НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

КАРПЕНКО Юрій Іванович

Асимптотичне інтегрування систем лінійних диференціальних рівнянь другого порядку при наявності точок повороту

01.01.02 - диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ - 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Українському державному педагогічному університеті ім. М.П. Драгоманова

Науковий керівник:
академік АПН України, доктор фізико-математичних наук, професор
Шкіль М.І.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук Перестюк М.О.
кандидат фізико-математичних наук Коломієць В.Г.

Провідна організація: Одеський державний університет.

Захист відбудеться 4 червня 1996 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3.
З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано 30 квітня 1996 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук Лучка А.Ю.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Одним з найбільш ефективних методів розв'язування диференціальних рівнянь із збуреннями є асимптотичні методи, які грунтуються на ідеї зображення шуканого розв'язку у вигляді рядів за степенями параметра. Хоча такі ряди в більшості випадків розбігаються в звичайному розумінні, однак їх частинні суми дають досить точне наближення шуканого розв'язку з прямуванням малого параметра до нуля.

Ці методи зародилися ще в 18-му столітті і використовувалися у працях Лагранжа, Лапласа, Левер'є, Фур'є.

В 1838 році Ліувілль, використовуючи результати Штурма, дав асимптотичне зображення розв'язку диференціального рівняння другого порядку, що містить великий параметр.

У зв'язку з важливістю питання асимптотичного інтегрування диференціальних рівнянь для розв'язку задач математичної фізики ця теорія почала швидко розвиватись після праць Ліувілля. Зокрема асимптотичні методи розвивалися у працях Пуанкаре, Шлезінгера, Біркгофа, Я.Д. Тамаркіна, В.Л. Территина, Хукухара, В. Вазова, Чезари, Лангера, Е. Коддінгтона, Н. Левінсона, К.А. Абгаряна, О.Н. Тихонова і ін.

Необхідно вказати також на фундаментальні дослідження вітчизняних учених М.М.Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, які розробили методи інтегрування систем диференціальних рівнянь з малою нелінійністю.

В подальшому асимптотичні методи розвивалися багатьма вітчизняними вченими: Б.І. Мосеєнковим, А.М. Самойленком, Д.І. Мартинюком, О.Б. Диковою, В.Г.Коломійцем, М.П. Фругіним та іншими. Під впливом робіт Крилова-Боголюбова-Митропольського інтенсивно почали розвиватися дослідження диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, значний вклад в розвиток яких внесли Є.Ф. Фещенко, М.І. Шкіль та їх учні: І.І. Старун, В.В. Терлецький, В.К. Григоренко, І.І. Маркуш, М.А. Сотніченко, Ю.П. Підченко, В.П. Яковець, С.М. Коваленко, Г.В. Завізіон.

Однією з найскладніших задач в теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь є задача побудови асимптотики сингулярно збурених систем з точками повороту - окремими точками проміжку зміни незалежної змінної, в яких збігаються корені характеристичного рівняння або змінюється кратність елементарних дільників головної матриці системи.

В роботах М.І. Шкіля та Г.В. Завізіона, а також М.І. Шкіля та М.О. Рашевського було розроблено метод інтегрування скалярних рівнянь другого порядку, систем рівнянь першого порядку та систем з запізненням за наявності простої точки повороту. Незважаючи на досить велику кількість публікацій, вивченими є лише окремі частинні проблеми: розв'язки деяких класів скалярних рівнянь з точками повороту, зведення систем з простою точкою повороту до більш простого вигляду і деякі інші. Відкритими залишаються проблеми узгодження формальних розв'язків, визначених на різних проміжках, побудови вищих асимптотичних наближень розв'язків в околі точки повороту довільної кратності, дослідження випадку кількох точок повороту. Тому розробка методів асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з точками повороту є досить актуальною проблемою.

