 1, \quad (32)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0. \quad (33)$$

Тут: c_1 - концентрація солі в розчині, яка поступає з верхнього с'єфа; $c_m = 1$ - зведена концентрація насиченого розчину; c_0 - розподіл концентрації по області фільтрації в початковий момент часу $t=0$; γ - константа швидкості масообміну; $v(\varphi, \psi)$ - швидкість фільтрації; $g(x, y) = 0$ - рівняння підземного контура гідротехнічної споруди.

Для більш точнішого вивчення процесів розчинення, вимивання та винесення солей і карстових порід на межі фронту розчинення замість останньої граничної умови в (32) потрібно взяти перетворену до безрозмірних змінних φ, ψ граничну умову, яка прийме вигляд

$$\left[\delta v \frac{\partial c}{\partial \psi} + c \right] \Big|_{\psi=Q} = 1. \quad (34)$$

Для сольового пласта скінченних розмірів, що займає частину водоупору, остання гранична умова в (32) наступна:

$$\frac{\partial c(\varphi, Q, t)}{\partial \psi} = 0, \quad \varphi \in (0, \varphi_1) \cup (\varphi_2, 1), \quad (35)$$

$$c(\varphi, Q, t) = 1 \quad \text{або} \quad \left[\delta v \frac{\partial c}{\partial \psi} + c \right] \Big|_{\psi=Q} = 1, \quad \varphi \in \{\varphi_1, \varphi_2\}.$$

Для простіших випадків підземного контура гідротехнічної споруди (флуктуація зі шпунтом або при його відсутності) роз-

в'язок задачі (27)–(29) знаходиться в замкнутому вигляді аналітичним методом конформного відображення області фільтрації на область комплексного потенціалу.

У випадку складнішої форми підземного контура гідротехнічної споруди для знаходження розв'язку оберненої задачі (27)–(29) використано розроблений в розділах 2–3 роботи чисельний метод конформних відображень побудови гідродинамічної сітки фільтрації.

Для крайової задачі (30)–(35) на отриманій різницевій сітці побудована монотонна різницева схема задачі масопереносу розчинених речовин та отримано її розв'язок локально-одновимірним методом О.А. Самарського. У внутрішніх вузлах різницевої гідродинамічної сітки, наприклад, різницеві рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{h_1^2} \left[D_{1,t+0.5} c_{t+1,j}^{k+0.5} - (D_{1,t-0.5} + D_{1,t+0.5}) c_{t,j}^{k+0.5} + D_{1,t-0.5} c_{t+1,j}^{k+0.5} \right] - \\ & - \frac{1}{D_{1,t} h_1} D_{1,t-0.5} (c_{t,j}^{k+0.5} - c_{t-1,j}^{k+0.5}) - 0.5 \cdot \gamma \cdot v_{t,j}^{-2} (c_{t,j}^{k+0.5} - 1) = \\ & = 0.5 \cdot v_{t,j}^{-2} \frac{c_{t,j}^{k+0.5} - c_{t,j}^k}{\tau}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_2^2} \left[D_{2,j+0.5} c_{t,j+1}^{k+1} - (D_{2,j-0.5} + D_{2,j+0.5}) c_{t,j}^{k+1} + D_{2,j-0.5} c_{t,j+1}^{k+1} \right] - \\ & - 0.5 \cdot \gamma \cdot v_{t,j}^{-2} (c_{t,j}^{k+1} - 1) = 0.5 \cdot v_{t,j}^{-2} \frac{c_{t,j}^{k+1} - c_{t,j}^{k+0.5}}{\tau}, \end{aligned} \quad (37)$$

де $\mu = 1/(1 + R)$, $R = 0.5h_1/D_{1,t}$, $D_{1,t+0.5} = D_1(\varphi_t + 0.5h_1, \varphi_j)$.

Неважко показати, що при достатній гладкості розв'язку задачі (27)–(35) отримана різницева схема адитивна і володіє сумарною апроксимацією порядку $O(h^2 + \tau)$, $h = \max(h_1, h_2)$, стійка по початкових і граничних даних і правій частині, а також рівномірно збігається з вказаними точностями в класі неперервних коефіцієнтів. Розв'язок "одновимірних" різницевоїх схем знаходиться методом прогонки.

Потік солі з кривлі пласта (одиночної довжини і ширини) на початковому етапі процесу розчинення обчислюється за формулою

$$q_c(x, b, t) = -D_2 \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{DC} = D_2 v \frac{\partial c}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=Q}$$

Величина деформації пласта солі в точці x за час t експлуатації гідротехнічної споруди наближено обчислюється наступним чином:

$$\Delta d(x, t) = \frac{1}{\rho_c} \int_0^t D_2 v \frac{\partial c(\Phi(x, b), Q, t)}{\partial \Phi} dt,$$

де ρ_c - питома вага солі.

Проведено чисельні експерименти для таких значень безрозмірних параметрів: $D_m = 10^{-6}$, $l_1 = 0.5$, $b = 5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.1$, аналіз результатів якого при варіації різних параметрів показав, що поздовжня дисперсивність λ_1 незначно впливає в порівнянні з поперечною дисперсивністю λ_2 на величини потоків солі з кривлі пласта та на деформації пласта.

