НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ПАШКОВА Юлия Сергеевна

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ, ЗАКРЫТОМ УПРУГОЙ МЕМБРАНОЙ, И ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ЭВОЛЮЦИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Донецк 1996

Работа выполнена на кафедре математического анализа Симферопольского государственного университета.

Научный руководитель: – доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки и техники Украины, профессор **Н.Д.Копачевский.**

Официальные оппоненты: – доктор физико-математических наук, профессор **А.Г.Руткас,**

– кандидат физико-математических наук, доцент **М.М.Маламуд.**

Ведущая организация: Институт математики Нацианальной Академии Наук Украины.

Защита диссертации состоится "19" июня 1996 года в 15 часов на заседании Специализированного Совета по защите диссертаций Д. 06.01.01 в Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, Донецк, ул.Р.Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Автореферат разослан "7" мая 1996 г.

Ученый секретарь специализированного Совета, кандидат физ. - мат. наук А.И.Марковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одной из важнейших составляющих общей задачи динамики тела с полостью, содержащей жидкость, является задача о движении жидкости в неподвижном сосуде. Этой проблеме посвящено достаточно много работ и монографий.

Упомянем коротко об изученных задачах, имеющих непосредственное отношение к тематике данной работы. Задача о малых колебаниях тяжелой идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд произвольной формы исследовалась в работах Н.Н.Моисеева, а для капиллярной жидкости — в работах Н.Н.Моисеева и Ф.Л.Черноусько, а также Н.Д.Копачевского, М.Я.Барняка, И.А.Луковского, А.Н.Комаренко и других. В работах Нго Зуй Кана, а также последующих исследованиях Н.Д.Копачевского и А.В.Андронова изучена задача о колебаниях жидкости в контейнере с упругими днищами. Проблема колебаний вязкой жидкости в частично заполненном сосуде нашла свое отражение в работах С.Г.Крейна, а также его учеников Г.И.Лаптева и Н.К.Аскерова. Дальнейшие исследования проводились Н.Д.Копачевским. Задача о колебаниях капиллярной вязкой жидкости исследовалась С.Г.Крейном, Н.Д.Копачевским, А.Д.Мышкисом.

До сих пор, однако, оставались в стороне близкие, на первый взгляд проблемы колебаний идеальной либо вязкой жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной. Оказалось, что наличие ненулевой плотности мембраны принципиально влияет на свойства спектра частот колебаний таких гидросистем.

Последние десятилетия характеризуются возросшим интересом к рассмотрению дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Вопросы корректной разрешимости и устойчивости решений таких уравнений исследованы в монографиях С.Г.Крейна, Ю.Л.Далецкого и М.Г.Крейна, Дж.Голдстейна, Х.Массера и Х.Шеффера, Д.Хенри и других. В них, в частности, существенно используется теория полугрупп линейных операторов.

В диссертации рассмотрен один класс таких уравнений в сепарабельном гильбертовом пространстве, имеющий достаточно широкие приложения в гидродинамике.

Цель работы. Исследование задач о колебаниях жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной. Изучение вопросов разрешимости соответствующих начально-краевых задач, проблемы нормальных колебаний указанных гидросистем. Исследование общих вопросов разрешимости и устойчивости решений одного класса дифференциально-операторных уравнений, имеющего широкие приложения в задачах гидродинамики.

Методы исследования. В работе применяются методы функционального анализа, в частности, методы спектральной теории операторных пучков. Существенно используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и дифференциально-операторных уравнений в гильбертовых пространствах.

Научная новизна. В работе рассмотрен новый класс задач гидродинамики. Доказаны теоремы о существовании сильного решения начально-краевой задачи в случае систем, содержащих идеальную жидкость и мембраны. Найдены условия существования обобщенного решения задачи о колебаниях вязкой жидкости, ограниченной упругой мембраной. Получены результаты, касающиеся структуры и характера спектра соответствующих задач о нормальных колебаниях. Доказаны теоремы о корректной разрешимости задачи Коши для одного класса дифференциально-операторных уравнений второго порядка, имеющего широкие приложения в гидродинамике. Для этих уравнений рассмотрены вопросы устойчивости решений.

Практическая ценность. Результаты работы могут быть использованы в дальнейших исследованиях различных задач гидродинамики, в частности, задач, связанных с гидросистемами, содержащими мембранные перегородки. На их основе могут быть проведены расчеты частот и форм колебаний этих гидродинамических систем, а также найдены в множестве физических параметров системы зоны неустойчивости нормальных колебаний.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на I – VI Крымских осенних математических школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Крым, Севастополь, 1990 – 1995 г.г.), XXI – XXV научных конференциях профессорско-преподавательского состава Симферопольского госуниверситета (Симферополь, 1992 – 1996 г.г.), на семинаре сектора стохастической динамики систем Института проблем передачи информации РАН (Москва, 1996 г.), на совместном семинаре академика НАН Украины И.В.Скрыпника и проф. Б.В.Базалия в Институте прикладной математики и механики (Донецк, 1996 г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в шести работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем работы — 111 страниц. Библиография содержит 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные результаты работы. Во введении дана краткая историческая справка по кругу вопросов, имеющих отношение к теме работы. Проведен обзор полученных результатов. Выделены положения, выносимые на защиту.