<u>Об'єкт дослідження.</u> В роботі розглядається система диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon^{2h} A_1(\tau,\varepsilon)\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varepsilon^{h} A_2(\tau,\varepsilon)\frac{dx}{d\tau} + A_3(\tau,\varepsilon)x =$$

$$= p(\tau,\varepsilon)exp\left[i\varepsilon^{-h}\theta(\tau)\right], \qquad (1)$$

де $x(\tau,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр ($\varepsilon_0 \ll 1$), $h \in \mathbb{N}$, $i = \sqrt{-1}$, $A_j(\tau,\varepsilon)$, $j = \overline{1, 3}$ – ($n \times n$) – матриці, $p(\tau,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, $\theta(\tau)$ – скалярна функція, $\tau \in [0; T]$.

Припускається, що

1. Матриці $A_j(\tau,\varepsilon)$, $j = \overline{1, 3}$, і вектор-функція $p(\tau,\varepsilon)$ мають в області σ: $\left[\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tau \in [0; T]\right]$ асимптотичні або збіжні розвинення

$$A_j(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\eta} A_{jk}(\tau)\varepsilon^k, \quad j = \overline{1, 3}, \ \eta \leq \infty, \qquad (2)$$

$$p(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\rho} p_k(\tau)\varepsilon^k, \quad \rho \leq \infty. \qquad (3)$$

2. $\det \overset{0}{A}_{10}(\tau) \neq 0 \ \forall \tau \in [0; T]$.

3. Коефіцієнти $\overset{0}{A}_{jk}(\tau)$, $p_k(\tau)$ розвинень (1.2),(1.3) нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$.

4. Матриці $\overset{0}{A}_{jk}(\tau)$, вектори $p_k(\tau)$ і функція $\theta(\tau)$ розвиваються на відрізку $[0; R]$, $R \geq \varepsilon T$ в ряд, або за формулами Тейлора

$$A_{jk}(\tau) = \sum_{s=0}^{\gamma_1} \frac{1}{s!}\frac{d^s A_{jk}(0)}{d\tau^s}\tau^s, \quad k = 0, 1, \ldots, \gamma_1 \leq \infty, \qquad (4)$$

$$p_k(\tau) = \sum_{s=0}^{\gamma_2} \frac{1}{s!}\frac{d^s p_k(0)}{d\tau^s}\tau^s, \quad k = 0, 1, \ldots, \gamma_2 \leq \infty, \qquad (5)$$

$$\theta(\tau) = \sum_{s=0}^{\gamma_3} \frac{1}{s!}\frac{d^s\theta(0)}{d\tau^s}\tau^s, \quad \gamma_3 \leq \infty. \qquad (6)$$

Рівняння

$$\det D[\omega(\tau)] = 0, \qquad (7)$$

де

$$D[\omega(\tau)] = \left[\omega^2 A_{10}(\tau) + \omega A_{20}(\tau) + A_{30}(\tau)\right],$$

назвемо характеристичним рівнянням системи (1.1), а власні значення матриці $D[\omega(\tau)]$ позначимо через $\omega_j(\tau)$, $j = \overline{1, 2n}$.

5°. Припустимо також, що

$$\omega_j(\tau_k) = \omega_l(\tau_k), \quad l, j = \overline{1, 2n}, \quad k = \overline{1, q},$$
$$\omega_j(\tau) \neq \omega_l(\tau), \quad l, j = \overline{1, 2n}; \quad \tau \neq \tau_k, \tag{8}$$

де τ_k, $k = \overline{1, q}$, – окремі точки проміжку $[0; T]$. Такі точки будемо називати точками повороту системи (1).