В результаті розрахунку для параметрів $2l = 10$ м, $b = 50$ м, $\lambda_1 = 10$ м, $\lambda_2 = 1$ м, $H = 10$ м, $\alpha = 1$ м/добу, $\sigma = 0.4$, $\gamma = 0$, $\rho_c = 2.2 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_m = 2$ кг/м³, $c_0 = 0$ встановлено, що на протязі трьох років експлуатації гідротехнічної споруди відбувається стабілізація значень потоків солі з кривлі пласта. Так, наприклад, максимальне значення потоку змінюється від величини 0.0318 кг/м²/добу до величини 0.0183 кг/м²/добу. Характерні графіки потоків солі з кривлі пласта наведені на рис. 4. Максимальна величина деформації пласта досягається під серединою флутбета і становить 0.15 м за 50 років експлуатації споруди, що значно менше відповідної величини, обчисленої для стаціонарної задачі. Рис. 5 ілюструє еволюцію зони повного або неповного (зони корозії) розчинення пласта на протязі експлуатації гідротехнічної споруди.

В п. 5.2 сформульовано постановки і отримано розв'язки нових двовимірних нестационарних крайових задач розчинення, вимивання і винесення солей і карстових порід в межах моделей сильно проникного і абсолютно непроникного тіла в областях фільтрації з криволінійними границями, що містять сольові включення (рис. 6), при неоднорідності та анізотропії ґрунту та допущенні переваги процесів конвективного переносу над дифузійним.

Допущення про перевагу процесів конвективного масопереносу над дифузійними призводить до появи малого параметра в рівнянні конвективної дифузії математичної моделі задачі, за-

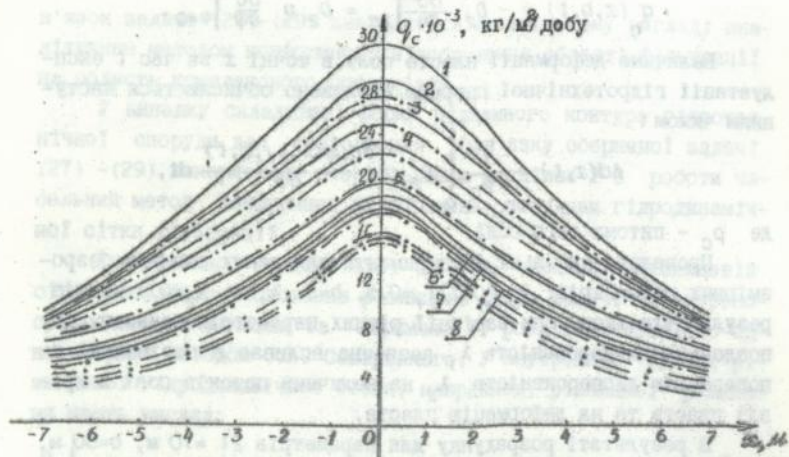


Рис 4. Графіки потоку солі $q_c(x, t)$ з криві пласта в моменти часу t , міс.: 1 (1), 2 (2), 3 (3), 5 (4), 10 (5), 15 (6), 20 (7), 30 (8): — — при заданні граничної умови $c = c_m$ на фронті розчинення; — — — при заданні нової балансної умови.

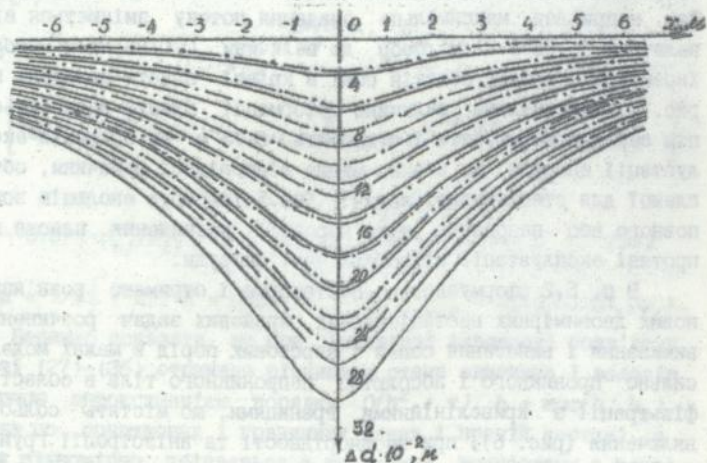


Рис 5. Еволюція зони повного розчинення пласта через кожні 10 років експлуатації гідротехнічної споруди: — — при заданні граничної умови $c = c_m$ на фронті розчинення; — — — при заданні нової балансної умови.

писаної в безрозмірних змінних φ , ψ області комплексного потенціалу,

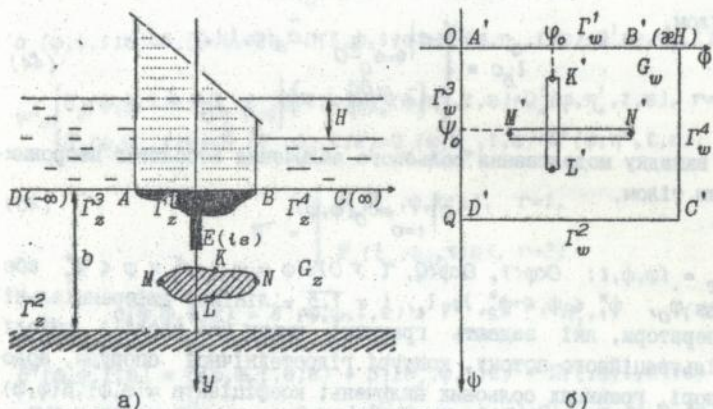


Рис. 6.