Нумерация параграфов в диссертации сквозная. Нумерация теорем в диссертации и автореферате общая. В работе приняты термины и обозначения из монографии Н.Д.Копачевского, С.Г.Крейна, Нго Зуй Кана "Операторные методы в линейной гидродинамике".

В первой главе §1 – §3 рассмотрены гидросистемы с упругими мембранами, содержащие идеальную жидкость или систему несмешивающихся идеальных жидкостей.

Первый параграф носит вспомогательный характер. В нем приведены необходимые сведения об основных пространствах и операторах линейной гидродинамики, используемых далее в диссертации. Вводятся гильбертовы пространства полей скоростей идеальной жидкости, заполняющей сосуд Ω с твердой стенкой S и равновесной свободной поверхностью Γ. Приводится ортогональное разложение пространства $\vec{L}_2(\Omega)$, приспособленное к задачам о движении жидкости со свободной границей

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{1}$$

Здесь: $\vec{J}_0(\Omega)$ — подпространство соленоидальных полей с нормальной составляющей, равной нулю на границе $\partial\Omega$; $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ — подпространство потенциальных полей с потенциалами, обращающимися в нуль на свободной поверхности Γ; подпространство $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ состоит из тех гармонических полей, для которых нормальная составляющая поля обращается в нуль на S. Аналогичное разложение введено для системы несмешивающихся жидкостей. Далее введены в рассмотрение основные гильбертовы пространства полей, связанные с движением вязкой несжимаемой жидкости.

Во втором параграфе рассмотрена проблема малых колебаний однородной идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей область Ω сосуда, и ограниченной сверху упругой мембраной Γ. Предполагается, что сосуд имеет произвольную форму и неподвижен. Мембрана равномерно растянута в состоянии покоя с натяжением σ, жестко закреплена по контуру $\partial\Gamma$, является плоской и имеет поверхностную плотность ρ_0. Система координат расположена таким образом, что плоскость Ox_1x_2 лежит на равновесной Γ, а ось Ox_3 направлена против ускорения свободного падения $\vec{g}$.

Рассмотрены состояние покоя системы и задача о малых колебаниях. Начально-краевая задача для малых движений жидкости в терминах полей смещений $\vec{w}$ имеет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p(t,x) + \vec{f}(t,x), \quad \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в}\,\Omega),\\
\vec{w}\cdot\vec{n} =: w_n = 0 \quad (\text{на}\,S),\\
\rho_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \sigma\Delta_2\zeta - \rho g\zeta + p \quad (\text{на}\,\Gamma), \quad \zeta = 0 \quad (\text{на }\partial\Gamma),\\
\vec{w}(0,x) = \vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial\vec{w}}{\partial t}(0,x) = \vec{u}^0(x).
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь ρ — плотность жидкости; p — динамическое давление, равное разности полного давления P и давления, установившегося в жидкости в состоянии покоя P_0; $\vec{f}(t,x)$ — массовая плотность внешних сил, действующих на систему. Через $\zeta(t,\hat{x})$ $(\hat{x} = (x_1,x_2)\in\Gamma)$ обозначено отклонение мембраны от состояния равновесия, а через $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$.

С помощью ортогонального проектирования на подпространства из (1) в задаче (2) осуществлен переход к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве $H = L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$:

$$A\frac{d^2\zeta}{dt^2} + B\zeta = F(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0; \quad \zeta'(0) = \zeta^1. \tag{3}$$

Доказано, что оператор A, действующий в H самосопряжен, положительно определен и ограничен. Оператор B является положительно определенным и имеет компактный обратный. $F(t)$ — заданная функция, порожденная внешним полем массовых сил $\vec{f}(t,x)$.

Определение 2.1. Назовем сильным решением задачи Коши (3) на отрезке $[0,T]$ функцию $\zeta(t)$ со значениями в $L_{2,\Gamma}$, для которой $\zeta(t) \in D(B), \quad \forall t \in [0,T]$, функции $\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}$ и $B\zeta(t)$ принадлежат пространству $C[0,T;L_{2,\Gamma}]$ и выполнено уравнение (3).

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* $\zeta^0 \in D(B)$, $\zeta^1 \in D(B^{1/2})$, $F(t) \in C^1[0,T;L_{2,\Gamma}]$, *то задача (3) имеет сильное решение, для которого выполнен закон баланса полной энергии системы*

$$\frac{1}{2}(\|\zeta'\|_A^2 + \|\zeta\|_B^2) = \frac{1}{2}(\|\zeta^1\|_A^2 + \|\zeta^0\|_B^2) + \int_0^t (F, \frac{d\zeta}{d\tau})\,d\tau.$$

На основании этого утверждения доказана теорема о разрешимости исходной начально-краевой задачи (2).