Для системи (1.1) досліджується задача Коші з початковими умовами

$$x(0,\varepsilon) = x_0(\varepsilon), \quad \frac{dx(0,\varepsilon)}{d\tau} = x'_0(\varepsilon) \tag{9}$$

В роботі вивчаються такі питання:

1. Про асимптотичне зображення фундаментальної системи розв'язків для однорідної системи рівнянь, що відповідає (1):

$$\varepsilon^{2h} A_1(\tau,\varepsilon)\frac{d^2x}{d\tau^2} + \varepsilon^{h} A_2(\tau,\varepsilon)\frac{dx}{d\tau} + A_3(\tau,\varepsilon)x = 0 \cdot \tag{10}$$

При цьому розглядаються різні можливі випадки канонічної форми матриць $D[\omega(\tau_k)]$ і, крім того, окремо досліджено випадки $h = 1$, $h > 1$.

2. Побудова частинного асимптотичного розв'язку неоднорідної системи (1). В залежності від значень функції $ik(\tau)$, де

$$k(\tau) = \frac{d\theta(\tau)}{d\tau},$$

досліджено три випадки:

а) "нерезонансний", коли

$$ik(\tau) \neq \omega_j(\tau) \ \forall \tau \in [0; T], \ j = \overline{1, 2n},$$

б) "резонансний", коли $k(\tau)$ тотожно дорівнює одній із функцій $\omega_j(\tau)$, $\tau \in [0; T]$,

в) "точковий резонанс", коли $ik(\tau)$ в окремих точках проміжку

$[0;\ T]$ збігається з одним з коренів рівняння (1).

Такі ж питання досліджено для систем

$$\varepsilon^{2h}\frac{d^2x}{d\tau^2} = A(\tau,\varepsilon)x + p(\tau,\varepsilon)exp\left[i\varepsilon^{-h}\theta(\tau)\right], \qquad (11)$$

$$\varepsilon^{2h}\frac{d^2x}{d\tau^2} = A(\tau,\varepsilon)x \qquad (12)$$

при аналогічних припущеннях.

Метою роботи є розробка методу побудови асимптотичного розв'язку задачі Коші сингулярно збурених систем виду (1), (11) та загального розв'язку вказаних систем в елементарних функціях.

Методика дослідження. При розв'язанні поставлених задач використовується єдиний підхід, що базується на використанні асимптотичних методів, які розроблені для інтегрування систем диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами С.Ф. Фещенком, М.І. Шкілем та їх учнями.

Наукова новизна. Використовуючи вказані вище методи, в дисертації розроблено методи побудови асимптотичних розв'язків систем (1), (11) при наявності довільного скінченного числа точок повороту в елементарних функціях. Для даного класу задач вперше

- знайдено достатні умови існування $2n$ формальних розв'язків однорідних систем (10), (12) при зміні канонічної форми характеристичних матриць в окремих точках проміжку інтегрування;

- одержано розрахункові рекурентні формули для визначення коефіцієнтів відповідних розкладів у явному вигляді;

- досліджено випадки "резонансу", "нерезонансу" та "точкового резонансу" при побудові частинних розв'язків неоднорідних систем, (1), (11);

- вказано методику зведення систем (1), (11) з точками повороту до випадку тотожно кратного спектру характеристичних матриць вказаних систем в малому околі точки повороту;

- досліджено побудовані формальні розв'язки, доведено їх лінійну незалежність та асимптотичний характер;

- побудовано асимптотичний розв'язок задачі Коші при довільних початкових умовах.

Практична цінність. Результати, одержані в даній роботі, можуть бути використані для розв'язання практичних задач, що виникають при дослідженні коливних процесів, задачі гідродинамічної стійкості і ін.

Апробація роботи. Основні результати цієї роботи доповідалися:

- на семінарі з асимптотичних методів в теорії диференціальних рівнянь при Українському державному педагогічному університеті ім. М.П. Драгоманова (керівник - академік АПН України, доктор фізико-математичних наук, професор М.І. Шкіль);

- на семінарі з диференціальних рівнянь при Інституті математики НАН України (керівник - академік НАН України А.М. Самойленко);

- на кафедрі математичного аналізу Українського державного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова.

- на кафедрі математики Ніжинського державного педагогічного інституту ім. М.В. Гоголя.