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{k_{12}}{k_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}{k_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{1}{k_{11}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{k_{12}}{k_{11}} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad (38)$$

$$g_z(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \Gamma_w^t, \quad t = T, 5 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varepsilon c = \varepsilon \cdot \left[\alpha(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + 2\beta(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \varphi \partial \psi} + \gamma(\varphi, \psi) \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} + \right. \\ \left. + \delta_1(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \delta_2(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \psi} \right] - \delta(\varphi, \psi) \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (40) \end{aligned}$$

$$l_1 c \equiv c|_{\varphi=0} = \tilde{c}_1(\varphi, t), \quad l_2 c \equiv \begin{cases} c|_{\varphi=1} = \tilde{c}_2(\varphi, t), \\ \frac{\partial c}{\partial \varphi}|_{\varphi=1} = 0, \end{cases} \quad (41)$$

$$l_3 c \equiv \begin{cases} c|_{\varphi=0} = \tilde{c}_3(\varphi, t), \\ \frac{\partial c}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = 0, \end{cases} \quad l_4 c \equiv \begin{cases} c|_{\varphi=Q} = \tilde{c}_4(\varphi, t), \\ \frac{\partial c}{\partial \varphi}|_{\varphi=Q} = 0, \end{cases} \quad (42)$$

$$l_5 c \equiv \begin{cases} c|_{\varphi=\varphi_0 \pm 0} = \tilde{c}_5(\varphi, t), \\ \left[\mp D \frac{k_{22}^0 v_x^2 + k_{11}^0 v_y^2 - 2k_{12}^0 v_x v_y}{k_{11}^0 v} \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \left(\frac{D}{\sigma} \mp v \right) c \right] \Big|_{\varphi=\varphi_0 \pm 0} = \frac{D}{\sigma} \end{cases} \quad (43)$$

у випадку моделювання сольового включення сильно проникним тілом,

$$l_5 c = \begin{cases} c|_{\phi=\phi_0 \pm 0} = \tilde{c}_5(\varphi, t), \\ \left(\bar{\tau} \nu \frac{\partial c}{\partial \bar{\varphi}} + c \right) \Big|_{\phi=\phi_0 \pm 0} = 1 \end{cases} \quad (44)$$

у випадку моделювання сольового включення абсолютно непроникним тілом,

$$c \Big|_{t=0} = \tilde{c}_0(\varphi, \psi), \quad (45)$$

$\Omega_T = (\varphi, \psi, t: 0 < \varphi < l, 0 < \psi < Q, t > 0) \setminus (\psi = \psi_0, \varphi_1^* \leq \varphi \leq \varphi_2^* \text{ або } \varphi = \varphi_0, \psi_1^* \leq \psi \leq \psi_2^*)$; $l_t, t = \bar{1}, \bar{5}$, - лінійні диференціальні оператори, які задають граничні умови на: вході і виході фільтраційного потоку, контурі гідротехнічної споруди, водопорі, границях сольових включень; коефіцієнти $\alpha(\varphi, \psi), \beta(\varphi, \psi), \gamma(\varphi, \psi), \delta(\varphi, \psi), \delta_1(\varphi, \psi), \delta_2(\varphi, \psi)$, які визначаються із розв'язку задачі фільтрації, а також задані функції $c_0(\varphi, \psi), \tilde{c}_i(\varphi, t), i=1, 2, c_i(\varphi, t), i=3, 4, \tilde{c}_5(\varphi, t) (c_5(\varphi, t))$ - обмежені і достатньо гладкі, що дозволяють проводити всі подальші викладки; функції $\tilde{c}_i, i = \bar{1}, \bar{5}$, задовольняють, якщо це не застережено, умови узгодження на негладких границях області Ω_T .

Побудовано розв'язки даних сингулярно-збурених задач розчинення і вимивання солей і карстових порід з використанням методики переходу до області комплексного потенціалу, аналітичних та чисельних методів конформних і квазіконформних відображень, методу характеристик, асимптотичного методу Вишика-Люстерника та методу кутових погранфункцій.

В залежності від узгодження початкової та граничних умов на негладких границях області Ω_T асимптотичний розв'язок задачі (38)-(45) будується в одному з таких виглядів:

$$c(\varphi, \psi, t; \varepsilon) = c_*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + V^r + R_n, \quad (46)$$

де

$$c_*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) = \bar{c}_1(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + \Pi(\xi, \psi, t; \varepsilon) + Q^0(\varphi, \eta_0, t; \varepsilon) + Q^1(\varphi, \eta_1, t; \varepsilon),$$

$$V^r = \begin{cases} \bar{c}_2(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi, t, \varepsilon) + Q_*^0(\varphi, \eta_*^0, t, \varepsilon) + Q_*^1(\varphi, \eta_*^1, t, \varepsilon), & r=1, \\ \bar{c}_2(\varphi, \psi_0, t; \varepsilon) + Q_*(\varphi, \eta_*, t, \varepsilon) + Q^*(\varphi, \eta^*, t, \varepsilon), & r=2; \end{cases}$$

$$c(\varphi, \psi, t; \varepsilon) = c^*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + V^r + W^r + R_n, \quad (47)$$