Теорема 2.2. *Пусть в начально-краевой задаче (2) выполнены условия*

$$\vec{w}^0(x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \vec{u}^0(x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad (\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)),$$

$$(\gamma_n \vec{w}^0)(\hat{x}) \in \overset{0}{H}{}^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}, \quad (\gamma_n \vec{u}^0)(\hat{x}) \in \overset{0}{H}{}^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma},$$

$$\vec{f}(t,x) \in C^1[0,T;\vec{L}_2(\Omega)].$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение, то есть такие функции $\vec{w}(t,x) \in C^2[0,T;\vec{J}_{0,S}(\Omega)]$, $\nabla p(t,x) \in C[0,T;\vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)]$, *для которых при любом* $t \in [0,T]$ *выполнены уравнения и граничные условия (2): первое уравнение (2) — в пространстве* $\vec{L}_2(\Omega)$, *а динамическое граничное условие на* Γ *— в пространстве* $L_2(\Gamma)$.

Далее рассмотрены свободные колебания системы, то есть такие решения задачи (3) при $F(t) \equiv 0$, когда функция $\zeta(t)$ зависит от t по закону $\zeta(t) = \exp(i\omega t)\zeta$, где ω — частота колебаний, а элемент $\zeta(\hat{x}) \in L_{2,\Gamma}$ — амплитудная функция. Для нахождения элементов ζ возникает спектральная задача

$$B\zeta = \lambda A\zeta, \quad \lambda = \omega^2. \tag{4}$$

Теорема 2.3. *Задача (4) имеет дискретный положительный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$ *и систему собственных элементов* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, *образующих ортогональный базис как в энергетическом пространстве* H_A, *так и в энергетическом пространстве* $H_B = \overset{0}{H}{}^1(\Gamma) \cap H$.

Использование максиминимального принципа Р.Куранта позволяет установить двусторонние неравенства для собственных значений λ_k задачи (4).

Теорема 2.4. *Имеют место двусторонние неравенства*

$$\mu_k/[1+\rho\|C\|/\rho_0] \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k, \quad k \in \mathbb{N},$$
$$\mu_k = (\lambda_k)_{\text{мембр}} + \rho g/\rho_0, \quad (\lambda_k)_{\text{мембр}} = \sigma\rho_0^{-1}\lambda_k(-\Delta_2),$$
$$\lambda_k(-\Delta_2) = \left(\frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi}\right)^{-1} k[1+o(1)] \quad (k\to\infty),$$

где C — положительный компактный оператор, возникающий при переходе от начально-краевой задачи (2) к задаче Коши (3).

Теорема 2.5. *При $k \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_k = \mu_k[1+o(1)].$$

Эти теоремы показывают, что при наличии мембраны в изучаемой гидросистеме асимптотическое поведение λ_k при $k \to \infty$ определяется собственными значениями задачи о колебаниях мембраны в отсутствие жидкости.

Третий параграф посвящен малым колебаниям системы $m+1$ идеальных жидкостей, разделенных m мембранными перегородками Γ_k $(k=\overline{1,m})$. Жидкости заполняют неподвижный замкнутый сосуд Ω. Часть сосуда, заполненную k-ой $(k=\overline{1,m+1})$ жидкостью, обозначим через Ω_k. Соответствующую часть стенки сосуда — через S_k. Жидкости пронумерованы снизу вверх и расположены в порядке уменьшения величины плотности ρ_k, то есть $0<\rho_{k+1}<\rho_k$, $k=\overline{1,m+1}$. Предполагается, что в отсутствие жидкостей мембранные перегородки Γ_k равномерно натянуты с коэффициентами натяжения σ_k и жестко закреплены по соответствующим контурам $\partial\Gamma_k$. Они являются плоскими и имеют поверхностные плотности $\rho_{0,k}$ $k=\overline{1,m}$. Считается, что при наличии жидкостей объемы соответствующих областей такие же, как и объемы при отсутствии жидкостей. Система координат выбрана таким образом, чтобы плоскость Ox_1x_2 была параллельна равновесным Γ_k, а ось Ox_3 была направлена против вектора $\overrightarrow{g}$.

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрены стационарная задача и задача о малых колебаниях гидросистемы. Путем проектирования уравнений начально-краевой задачи на специальные функциональные подпространства, осуществлен переход к задаче Коши для дифференциального уравнения. Оказалось, что эта задача имеет вид (3) и изучается в гильбертовом пространстве $L_{2,\Gamma} := \oplus_{k=1}^{m}(L_2(\Gamma_k)\ominus\{1_k\})$. Для задачи Коши и для исходной начально-краевой задачи доказаны теоремы о существовании сильного решения (теорема 3.1 и теорема 3.2), аналогичные теоремам 2.1 и 2.2.