Публікації. Результати, одержані в даній роботі, опубліковані в шести наукових працях, список яких наведено в кінці автореферату.

Особистий внесок. Дослідження, представлені в дисертації, є результатом самостійної роботи. Вони узагальнюють результати, одержані автором особисто, або в участю співавторів.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, двох розділів і списку літератури, що містить 173 джерела і має об'ем 127 сторінок машинописного тексту.

Зміст роботи

<u>У вступі</u> розкривається актуальність теми, наводиться огляд літератури по темі дисертації, а також коротко викладено наукові результати, які виносяться на захист.

<u>Перший розділ</u> "Побудова асимптотичних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку методом зміни масштабу" присвячено дослідженню систем диференціальних рівнянь другого порядку за наявності довільного скінченного числа точок повороту або точок резонансу.

В § 1.1 ставиться задача Коші для неоднорідної системи сингулярно збурених рівнянь з кількома точками повороту, а також задача інтегрування неоднорідних систем при наявності точкового резонансу.

§ 1.2 містить деякі необхідні додаткові відомості.

В § 1.3 методом зміни масштабу побудовано формальні розв'язки однорідної системи в малому околі точки повороту $\tau = 0$. Суть цього методу полягає в наступному:

Розвинемо матриці $A_{jk}(\tau)$, вектори $p_k(\tau)$ і функції $\theta(\tau)$ на відрізку $[0; R]$, $R \geq \varepsilon T$ в ряд або за формулами Тейлора (4)-(6). Зробимо заміну змінних $\tau = \varepsilon t$ і впорядкуємо розклади (2), (3) за степенями малого параметра. Тоді система (10) набуде вигляду:

$$\varepsilon^{2h-2} B_1(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon^{h-1} B_2(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} + B_3(t,\varepsilon)x = 0, \quad (13)$$

де

$$B(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\varepsilon^k, \quad B_k(t) = -\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!}\frac{d^s A_{k-s}(0)}{d\tau^s}t^s, \quad (14)$$

$$k = 0, 1, \ldots .$$

Зауважимо, що $B_{j0}(t) = A_{j0}(0)$, $j = \overline{1, 3}$, тому система (13) в околі точки $t = 0$ має тотожно кратний спектр, а, отже, її можна асимптотично проінтегрувати, користуючись класичними методами.

Зокрема для системи (13) доведена наступна теорема.

Т е о р е м а 1. Якщо виконуються умови $1^0 - 5^0$ і, крім того,

$$\left[K\varphi,\ \psi\right] \neq 0, \tag{15}$$

де

$$K = \omega_0^2 B_{11} + \omega_0 B_{21} + B_{31}\ ,$$

а $(2n \times 2n)$ - матриця $D(0)$ подібна клітині Жордана, то система (13) має на $t \in [0;\ T]$ $2n$ формальних розв'язків виду

$$x^{(i)}(t,\varepsilon) = u^{(i)}(t,\mu)\exp\left[\varepsilon^{1-h}\int_0^t \lambda^{(i)}(s,\mu)ds\right],\ i = \overline{1,\ 2n}, \tag{16}$$

де

$$u^{(i)}(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(i)}(t)\mu^k,\quad \lambda^{(i)}(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(i)}(t)\mu^k, \tag{17}$$

$$\mu = \sqrt[n]{\varepsilon}\,.$$

Тут

$$D(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -A_{10}^{-1}A_{30} & -A_{10}^{-1}A_{20} \end{bmatrix},$$

де E_0 - одинична матриця розмірності n, а φ, ψ - власні вектори матриць $D[\omega(\tau)]$ та $D^*[\omega(\tau)]$, спряженої з $D[\omega(\tau)]$.

В § 1.4 побудовано $2n$ частинних розв'язків однорідної системи за межами околу точки повороту.