де

$$\sigma^*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) = \sigma_*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + P(\xi, \psi, \tau; \varepsilon) + P^0(\xi, \zeta_0, t; \varepsilon) + P^1(\xi, \zeta_1, t; \varepsilon) + \\ + \Gamma^0(\xi, \zeta_0, \tau; \varepsilon) + \Gamma^1(\xi, \zeta_1, \tau; \varepsilon),$$

$$\sigma_*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) = \bar{\sigma}_*(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + \Pi(\xi, \psi, t; \varepsilon) + Q^0(\varphi, \eta_0, t; \varepsilon) + Q^1(\varphi, \eta_1, t; \varepsilon),$$

$$V^r = \begin{cases} \bar{\sigma}_2(\varphi, \psi, t; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi, t, \varepsilon) + Q_*^0(\varphi, \eta_*^0, t, \varepsilon) + Q_*^1(\varphi, \eta_*^1, t, \varepsilon), & r=1, \\ \bar{\sigma}_2(\varphi, \psi_0, t; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi_0, t, \varepsilon) + Q_*(\varphi, \eta_*, t, \varepsilon) + Q^*(\varphi, \eta^*, t, \varepsilon), & r=2, \end{cases}$$

$$W^r = \begin{cases} P_*(\xi_*, \psi, \tau; \varepsilon), & r=1, \\ P_*(\xi_*, \psi_0, \tau; \varepsilon), & r=2; \end{cases}$$

$$\sigma(\varphi, \psi, t; \varepsilon) = \bar{\sigma}^*(\varphi, \psi, t, \varepsilon) + V^r + W^r + R_r, \quad (48)$$

$$\bar{\sigma}^*(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = \bar{\sigma}(\varphi, \psi, t, \theta; \varepsilon) + S_1(\theta_1, \psi, t; \varepsilon) + \Pi(\xi, \psi, t, \theta^*; \varepsilon) + \\ + \Pi(\xi, \psi, \theta^*; \varepsilon) + Q^0(\varphi, \eta_0, t, \theta_0; \varepsilon) + Q^0(\theta_0, \eta_0, t; \varepsilon) + Q^1(\varphi, \eta_1, t, \theta_1; \varepsilon) + \\ + Q^1(\theta_1, \eta_1, t; \varepsilon) + P(\xi, \psi, \tau, \varepsilon) + P^0(\xi, \zeta_0, t, \theta^0; \varepsilon) + P^0(\xi, \zeta_0, \theta^0; \varepsilon) + \\ + P^1(\xi, \zeta_1, t, \theta^1; \varepsilon) + P^1(\xi, \zeta_1, \theta^1; \varepsilon) + \Gamma^0(\xi, \zeta_0, \tau; \varepsilon) + \Gamma^1(\xi, \zeta_1, \tau; \varepsilon),$$

$$V^r = \begin{cases} S_2(\theta_2, \psi, t; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi, t, \theta_*; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi, \theta_*; \varepsilon), & r=1; \\ S_2(\theta_2, \psi_0, t; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi_0, t, \theta_*; \varepsilon) + \Pi_*(\xi_*, \psi_0, \theta_*; \varepsilon) + \\ Q_*(\varphi, \eta_*, t, \theta_*; \varepsilon) + Q_*(\theta_*, \eta_*, t; \varepsilon) + Q^*(\varphi, \eta^*, t, \theta^*; \varepsilon) + \\ + Q^*(\theta^*, \eta^*, t; \varepsilon), & r=2, \end{cases}$$

де $r=1$ відповідає моделюванню солей і карстових порід сильно проникним тілом, $r=2$ - абсолютно непроникним тілом.

Регулярні частини асимптотики, дифузійні поправки (внутрішні перехідні шари), пограншарові поправки (звичайні, сокові і кутові) шукаються шляхом розкладання їх в скінченні ряди Тейлора по малому параметру ε , підстановки у відповідні диференціальні рівняння і крайові умови задачі і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях ε в обох частинах відповідних рівностей. Члени цих розкладів знаходяться із зв'язків відповідних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами або для простіших рівнянь в частинних похідних і виписуються явно в квадратурах.

В шостому розділі сформульовано фізичні і математичні постановки та отримано розв'язки нових задач розчинення та вимивання солей і карстових порід в рамках моделі твердого тіла, розчинення якого відбувається на його поверхні з утворенням зони часткового (зони корозії) або повного розчинення, як в одновимірному так і в двовимірному випадку.

В зв'язку із складністю отримання розв'язку даних задач, спочатку проводиться математичне моделювання процесів розчинення і вимивання солей і карстових порід в одновимірному випадку.

В п. 6.1 розглянуто задачу розчинення та вимивання солей і карстових порід, які залягають у вигляді сольового пласта в основі гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів з врахуванням фазових перетворень. Досліджено чисто дифузійне розчинення при наявності термодифузії монолітного пласта солі необмежених розмірів, перекритого зверху шаром ґрунту дуже великої потужності. Розгляд даної задачі має на меті одержати автономний розв'язок для порівняння його з наближеними розв'язками двовимірних задач, отриманих чисельно-аналітичними методами; вивчити вплив термодифузії на швидкість процесу розчинення в порівнянні з чисто дифузійним розчиненням.

Математична модель задачі в загальноприйнятих позначеннях має вигляд:

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad -l(t) < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (49)$$

$$c(x, 0) = c_0, \quad -l(t) < x < \infty, \quad (50)$$

$$c(\infty, t) = c_0, \quad 0 < t < \infty, \quad (51)$$

$$c(-l(t), t) = c_m, \quad 0 < t < \infty, \quad (52)$$

$$\rho \frac{dl}{dt} = -D \frac{\partial c(-l(t), t)}{\partial x} - D_T \frac{\partial T(-l(t), t)}{\partial x}, \quad 0 < t < \infty \quad (53)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (-\infty < x < \infty) \setminus (x=0), \quad (54)$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_1, & -\infty < x < 0, \\ T_2, & 0 < x < \infty. \end{cases} \quad (55)$$

де $c(x, t)$ - концентрація солі в розчиненій зоні та в ґрунті;

D, D_T - коефіцієнти дифузії та термодифузії відповідно; σ - пористість ґрунту; $l(t)$ - глибина зони повного розчинення пласта; $T(x, t)$ - температура; c_T - питома теплоємність; λ - коефіцієнт теплопровідності; t - час.