Рассмотрение собственных колебаний гидросистемы позволило получить выводы, подобные сделанным в теоремах 2.3 – 2.5 (см. теоремы 3.3 – 3.5).

Во второй главе (§4 – §6) изучаются вопросы, связанные с малыми движениями вязкой жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной.

В четвертом параграфе использован операторный подход к проблеме малых движений вязкой жидкости, частично заполняющей область Ω сосуда, ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ, на которой расположена упругая мембрана. Снова считаем, что ρ_0 — поверхностная плотность мембраны, а σ — величина ее предварительного растяжения. Для поля скоростей

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(t,x)$ жидкости, динамического давления $p = p(t,x)$ и вертикального отклонения мембраны $\zeta = \zeta(t,\hat{x})$ $\quad (\hat{x} = (x_1, x_2))$ линеаризованная постановка задачи о малых колебаниях гидросистемы имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\rho\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu\Delta\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{f}, \quad \operatorname{div}\overrightarrow{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega),\\
&\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad (\text{на } S), \quad \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma;\, i = 1,2),\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_n\overrightarrow{u} := \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma),\\
&\rho_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \sigma\Delta_2\zeta - \rho g\zeta + p - 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int\limits_{\Gamma}\zeta d\Gamma = 0,\\
&\overrightarrow{u}(0,x) = \overrightarrow{u}^0(x) \quad (\text{в } \Omega), \quad \zeta(0,\hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}), (\hat{x} = (x_1,x_2) \in \Gamma).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь $\overrightarrow{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, μ — коэффициент динамической вязкости жидкости. Задача рассматривается в предположении, что вязкие слои жидкости свободно скользят вдоль мембраны.

Методами, разработанными в монографии Н.Д.Копачевского, С.Г.Крейна, Нго Зуй Кана "Операторные методы в линейной гидродинамике", осуществлен переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\widetilde{H} = \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega) \oplus H \quad (H := L_2(\Gamma) \ominus \{1\})$:

$$
C\frac{dy}{dt} + Fy = f(t), \quad y(0) = y^0, \tag{6}
$$

где $y(t) = (\overrightarrow{u}, \sigma^{1/2}B_\sigma^{1/2}\zeta)^t$ — искомый вектор-столбец, а положительно определенный оператор B_σ определен соотношением $B_\sigma\zeta := P_H(-\Delta_2\zeta + \rho g\sigma^{-1}\zeta)$, $\quad P_H$ — ортопроектор на H, $D(B_\sigma) = \overset{0}{H}{}^2(\Gamma) \cap H$. Вектор $f(t) = (\rho P_{0,S}\overrightarrow{f}, 0)^t$ ($P_{0,S}$ — ортопроектор на $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$). Оператор C неограничен и положительно определен в $\widetilde{H}$. Оператор F определен на множестве, плотном в $\widetilde{H}$ и является замкнутым, причем $D(F) \subset D(C)$. Оператор $(-F)$ является максимальным диссипативным оператором.

Определение 4.1. Назовем сильным решением задачи Коши (6) функцию $y(t)$ со значениями в $\widetilde{H} = \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega) \oplus H$, для которой при любом $t \in [0,T]$ будет $y(t) \in D(F)$, $dy/dt \in D(C)$ и выполнено уравнение (6).

Определение 4.2. Назовем обобщенным решением задачи Коши (6) функцию $y(t)$, для которой $dy/dt \in \widetilde{H}_C = D(C^{1/2}) \supset D(F)$ и выполнено соотношение

$$
\frac{dy}{dt} + \overline{C^{-1}Fy} = C^{-1}f(t) \tag{7}
$$

где через $\overline{C^{-1}F}$ обозначено замыкание оператора $C^{-1}F$ в $\widetilde{H}_C$.

Теорема 4.1. *Если набор функций $\overrightarrow{u}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\zeta(t,\hat{x})$ является классическим решением задачи (5), причем*

$$\frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}(t,x) \in C[0,T;C^1(\Omega)], \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}(t,\hat{x}) \in C[0,T;C^1(\overline{\Gamma})],$$

то функция $y(t) = \left(\overrightarrow{u}(t,x),\ \sigma^{1/2}B_\sigma^{1/2}\zeta(t,\hat{x})\right)^t$ является сильным решением задачи (6), а потому и обобщенным решением задачи Коши для уравнения (7).

Теорема 4.2. *Если выполнены условия*

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{f}(t,x) \in C^1[0,T;\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)], \quad \overrightarrow{u}^0(x) \in D(A)\cap D(B_\sigma^{1/2}\gamma_n), \\ &\zeta^0(\hat{x}) \in D(B_\sigma)\cap H^{5/2}(\Gamma), \end{aligned} \tag{8}$$

то задача (5) имеет единственное обобщенное решение.