В § 1.5 доведено, що формальні розв'язки, побудовані в попередніх параграфах, є лінійно незалежними на відповідних проміжках зміни незалежної змінної.

§ 1.6 присвячено "зшиванню" побудованих розв'язків. Зупинимось на цьому докладніше.

В § 1.3, 1.4 побудовано $2n$ частинних розв'язків однорідної системи (13) на відрізках $[0;\ \varepsilon T]$ і $[\varepsilon T;\ T]$. Далі необхідно "зшити" отримані розв'язки так, щоб у точці $\tau = \varepsilon T_*$ вони були неперервними разом з першими похідними.

З побудованих на відрізку $[0;\ \varepsilon T]$ векторних розв'язків утворимо, як із стовпчиків, два $m \geq n-1$ наближені матричні формальні розв'язки $\Phi_1(\tau,\varepsilon)$, $\Phi_2(\tau,\varepsilon)$, обірвавши відповідні ряди на m-му члені. Тоді загальний m-наближений розв'язок системи (13) на цьому відрізку запишеться у вигляді

$$x_1(\tau,\varepsilon) = \Phi_1(\tau,\varepsilon)\mathrm{в}_1 + \Phi_2(\tau,\varepsilon)\mathrm{в}_2\ .$$

Сталі n-вимірні вектори $\mathrm{в}_1$, $\mathrm{в}_2$ виберемо, виходячи з початкових умов. Позначимо одержаний частинний розв'язок $x_r(\tau,\varepsilon)$.

Аналогічно на відрізку $[\varepsilon T;\ T]$ утворимо два m-наближені матричні розв'язки $F_1(\tau,\varepsilon)$, $F_2(\tau,\varepsilon)$. Загальний розв'язок на даному відрізку запишеться у вигляді

$$x_2(\tau,\varepsilon) = F_1(\tau,\varepsilon)c_1 + F_2(\tau,\varepsilon)c_2\ ,$$

де c_1, c_2 - довільні n-вимірні вектори.

Тоді умови неперервності частинного розв'язку $x_r(\tau,\varepsilon)$ і його першої похідної в точці $\tau = \varepsilon T$ запишуться у вигляді

$$\begin{cases} F_1(\varepsilon T,\varepsilon)c_1 + F_2(\varepsilon T,\varepsilon)c_2 = x_r(\varepsilon T,\varepsilon) \\ F_1'(\varepsilon T,\varepsilon)c_1 + F_2'(\varepsilon T,\varepsilon)c_2 = x_r'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{cases} \qquad (18)$$

або

$$\begin{bmatrix} F_1(\varepsilon T,\varepsilon) & F_2(\varepsilon T,\varepsilon) \\ F_1'(\varepsilon T,\varepsilon) & F_2'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} x_r(\varepsilon T,\varepsilon) \\ x_r'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = col(c_1,\ c_2) \qquad (19)$$

Формальні m-наближені розв'язки системи (13) є лінійно незалежними при досить малих $\varepsilon > 0$, тому матриця, що є множником при векторі $\vec{c}$, невироджена. Отже

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} F_1(\varepsilon T,\varepsilon) & F_2(\varepsilon T,\varepsilon) \\ F_1'(\varepsilon T,\varepsilon) & F_2'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_r(\varepsilon T,\varepsilon) \\ x_r'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Тепер вектори c_1, c_2 відомі, отже, неперервний разом з першою похідною розв'язок задачі Коші можна записати у вигляді:

$$x(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} x_r(\tau,\varepsilon), \ \tau \in [0;\ \varepsilon T] \\ F_1(\tau,\varepsilon)c_1 + F_2(\tau,\varepsilon)c_2, \ \tau \in (\varepsilon T;\ T] \end{cases} \qquad (21)$$

В § 1.7 розглядається випадок кількох точок повороту. Описано алгоритм побудови неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші для однорідної системи (10).