Показано, що дана задача володіє автомодельністю, отримано її автомодельний розв'язок

$$T(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \cdot \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha^2 t}}\right), \quad (56)$$

де
$$\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\tau^2} d\tau, \quad \alpha^2 = \frac{\lambda}{c_T \cdot \rho} \quad \zeta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha^2 t}},$$

$$c(x, t) = c_1(x, t) + c_2(x, t), \quad (57)$$

$$c_1(x, t) = c_0 + \frac{c_m - c_0}{1 + \Phi(\alpha)} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{D' t}}\right) \right], \quad (58)$$

$$c_2(\zeta) = \frac{q \cdot \sqrt{\pi}}{4} \cdot e^{p^2/4 - p\zeta} \cdot \left[\operatorname{erf}(\zeta - p/2) - \operatorname{erf}(\zeta_\Phi - p/2) \right], \quad (59)$$

$$p = \frac{2\alpha^2}{D'}, \quad q = -\frac{2 \cdot D_T \cdot (T_2 - T_1)}{\sqrt{\pi}}, \quad \operatorname{erf}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\tau^2} d\tau, \quad \zeta_\Phi = \frac{-l(t)}{2\sqrt{\alpha^2 t}},$$

та закон руху фронту розчинення пласта

$$l(t) = 2\alpha\sqrt{D' t}, \quad (60)$$

де $D = D/\sigma$, а α визначається із розв'язку нелінійного рівняння

$$\left[2\rho D' \alpha e^\alpha + \beta_0 \right] \cdot \left[1 + \Phi(\alpha) \right] - D \cdot (c_m - c_0) = 0, \quad (61)$$

$$\beta_0 = D_T \cdot (T_1 - T_2) \cdot \sqrt{\frac{D'}{\pi \alpha^2}} \cdot e^{\sqrt{D'/\alpha^2}}. \quad (62)$$

В результаті чисельного експерименту виявлено залежність глибини зони повного розчинення пласта від різних фізичних параметрів пласта і ґрунту. Чисельні результати проілюстровані в графічному і табличному вигляді, в результаті аналізу яких встановлено, що термодифузія незначно впливає на процес розчинення пласта солі. На швидкість процесу розчинення значною мірою впливає коефіцієнт молекулярної дифузії та пористість ґрунту.

В п. 6.2 сформульовано фізичну і математичну постановку двовимірної нестационарної задачі розчинення і вимивання солей і карстових порід в основі гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів при умові рівномірного розчинення кривлі

пласта (рис. 7) та переваги процесу конвективного переносу над дифузійним.

Побудовано розв'язок даної сингулярно-збуреної задачі масопереносу розчинених солей і карстових порід з використанням методики переходу до області комплексного потенціалу, аналітичних та чисельних методів конформних і квазіконформних відображень, методу характеристик та асимптотичного методу Вишика-Люстерника.

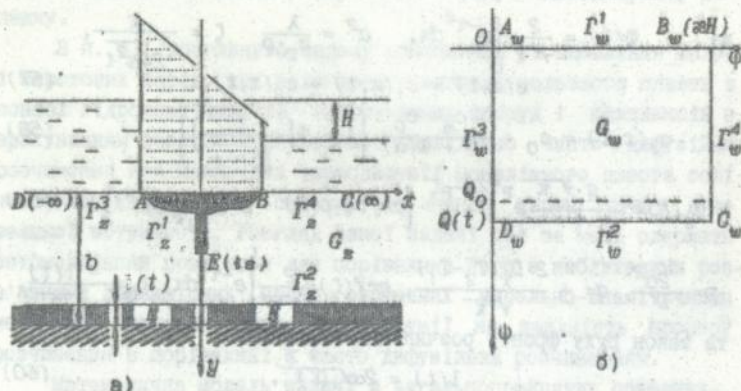


Рис. 7.

Крайова задача в безрозмірних змінних φ , ψ області комплексного потенціалу має вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \quad (63)$$

$$y(0, \psi) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q(t), \quad (64)$$

$$B_1(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad (65)$$

$$y(1, \psi) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q(t), \quad (66)$$

$$y(\varphi, Q(t)) = b(t), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad (67)$$

$$\varepsilon_2 c = v^2(\varphi, \psi) \left[\varepsilon \cdot \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \right) - \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right] - \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (68)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = \tilde{c}_0(\varphi, \psi), \quad (69)$$

$$c(0, \psi, t) = c_1(\psi, t), \quad \frac{\partial c(1, \psi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad (70)$$

$$\frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \psi} = 0, \quad c(\varphi, Q(t), t) = 1, \quad (71)$$

$$\frac{dl}{dt} = - \frac{D}{\rho} v_x(\varphi, Q(t)) \cdot \frac{\partial c(\varphi, Q(t), t)}{\partial \varphi}, \quad (72)$$

де $b=b_0+l(t)$ - глибина зони повного розчинення пласта солі; $Q(t)$ - повна фільтраційна витрата рідини; $0 < \varepsilon = \frac{D}{\rho l} \ll 1$ - малий параметр.

Особливістю даної задачі, яка ускладнює її розв'язок, є те, що область фільтрації в даному випадку є криволінійним чотирикутником, обмеженим двома еквіпотенціальними лініями та двома лініями течії, який деформується в часі.