Здесь A — оператор, возникающий при переходе от начально-краевой задачи к системе дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Он самосопряжен и положительно определен в $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$, ($\overrightarrow{J}^{\,1}_{0,S}(\Omega)\cap\overrightarrow{H}^2(\Omega)\subset D(A)$, пространство $\overrightarrow{J}^{\,1}_{0,S}$ состоит из соленоидальных, обращающихся в нуль на S полей из $\overrightarrow{H}^1$). Оператор γ_n — это оператор взятия нормального следа на границе.

Теорема 4.3. *Если выполнены условия (8), то для обобщенного решения задачи (5) выполнен закон баланса полной энергии*

$$\frac{d}{dt}\left\{\left[\frac{1}{2}\rho\int\limits_\Omega|\overrightarrow{u}|^2\,d\Omega + \frac{1}{2}\rho_0\int\limits_\Gamma\left|\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|^2 d\Gamma\right] + \frac{1}{2}\left[\sigma\int\limits_\Gamma(|\nabla_2\zeta|^2+\rho g\sigma^{-1}|\zeta|^2)\,d\Gamma\right]\right\} =$$

$$= -\mu E(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}) + \rho\int\limits_\Omega \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{u}\,d\Omega,$$

$$E(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^3\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|^2 d\Omega.$$

В пятом параграфе рассмотрена плоская задача о нормальных колебаниях (решениях однородной задачи (5), зависящих от t по закону $\exp(-\lambda t)$) вязкой жидкости, заполняющей прямоугольный канал глубины h и ограниченной сверху упругой мембраной.

Безразмерная форма этой задачи в терминах функций тока имеет вид:

$$\begin{aligned} &-\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \nu\Delta\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad (\text{в } \Omega), \\ &\psi = \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \lambda\zeta = \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = 0 \quad (\text{на } \Gamma) \\ &\lambda\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \sigma\lambda^{-1}\frac{\partial^3\psi}{\partial x_1^3} - \lambda^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + p + 2\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2} \quad (\text{на } \Gamma), \end{aligned} \tag{9}$$

где ν — кинематическая вязкость жидкости.

На вертикальных стенках канала условие $\dfrac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ заменено на модельное условие периодического продолжения решения по переменной x_1 таким образом, чтобы функция $\psi(x_1, x_2)$ была нечетной функцией x_1. Тогда $p(x_1, x_2)$ будет четной функцией x_1.

После разделения переменных в модельной задаче получено характеристическое (относительно собственных значений λ) уравнение:

$$\frac{\operatorname{th}\sqrt{k^2 - \frac{\lambda}{\nu}}h}{\sqrt{k^2 - \frac{\lambda}{\nu}}h} = \frac{1}{kh}\frac{P_{2k}(\lambda)}{Q_{2k}(\lambda)} + \frac{1}{\operatorname{ch} kh \operatorname{ch}\sqrt{k^2 - \frac{\lambda}{\nu}}h}\frac{4\lambda - 8k^2\nu}{hQ_{2k}(\lambda)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Здесь $P_{2k}(\lambda)$ и $Q_{2k}(\lambda)$ — многочлены второй степени относительно λ, зависящие от физических параметров задачи и номера k. Изучение свойств решений уравнения (10) позволяет сделать следующие выводы относительно спектра модельной задачи.

1^0. Задача (9) имеет дискретный спектр, расположенный в правой комплексной полуплоскости, с единственной предельной точкой на бесконечности.

2^0. Существует ветвь положительных собственных значений $\{\lambda_{km}\}_{k,m=1}^{\infty}$, которой отвечают как угодно большие апериодические затухающие режимы нормальных колебаний. При этом

$$\lambda_{km} = \lambda_{km}^0[1 + o(1)] \quad (k, m \to \infty), \quad \lambda_{km}^0 := \frac{\nu}{h^2}\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right)^2 + \nu k^2.$$

3^0. Кроме выделенной в 2^0 существует еще две ветви собственных значений $\{\lambda_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ с асимптотикой $O(k)$ $(k \to \infty)$. Эти ветви имеют различное качественное поведение в зависимости от физических параметров задачи.

а) В частности, если вязкость жидкости настолько велика, что $\nu^2 > \rho_0\sigma$, то указанные ветви расположены на $\mathbb{R}_+$ и

$$\lambda_k^{\pm} = [\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \rho_0\sigma}]\rho_0^{-1}k[1 + o(1)] \quad (k \to \infty).$$

б) При малой вязкости $(\nu^2 < \rho_0\sigma)$ эти ветви переходят в правую комплексную полуплоскость и асимптотически примыкают к двум прямым:

$$\operatorname{Im}\lambda = \pm\sqrt{\rho_0\sigma - \nu^2}\,\nu^{-1}\operatorname{Re}\lambda.$$

в) В промежуточном случае, когда $\nu^2 = \rho_0\sigma$, ветви $\{\lambda_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ также расположены в правой комплексной полуплоскости и асимптотически примыкают к ветвям параболы:

$$3\nu\operatorname{Re}\lambda = 2\rho_0^2(\operatorname{Im}\lambda)^2.$$

Из свойств 1^0 – 3^0 следует, что при наличии упругой мембраны в вязкой жидкости с достаточно большой вязкостью все нормальные колебания являются апериодически затухающими. При достаточно малой вязкости существует счетное множество невещественных собственных значений, которым отвечают осциллирующие затухающие режимы колебаний.