В § 1.8 побудовано формальні розв'язки неоднорідної системи. Окремо розглянуто випадок точкового резонансу в двох точках проміжку $[0;\ T]$, після чого побудовано неперервно диференційовний розв'язок задачі Коші для неоднорідної системи (1).

Позначимо частинні m-наближені розв'язки системи (1), знайдені на відрізках $[0;\ \varepsilon T]$, $[\varepsilon T;\ T]$ відповідно через $x_m(\tau,\varepsilon)$, $y_m(\tau,\varepsilon)$. Тепер необхідно утворити неперервний разом з першою похідною частинний розв'язок системи (1) на всьому проміжку $\tau \in [0;\ T]$. Для цього побудуємо $2n$ частинних розв'язків однорідної системи (10) і утворимо з них два матричних розв'язки $\Phi_1(\tau,\varepsilon)$, $\Phi_2(\tau,\varepsilon)$. Тоді загальний m-наближений розв'язок системи (1) на відрізку $\tau \in [0;\varepsilon T]$ запишеться у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon) = \Phi_1(\tau,\varepsilon)c_1 + \Phi_2(\tau,\varepsilon)c_2 + x_m(\tau,\varepsilon),$$

де c_1, c_2 – n-вимірні сталі вектори.

Тоді умову неперервності частинного розв'язку системи (1) і його першої похідної в точці $\tau = \varepsilon T$ запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \Phi_1(\varepsilon T,\varepsilon)c_1 + \Phi_2(\varepsilon T,\varepsilon)c_2 + x_m(\varepsilon T,\varepsilon) = y_m(\varepsilon T,\varepsilon) \\ \Phi_1'(\varepsilon T,\varepsilon)c_1 + \Phi_2'(\varepsilon T,\varepsilon)c_2 + x_m'(\varepsilon T,\varepsilon) = y_m'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{cases} \qquad (22)$$

або

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(\varepsilon T,\varepsilon) & \Phi_2(\varepsilon T,\varepsilon) \\ \Phi_1'(\varepsilon T,\varepsilon) & \Phi_2'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_m(\varepsilon T,\varepsilon) - x_m(\varepsilon T,\varepsilon) \\ y_m'(\varepsilon T,\varepsilon) - x_m'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix},$$

звідки можуть бути визначені сталі вектори c_1, c_2:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\varepsilon T,\varepsilon) & \Phi_2(\varepsilon T,\varepsilon) \\ \Phi_1'(\varepsilon T,\varepsilon) & \Phi_2'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_m(\varepsilon T,\varepsilon) - x_m(\varepsilon T,\varepsilon) \\ y_m'(\varepsilon T,\varepsilon) - x_m'(\varepsilon T,\varepsilon) \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Тепер неперервно диференційовний m-наближений частинний розв'язок системи (1) набуває вигляду

$$\tilde{x}_m(\tau,\varepsilon) = \begin{cases} \Phi_1(\tau,\varepsilon)c_1 + \Phi_2(\tau,\varepsilon)c_2 + x_m(\tau,\varepsilon), & \tau \in [0;\ \varepsilon T] \\ y_m(\tau,\varepsilon), & \tau \in (\varepsilon T;\ T] \end{cases} \qquad (24)$$

В § 1.9 досліджено асимптотичні властивості побудованих роз - в'язків. Зокрема доведена наступна

Т е о р е м а 2. Якщо виконуються умови теореми 1.7, (9), і, крім того,

$$Re\Big[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(l)}(t)\mu^k\Big] < 0,\ l = \overline{1,\ 2n},\ \forall\, t \in [0;\ T],\ \varepsilon \in [0;\ \varepsilon_0],$$