Для більш простіших форм підземного контура гідротехнічної споруди розв'язок задачі фільтрації знаходиться в замкнутому вигляді аналітичним методом конформного відображення з параметром (час t - параметр) області фільтрації G_z на область комплексного потенціалу за формулою

$$w=w(z, t).$$

Для більш складнішої форми задання підземного контура гідротехнічної споруди знаходження розв'язку оберненої задачі фільтрації проводиться розробленим в розділах 2, 3 чисельним методом конформних та квазіконформних відображень області фільтрації на область комплексного потенціалу або на параметричний прямокутник. Різницєва гідродинамічна сітка фільтраційного потоку отримана в розділі 2.

Використовуючи асимптотичний метод Вишика-Люстерника, асимптотичний розклад задачі побудовано в такому вигляді:

$$c(\varphi, \psi, t, \varepsilon) = \bar{c}(\varphi, \psi, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, \psi, t, \varepsilon) + Q^0(\varphi, \eta_0, t, \varepsilon) + Q^1(\varphi, \eta_1, t, \varepsilon) + P(\xi, \psi, \tau, \varepsilon) + R_n. \quad (73)$$

В цілому процедура побудови асимптотичного розкладу розв'язку задачі повторює побудову асимптотичного розкладу розв'язку задачі у випадку областей фільтрації з фіксованими межами. Особливістю побудови розв'язку даної задачі є побудова рухомого погранишару в околі фронту розчинення пласта. З цієї метою вводиться погранишарова змінна в околі рухомого фронту розчинення $\psi = Q(t)$

$$\eta = \frac{Q(t) - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$$

і будується відповідна погранфункція в околі цієї межі

$$Q^1(\varphi, \eta, t) = \sum_{l=0}^n \varepsilon^{l/2} Q_l^k,$$

яка повинна задовольняти такі вимоги: оправдувати рівняння масопереносу із заданою точністю; ліквідувати нев'язку, створену регулярною частиною розв'язку задачі на фронті розчинення; не вносити нев'язки на сторони $\varphi = 0$ і $t = 0$.

В межах допущення рівномірного розчинення пласта визначено всі погранфункції в явному вигляді.

При визначенні максимальної глибини розчинення $l(t)$ погранфункції $Q^*(\varphi, \eta_k, t)$ знаходяться із розв'язку простіших крайових задач і мають нескладний вигляд.

Глибина зони повного розчинення пласта $l(t)$ знаходиться із розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = -\frac{D}{\rho} v_x \left[\varphi, \frac{K(m(l(t)))}{K(m(l(t)))}, t \right] \cdot \frac{\partial c \left[\varphi, \frac{K(m(l(t)))}{K(m(l(t)))}, t \right]}{\partial \varphi}, \\ l(0) = 0. \end{cases}$$

Для наближеної її оцінки можна скористатися формулою

$$l(t) = -\frac{D}{\rho} \int_0^t v_x(\varphi, Q_0) \frac{\partial c(\varphi, Q_0, t)}{\partial \varphi} dt. \quad (74)$$

В п. 6.3 розглянуто більш складніший випадок розчинення кривлі пласта, форма фронту розчинення якого визначається із самого розв'язку задачі, отримуваного чисельними методами. На межі фронту розчинення пласта ставляться наступні граничні умови:

$$\begin{cases} c|_{DC} = c_m, \\ \frac{dl}{dt} = \frac{1}{\rho \cdot S} \int_{S_1(S)} q_n|_{t=1} dS. \end{cases} \quad (75)$$

В (75) l означає геометричний параметр, що характеризує сімейство фронтів розчинення; $S(l)$ - площа зони повного або неповного (зони корозії) розчинення, заключена між початковим положенням пласта, який розчиняється, і фронтом розчинення.

Математична модель задачі в криволінійних координатах φ, ψ області зведеного комплексного потенціалу $w = \varphi + i\psi$ прийме вигляд

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_w, \quad (76)$$

$$y(0, \psi) = 0, \quad y(l, \psi) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q(t), \quad (77)$$

$$g(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad y(\varphi, Q(t)) = b(t), \quad 0 \leq \varphi \leq l, \quad (78)$$

$$v^2 \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D_1 \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D_2 \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right) - \left[1 + x_\psi \cdot y_t - y_\psi \cdot x_t \right] \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(x_t \cdot y_\psi - y_t \cdot x_\psi \right) \cdot \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\} - \gamma(c-1) = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (79)$$

$$c(0, \varphi, t) = c_1, \quad \frac{\partial c(1, \varphi, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad (80)$$

$$\frac{\partial c(\varphi, 0, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad c(\varphi, Q(t), t) = 1, \quad (81)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = - \left[\int_0^1 \frac{\alpha \varphi}{v^2(\varphi, Q(t))} \right]^{-1} \cdot \int_0^1 D_2 \frac{\partial c(\varphi, Q(t), t)}{\partial \varphi} d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad (82)$$

$$c(\varphi, \psi, 0) = c_0. \quad (83)$$

Остання умова у (81) та отримана в даній роботі формула (82) задають крайові умови на фронті розчинення. Крайова умова (83) задає закон розчинення на фронті розчинення соляного пласта.

В області фільтрації, що еволюціонує, чисельним методом конформних та квазіконформних відображень генерується рухома в часі конформна (що є прообразом рівномірної сітки) або квазіконформна (із згущенням вузлів до фронту розчинення) гідродинамічна різницева сітка, яка адаптується до рухомої межі фронту розчинення пласта солі.