В шестом параграфе на основе рассмотрений начально-краевой задачи о колебаниях вязкой жидкости в сосуде, ограниченной упругой мембраной (§4), изучается задача о нормальных колебаниях в произвольном контейнере.

Для поля смещений $\overrightarrow{w}(t) = \overrightarrow{w}\exp(-\lambda t)$ возникает спектральная задача для квадратичного операторного пучка с неограниченными операторными коэффициентами:

$$\lambda^2(\rho I + \rho_0 G\gamma_n)\overrightarrow{w} - \lambda\mu A\overrightarrow{w} + \sigma G B_\sigma \gamma_n \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}\,. \tag{11}$$

Здесь γ_n — оператор взятия нормального следа на Γ, оператор G ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $\overrightarrow{G}_{h,S}(\Omega)$. При этом

$$(G\psi, \overrightarrow{u})_{\overrightarrow{L}_2(\Omega)} = (\psi, \gamma_n\overrightarrow{u})_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\psi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega).$$

Операторы A и B_σ удовлетворяют условиям:

$$A \gg 0, \quad \text{в } \overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega), \quad 0 < A^{-1} \in \mathcal{S}_\infty,$$
$$B_\sigma \gg 0 \quad \text{в } H = L_2\Gamma \ominus \{1\}, \quad 0 < B_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_\infty.$$

Задача (11) приведена к линейной относительно λ задаче в ортогональной сумме пространств $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \overrightarrow{M}_0(\Omega)$, где $\overrightarrow{M}_0(\Omega)$ — некоторое бесконечномерное подпространство из $\overrightarrow{J}_{0,S}(\Omega)$. Для этой линейной задачи доказано, что ее спектр дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и имеет единственную предельную точку $\lambda = \infty$ (теорема 6.1).

Итоговое утверждение параграфа установлено при условии, что для оператора A выполнено свойство $D(A) \subset R(A^{-1}) \cap \overrightarrow{H}^2(\Omega)$.

Теорема 6.2. *Спектр задачи о нормальных колебаниях вязкой жидкости в сосуде, ограниченной упругой мембраной, дискретен, расположен в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси и имеет единственную предельную точку $\lambda = \infty$. Если вязкость жидкости настолько велика, что*

$$\mu > \sigma^{1/2}\|B_\sigma^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\| \cdot (\rho\|A^{-1/2}\| + \rho_0\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)^{1/2},$$

то спектр задачи лежит в секториальной области

$$\Lambda(\mu) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \operatorname{Re}\lambda_1(\mu) > 0, \quad \operatorname{tg}|\arg\lambda| \leqslant \kappa(\mu)\},$$
$$\kappa(\mu) := \frac{\sigma^{1/2}\mu^{-1}\|B_\sigma^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|(\rho\|A^{-1/2}\| + \rho_0\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)^{1/2}}{1 - \sigma\mu^{-2}\|B_\sigma^{1/2}\gamma_n A^{-3/4}\|^2(\rho\|A^{-1/2}\| + \rho_0\|\gamma_n A^{-1/4}\|^2)} > 0.$$

Через $\lambda_1(\mu)$ здесь обозначено первое (в порядке возрастания по $\operatorname{Re}\lambda$) собственное значение задачи.

В третьей главе рассмотрены некоторые общие вопросы эволюции гидродинамических систем.

В седьмом параграфе изучены проблемы разрешимости в сепарабельном гильбертовом пространстве H, задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$A\frac{d^2u}{dt^2}+(F+K)\frac{du}{dt}+Bu=f(t),\quad u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1, \tag{12}$$

описывающего малые движения гидросистемы.

Здесь $u(t)$ — искомая функция (поле смещений системы) переменной t со значениями в H, $f(t)$ — заданная функция. Оператор кинетической энергии A положительно определен и ограничен в H. Оператор потенциальной энергии B самосопряжен и полуограничен снизу ($B=B^*\geqslant\gamma I,\gamma\in\mathbb{R}$). Далее, K — кориолисов оператор: $K^*=-K\in\mathcal{L}(H)$, F — оператор диссипации: $F\geqslant 0$. Учитывая свойства оператора A, для простоты полагаем, что $A=I$.