то при $\tau \in [0;\ \varepsilon T]$ для кожного формального розв'язку $x^{(l)}(\tau,\varepsilon)$, $l = \overline{1,\ 2n}$, існує такий точний розв'язок $\bar{x}^{(l)}(\tau,\varepsilon)$, що $\forall\, m \geq n-1$ і досить малих $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності

$$\Big\| \bar{x}^{(l)}(\tau,\varepsilon) - x_m^{(l)}(\tau/_\varepsilon,\varepsilon) \Big\| \leq c\mu^{m+2-n(h-1)} \times$$

$$\times \sup_{\tau\in[0;\ \varepsilon T]} exp\Big[\varepsilon^{1-h} \int_0^{\tau/_\varepsilon} Re\Big[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(l)}(s)\mu^k\Big] ds\Big], \qquad (25)$$

$$\Big\| \frac{d\bar{x}^{(l)}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} - \frac{dx_m^{(l)}(\tau/_\varepsilon,\varepsilon)}{d\tau} \Big\| \leq c\mu^{m+2-n(h-1)} \times$$

$$\times \sup_{\tau\in[0;\ \varepsilon T]} exp\Big[\varepsilon^{1-h} \int_0^{\tau/_\varepsilon} Re\Big[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(l)}(s)\mu^k\Big] ds\Big],$$

де c – деяка стала, що не залежить від ε.

В § 1.10 на конкретних прикладах ілюструються методи інтегрування відповідних систем, розроблені в першому розділі.

Другий розділ даної роботи "Асимптотичне інтегрування лінійних систем другого порядку методом малого збурення характеристичного рівняння" присвячено перенесенню методики, розробленої для скалярних диференціальних рівнянь другого порядку та систем диференціальних рівнянь першого порядку на систему диференціальних рівнянь другого порядку. При цьому, як і в першому розділі даної роботи вказано алгоритми побудови асимптотичних розв'язків.

В § 2.1 ставиться задача Коші для неоднорідної системи (1) з кількома точками повороту, а також кількома резонансними точками.

При цьому припускається, що

6^0. Збурене характеристичне рівняння системи (10):

$$\det\left[(A_{10}+\varepsilon A_{11})\omega^2+(A_{20}+\varepsilon A_{21})\omega+(A_{30}+\varepsilon A_{31})\right]=0$$

має в деякому околі точки повороту $\tau=\tau_h$ прості корені $\tilde{\omega}_j(\tau,\varepsilon)$, $j=\overline{1,\ 2n}$.

7^0. $\left[K(0)\varphi(0),\ \psi(0)\right]\neq 0,\quad K(0)=\omega_0^2A_{11}(0)+\omega_0A_{21}(0)+A_{31}(0)$

В § 2.2 побудовано формальні розв'язки однорідної системи, що відповідає (1). Зокрема має місце наступна

Теорема 3. Якщо виконуються умови 1^0-3^0, $\tau_h=0$ і, крім того, умова 6^0 виконується $\forall\ \tau\in[0;\ T]$, то на вказаному проміжку система (10) має $2n$ формальних розв'язків виду

$$x^{(i)}(\tau,\varepsilon)=v^{(i)}(\tau,\varepsilon)\exp\left[\varepsilon^{-h}\int_0^\tau\lambda^{(i)}(s,\varepsilon)ds\right],\ i=\overline{1,\ 2n},\quad(26)$$

де вектор-функції $v^{(i)}(\tau,\varepsilon)$ і скалярні функції $\lambda^{(i)}(\tau,\varepsilon)$ мають формальні розвинення

$$v^{(i)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{v}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon)\varepsilon^k,\quad\lambda^{(i)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\lambda}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon)\varepsilon^k\quad(27)$$

В § 2.3 доведено, що побудовані формальні розв'язки при малих ε є лінійно незалежними на відрізку $[0;\ T]$.

При цьому встановлено, що вектор-функції $\tilde{v}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon)$ в околі точки повороту мають особливість по параметру типу полюса порядку $O\left[\frac{1}{\mu^k}\right]$. Тому ці вектори можна подати у вигляді

$$\tilde{v}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon) = \bar{v}_p^{(i)}(\tau,\varepsilon)\frac{1}{\mu^k},$$

де множники $\bar{v}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon)$ вже не мають особливостей по параметру ε.