Побудована збіжна монотонна різницева схема даної задачі, яка адитивна і володіє сумарною апроксимацією, та отримано її розв'язок локально-одновимірним методом О. А. Самарського.

Обчислювальний алгоритм побудови чисельного розв'язку даної задачі використовує розраховану різницеву сітку фільтраційного потоку в G_z при умові "замороженості" межі фронту розчинення пласта на кожному кроці по часу та наступному застосуванні методу локально-одновимірних схем.

В результаті чисельного розв'язку даної задачі отримано поле швидкостей фільтрації, поле концентрацій розчиненої речовини, нове положення фронту розчинення солей і карстових порід та еволюцію зони їх розчинення, кількість розчиненої речовини, винесеної з області фільтрації.

Проведений чисельний експеримент дає змогу прогнозувати

утворення карстових осідань та каверн в основах гідротехнічних та енергетичних об'єктів і комплексів, побудованих на закарстованих землях.

Форма фронту зони неповного або повного розчинення в кожен момент часу в результаті розв'язку даної задачі подібна формі фронту розчинення при умові незмінних меж області фільтрації лише з тією різницею, що розчинення проходить менш інтенсивно.

Слід зауважити, що в процесі чисельної побудови розв'язку даної задачі використано алгоритм пункту 5.1 для розрахунку поля концентрації розчинених речовин на кожному півкроці по часу.

Алгоритм знаходження різницевої сітки для певного моменту часу аналогічний алгоритму побудови різницевої сітки для змішеної крайової задачі для системи рівнянь еліптичного типу з вільною межею (розділ IV). Відмінність полягає лише в тім, що в першому випадку модуль прямокутника в G_c знаходився шляхом чисельного конформного відображенням G_w на G_c . В даному випадку модуль $M = 1/Q(t)$ області комплексного потенціалу знаходиться на кожному півкроці по часу в результаті розв'язку задачі конвективної дифузії розчинених речовин (динамічної задачі), а саме - з граничної умови (82) на фронті розчинення.

ВИСНОВКИ

Отримані в дисертаційній роботі результати теоретичних розробок можуть бути використані при розв'язанні конкретних практичних задач, зв'язаних з оцінкою величини деформацій ґрунтів, та прогнозуванні утворення карстових осідань і каверн в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів при проходженні процесів розчинення і вимивання. Ці результати направлені на вирішення важливої технічної проблеми - прогнозування стійкості даних об'єктів, побудованих в несприятливих гідрогеологічних умовах - залягання під ними водорозчинних порід і пластів, загальної закарстованості ґрунтів, тектонічних розломів та ін.

Основним підсумком проведених в дисертаційній роботі досліджень є:

- розвиток актуального напрямку в математичному моделюванні

і прогнозуванні складних фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки, що стосується постановки і розв'язання нових крайових задач розчинення і масопереносу розчинених речовин при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними фіксованими границями, вільними нерухомими та вільними рухомими границями, які моделюють утворення карстових осідань та каверн в основах гідротехнічних та енергетичних об'єктів і комплексів;

- створення адекватних математичних моделей поставлених задач розчинення та вимивання солей і карстових порід;

- розробка і обґрунтування чисельно-аналітичних методів розв'язання відповідних крайових задач;

- створення програмного забезпечення, адаптованого до сучасних ПЕОМ;

- проведення чисельного експерименту та його аналіз.

Зокрема в роботі отримано наступні основні результати:

1. Сформульовано фізичні і математичні постановки нових крайових задач розчинення і вимивання солей і карстових порід, які залягають в основах гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів, при фільтрації підземних вод в складних областях з криволінійними фіксованими границями, вільними нерухомими та вільними рухомими границями при неоднорідності та анізотропії ґрунту.

2. Зведено вихідну крайову задачу масопереносу в фізичній області до крайової задачі в допоміжній області параметричного прямокутника площини $\zeta = \xi + i\eta$ (зокрема, комплексного потенціалу $w = \phi + i\psi$), і сформульовано постановку цієї крайової задачі в новій області.

3. Розроблено чисельні методи конформних та квазіконформних відображень для побудови різницевих сіток в областях складної геометричної форми (однов'язних областях, криволінійних чотирикутниках, двов'язних та трив'язних областях) в прямій і оберненій постановці.

4. За допомогою чисельних квазіконформних відображень розроблено методику управління системою криволінійних координат з метою досягнення локальних згущень ізольованих різницевої сітки в околі окремих меж розглядуваної області або в окремих її підобластях.

5. Виконана програмна реалізація алгоритмів побудови різницевих сіток в криволінійних чотирикутниках, однов'язних,

двоєз'язних і триєз'язних областях та проведено чисельний експеримент, в результаті якого отримано каталог чисельних конформних та квазіконформних відображень найбільш характерних областей.

6. Розроблено чисельний метод розв'язання змішаних крайових задач для систем диференціальних рівнянь еліптичного типу в криволінійних чотирикутниках та його застосування до розв'язання крайових задач фільтрації з вільними границями.

7. Виведено нову балансну граничну умову на межі фронту розчинення солей. На межі рухомого фронту розчинення отримано кінематичну умову, яка виражає закон руху фронту розчинення солей та карстових порід. Виведено рівняння руху фронту розчинення з врахуванням впливу термодифузії на процес розчинення.

8. Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язання крайових задач масопереносу розчинених речовин в допоміжній області з прямолінійними фіксованими границями та в областях, які рівномірно деформуються.

9. Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язання крайових задач класу Стефана та Стефана-Верігіна, які моделюють розчинення і вимивання солей і карстових порід в основах гідротехнічних та енергетичних об'єктів і комплексів в умовах фазових перетворень.