Определение 7.1. Решением дифференциального уравнения (12) назовем функцию $u(t)$ со значениями в H, для которой при любом $t\in[0,T]$, $T>0$, будет

$$\begin{gathered}u(t)\in D(B),\quad Bu(t)\in C[0,T;H];\quad u'(t)\in D(F)\cap D(B^{1/2}),\\ Fu'(t)\in C[0,T;H],\quad u''(t)\in C[0,T;H]\end{gathered} \tag{13}$$

и выполнено уравнение (12).

Если свойство $B\geqslant 0$ не выполнено, то считаем, что $B=B_+-B_-$, где $B_+\geqslant 0$, $0<B_-\in\mathcal{L}(H)$, и тогда $u'(t)\in D(F)\cap D(B_+^{1/2})$.

Теорема 7.1. *Пусть в задаче Коши (12) выполнены условия*

$$B\geqslant 0,\quad f(t)\in C^1[0,T;H],\quad u^0\in D(B),\quad u^1\in D(F)\cap D(B^{1/2}).$$

Тогда она имеет единственное решение $u(t)$, и для этого решения выполняется закон баланса энергии системы:

$$\frac{1}{2}(\|u'(t)\|_H^2+\|B^{1/2}u\|_H^2)=\frac{1}{2}(\|u^1(t)\|_H^2+\|B^{1/2}u^0\|_H^2)-$$
$$-\int_0^t\|F^{1/2}u'(\tau)\|_H^2\,d\tau+\int_0^t(f(\tau),u'(\tau))_H\,d\tau,\quad t\in[0,T]. \tag{14}$$

Построенная по решению $u(t)$ функция $y(t):=(u'(t);-iB^{1/2}u(t))^t$, со значениями в $H^2=H\oplus H$ является непрерывно-дифференцируемой и представима в виде

$$\begin{gathered}y(t)=U(t)y^0+\int_0^t u(t-\tau)\widetilde{f}(\tau)\,d\tau,\\ \widetilde{f}(t):=(f(t),0)^t,\quad y^0:=(u^1,-iB^{1/2}u^0)^t,\end{gathered} \tag{15}$$

где $U(t)$ — сжимающая полугруппа операторов с генератором $-\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}2iG+F & iB^{1/2}\\ iB^{1/2} & 0\end{pmatrix},\quad G=G^*:=-iK\in\mathcal{L}(H).$$

Определение 7.2. Будем говорить, что $u(t)$ — обобщенное решение задачи Коши (12), если $y(t) = (u'(t), w'(t))^t = (u'(t), -iB^{1/2}u(t))^t$ представима в виде (15) с $y(0) \in H^2$, $\widetilde{f}(t) \in C[0,T;H^2]$.

Теорема 7.2. *Если выполнены условия $B \geqslant 0$, $f(t) \in C[0,T;H]$, $u^0 \in D(B^{1/2})$, $u^1 \in H$, то задача Коши (12) имеет единственное обобщенное решение; для этого решения функции $u'(t)$ и $B^{1/2}u(t)$ непрерывны и имеет место неравенство*

$$\|y(t)\|_{H^2} = (\|u'(t)\|_H^2 + \|B^{1/2}u(t)\|_H^2)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (\|u^1\|_H^2 + \|B^{1/2}u^0\|_H^2)^{1/2} + T\|f\|_{C[0,T;H]}.$$

Теорема 7.3. *Пусть в задаче (12) выполнены условия*

$$B = B_+ - B_-, \quad B_+ \geqslant 0, \quad 0 < B_- \in \mathcal{L}(H),$$
$$f(t) \in C^1[0,T;H], \quad u^0 \in D(B), \quad u^1 \in D(F) \cap D(B_+^{1/2}).$$

Тогда она имеет единственное решение $u(t)$ на $[0,T]$ и для этого решения выполнен закон баланса полной энергии (14) со следующей заменой слагаемых:

$$\|B^{1/2}u(t)\|_H^2 \longmapsto \|B_+^{1/2}u(t)\|_H^2 - \|B_-^{1/2}u(t)\|_H^2,$$
$$\|B^{1/2}u^0\|_H^2 \longmapsto \|B_+^{1/2}u^0\|_H^2 - \|B_-^{1/2}u^0\|_H^2.$$

Далее в параграфе рассмотрен ряд изученных ранее гидродинамических систем, попадающих в общую схему (12).

В §8 исследована отвечающая эволюционной задаче (12), спектральная задача:

$$L(\lambda)v := (\lambda^2 I - \lambda(F+K) + B)v = 0, \tag{16}$$

для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ с неограниченными операторными коэффициентами F, B и $K \in \mathcal{L}(H)$.