10. Виконана програмна реалізація побудованих алгоритмів розв'язання крайових задач розчинення та вимивання солей і карстових порід з основ гідротехнічних та енергетичних споруд і комплексів та проведено чисельний експеримент при варіації різних параметрів, в результаті якого отримано прогноз еволюції утворення карстових осідань та каверн в основах даних споруд і комплексів, побудованих на закарстованих ґрунтах.

11. Основні результати проведених досліджень використані при проведенні інженерних розрахунків при виконанні і впровадженні науково-дослідних робіт на Рівненській атомній електростанції, Стебницькому державному гірничо-хімічному підприємстві "Полімінерал", Дністровській гідроакумуляційній електростанції.

Автор вважає своїм обов'язком висловити глибоку подяку за цінні поради та постійну увагу при виконанні даної роботи своєму науковому консультанту доктору технічних наук, професору В. І. Лаврику.

ОСНОВНІ РОБОТИ, ЯКІ ОПУБЛІКОВАНІ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ:

1. Власюк А.П. Чисельне розв'язання задачі розчинення і винесення пластових солей з основи гідротехнічних споруд// Доп. НАН України, -1995. - № 7. - С. 37-39.
2. Власюк А.П. Некоторые случаи фильтрации под флютами в анизотропных средах// Мат. методы исследования фильтрации и массопереноса.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984.- С. 77-84.
3. Лаврик В.И., Власюк А.П. Некоторые задачи фильтрации и массопереноса в неоднородных анизотропных пористых средах.- Киев, 1985.- 59 с.- (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 85.15).
4. Власюк А.П. Об одной сингулярно возмущенной задаче массопереноса растворимых веществ при фильтрации в однородной анизотропной среде// II Всесоюз. конф. "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", Киев, 9-11 сент. 1985 г.: Тез. докл.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 55-57.
5. Лаврик В.И., Дао Минь Нгок, Власюк А.П. Математическое моделирование процессов изменения качественного состава поверхностных и подземных вод при их взаимодействии.- Киев, 1986. - 60 с.- (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 86.52).
6. Лаврик В.И., Власюк А.П. Конвективная диффузия растворимых веществ при фильтрации в неоднородных изотропных грунтах// Теория гидродинамических моделей технических задач: Об. науч. тр. - Свердловск; Свердл. пед. ин-т, 1988.- С. 95-103.
7. Власюк А.П. Чисельне розв'язання однієї задачі класу Стефана-Веригіна// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.- Киев; Ин-т математики, 1994.- С. 45-46.
8. Власюк А.П. Чисельне розв'язання однієї задачі конвективної дифузії розчинених речовин з вільною межею// Тез. доп. 1-ї Міжнародної конференції "Чисельні методи в гідравліці і гідродинаміці", Донецьк, 30 серп. - 3 верес. 1994 р.- Донецьк, ДонДУ, 1994. - С. 80.
9. Михальчук В.Г., Власюк А.П. Применение квазиконформных отображений к управлению численным автоматическим построением разностных сеток// Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометр. теории функций, Новосибирск, 18-20 окт. 1988 г.- Новосибирск, 1988. - С. 72.
10. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных облас-

тей с помощью разностных сеток с "плавающими" узлами. - Киев, 1989.- 56 с.- (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 89.79).

11. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двусвязных и трехсвязных областей.- Киев, 1991.- 56 с.- (Препр./АН Украины. Ин-т математики; 91.57).

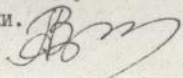
12. Михальчук В.Г., Власюк А.П. Застосування конформних і квазиконформних відображень до чисельної автоматичної побудови різницьових сіток // Вибрані питання математичного аналізу, алгебри і геометрії. Збірник наукових праць.- Львів-Рівне: Львівське математичне товариство - Рівненський пед. ін-т, 1991.- С. 39-48.

13. Власюк А.П., Михальчук В.Г. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь. - Київ, 1994.- 24 с.- (Препр./АН України. Ін-т математики; 94.36).

Власюк А.П. Теоретическое исследование процессов растворения и вымывания солей и карстовых пород при фильтрации подземных вод в областях с криволинейными и свободными границами. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.02 - математическое моделирование в научных исследованиях. Киевский университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1996. Защищается 25 научных работ, которые содержат теоретическую разработку численных и численно-аналитических методов математического моделирования и прогнозирования сложных физико-химических процессов подземной гидромеханики, связанных с проблемой растворения и вымывания солей и карстовых пород, прогнозирования просадок и образования cavern в основаниях гидротехнических и энергетических объектов и комплексов.

A.P. Vlasjuk. Theoretical analysis of processes of dissolution and washing out of salts and piping during ground water seepage in domains with curvilinear and free boundaries. Doctor of technical science thesis, specialization 05.13.02 - mathematical modelling in scientific analyses. Taras Shevchenko Kyiv University, Kyiv, 1996. 25 scientific works are defended. These works contain theoretical elaboration of numerical and numerically-analytic methods of mathematical modelling and forecasting for complex physical and chemical processes of underground hydromechanics which deal with the problem of dissolution and washing out salts and piping, with the prediction of the subsidence of rock in bases of hydro-technical constructions and cavity appearance in them.

Ключові слова: фільтрація, масоперенос, розчинення і вимивання солей, карстові породи, криволінійні і вільні границі, математичні моделі, чисельно-аналітичні методи, крайова задача, чисельні конформні і квазіконформні відображення, різницеві сітки.



AB 34.730

AB 34.730