Теорема 8.1 (о неустойчивости). *Пусть выполнено условие $K = 0$, а также условия*

$$\begin{gathered} B = B_+ - B_-, \quad B_+ \geqslant 0, \quad B_- > 0, \quad 0 < \dim B_- =: \kappa < \infty, \\ F \gg 0, \quad 0 < F^{-1} \in \mathcal{S}_\infty, \quad B_+^{1/2}F^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда задача (16) имеет в левой комплексной полуплоскости ровно κ (с учетом кратностей) собственных значений, которые расположены на вещественной оси. Этим собственным значениям не отвечают присоединенные элементы. В правой комплексной полуплоскости спектр задачи дискретен и имеет две предельные точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, вещественны. На мнимой оси ненулевых собственных значений нет.

Теорема 8.2 (о неустойчивости). *Пусть в задаче (16) выполнены условия (17) теоремы 8.1 и условие* $\operatorname{Ker} B = \{0\}$. *Тогда в левой комплексной полуплоскости* $\forall K \in \mathcal{L}(H)$ *задача (16) имеет ровно* κ *(с учетом кратностей) собственных значений.*

Таким образом, из теоремы 8.1 следует, что если гидромеханическая система статически неустойчива по линейному приближению и минимальное собственное значение оператора потенциальной энергии B отрицательно, то эта система является и динамически неустойчивой. Физический смысл теоремы 8.2 состоит в том, что "включение" в действие кориолисовых сил не изменяет факта неустойчивости системы. Как и в задачах с конечным числом степеней свободы, здесь не происходит гироскопической стабилизации системы.

В конце параграфа приведена конкретная гидродинамическая система (маятник с полостью, частично заполненной тяжелой вязкой жидкостью), для которой имеют место утверждения теоремы 8.1.

Заметим, что теоремы 8.1 и 8.2 есть обобщения на системы с бесконечным числом степеней свободы утверждений из механики, которые называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Работы автора по теме диссертации

1) Пашкова Ю.С. Коливання гідросистеми з мембранною перегородкою // Спектральные и эволюционные задачи: Тез. докладов N 1, УМК ВО, Київ, 1991, стр. 40 – 41.

2) Пашкова Ю.С. Коливання гідродинамичної системи з мембранними перегородками // Спектральные и эволюционные задачи: Тез. докладов N 2, СГУ, Сімферополь, 1993, стр. 89 – 90.

3) Пашкова Ю.С. Малые колебания системы идеальных жидкостей, разделенных мембранными перегородками (Симферополь, Симферопольский госуниверситет), Деп. в УКРИНТЭИ 02.10.92, 1992, 28 стр.

4) N.D.Kopachevsky and J.S.Pashkova. Evolutionary and Spectral Problems of Small Oscillations of a Hydrodynamics System, IWOTA 95, Final of Program and Book of Abstracts, Regensburg, 1995, p. 40.

5) Копачевский Н.Д., Орлова (Болгова) Л.Д., Пашкова Ю.С. Дифференциально-операторные и интегродифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем // Ученые записки Симферопольского ун-та. – Симферополь, Издат. СГУ. – 1995, N 2(41). – стр. 96 – 108.

6) Kopachevskii N.D., Orlova L.D., Pashkova J.S. Small oscillations and stability of hydrodynamical systems // Nonlinear Differential Equations (Abstracts of Intern. Conf.), Ukraine, Kiev, August 21 – 27, 1995; p. 80.

Пашк

Пашкова Ю.С. Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем.

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, Институт прикладной математики НАН Украины, Донецк, 1996 год, рукопись.

Рассмотрена проблема малых движений гидродинамических систем, содержащих упругую мембрану. Выяснены особенности и свойства решений эволюционных задач о малых колебаниях идеальной или вязкой жидкости, ограниченной упругой мембраной. Изучены свойства решений соответствующих спектральных задач для нормальных колебаний.

В работе также исследованы вопросы корректной разрешимости одного класса дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве, имеющего широкие приложения в гидродинамике. Рассмотрена соответствующая спектральная задача для квадратичного пучка, отвечающего эволюционной проблеме. Выяснены условия, при которых исследуемая гидросистема является динамически неустойчивой.

J.S.Pashkova. Oscillations of fluid in container with a elastic membrane boundary, and general questions of evolution of hydrodynamics system.

Thesis for Candidate Degree (Ph.D.) of Siences in Physics and Mathematics, the speciality 01.01.02 — Differential Equation, Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS Ukraine, Donetsk, 1996, manuscript.

The problem about small motions of a hudrodynamics system with a membrane boundary or partions has been considered. Singularities and properties of solutions have been studied for evolution problem about small oscillations of ideal or viscous liquid with an elastic membrane. Properties of solutions for correspondent spectral problems for normal oscillations have been considered.

Also, a decision problem of one class of operator-differentional equations in Hilbert space has been investigated in the thesis. This equation has a broad applications in hydrodynamics. Correspondent spectral problem for quadratic operator pensil has been studied. Conditions of dynamic instability for this hydrodynamic system have been established.

Ключьові слова: початково-крайова задача, диференціально-операторне рівняння, задача Коші, нормальні коливання, спектральна задача, асимптотика.