Остаточно можемо записати

$$v^{(i)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \bar{v}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon)\varepsilon^k \frac{1}{\mu^k} = \sum_{k=0}^{m} \bar{v}_k^{(i)}(\tau,\varepsilon)\varepsilon^{k(1-r)},$$

де число r залежить від канонічної структури матриці $C(0)$ і задовольняє нерівності $1/_{2n} \leqslant r < 1$.

§ 2.4 присвячено "зшиванню" розв'язків однорідної системи.

В § 2.5 розглянуто випадок довільної скінченної кількості точок повороту. Вказано алгоритм побудови неперервно диференційовного розв'язку задачі Коші.

В § 2.6 знайдено формальний розв'язок неоднорідної системи у випадку точкового резонансу.

§ 2.7 присвячено поширенню методики, розробленої для випадку кількох точок повороту, на випадок кількох резонансних точок.

В § 2.8 доведено, що при виконанні певних умов формальні розв'язки, побудовані в другому розділі, є асимптотичними при $\varepsilon \to 0$. Зокрема доведена

Т е о р е м а 3. Якщо виконуються умови теореми 2.1, (9), а також умови

$$Re\left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(i)}(s)\varepsilon^k\right] < 0,\ \tau \in [0;\ \tau_k - \varepsilon S] \cup [\tau_k + \varepsilon S;\ T],$$

$$Re\left[\sum_{k=0}^{m} \tilde{\lambda}_k^{(i)}(s,\varepsilon)\varepsilon^k\right] < 0,\ \tau \in [\tau_k - \varepsilon S;\ \tau_k + \varepsilon S],$$

де $\tau_k \in (0;\ T)$ - точка повороту, то при $\forall\ \tau \in [0;\ T]$ розв'язок задачі Коші побудований в § 2.5 є асимптотичним при $\varepsilon \to 0$, тобто $\forall\, m \in \mathbb{N}$ і досить малих $\varepsilon > 0$, виконуються нерівності

$$\left\| x^{(i)}(\tau,\varepsilon) - x_m^{(i)}(\tau,\varepsilon) \right\| \leq c_1\, \varepsilon^{m+2-h-\beta} \times$$

$$\times \sup_{\tau\in[\tau_k-\varepsilon S;\,\tau_k+\varepsilon S]} \sum_{i=1}^{2n} \exp\left[\varepsilon^{-h}\int_{\tau_k-\varepsilon S}^{\tau} Re\left[\sum_{k=0}^{m} \tilde{\lambda}_k^{(i)}(s,\varepsilon)\varepsilon^k\right]ds\right] +$$

$$+ c_2\, \varepsilon^{m+2-h-\alpha} \sup_{\tau\in[0;\,\tau_k-\varepsilon S]} \sum_{i=1}^{2n} \exp\left[\varepsilon^{-h}\int_{0}^{\tau} Re\left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(i)}(s)\varepsilon^k ds\right]\right] +$$

$$+ c_3\, \varepsilon^{m+2-h-\alpha} \sup_{\tau\in[\tau_k+\varepsilon S;\,T]} \sum_{i=1}^{2n} \exp\left[\varepsilon^{-h}\int_{\tau_k+\varepsilon S}^{\tau} Re\left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(i)}(s)\varepsilon^k ds\right]\right],$$

$$\left\| \frac{d\bar{x}^{(i)}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} - \frac{dx_m^{(i)}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq c_1 \varepsilon^{m+2-h-\beta} \times$$

$$\times \sup_{\tau\in[\tau_k-\varepsilon S;\,\tau_k+\varepsilon S]} \sum_{i=1}^{2n} \exp\left[\varepsilon^{-h}\int_{\tau_k-\varepsilon S}^{\tau} Re\left[\sum_{k=0}^{m} \tilde{\lambda}_k^{(i)}(s,\varepsilon)\varepsilon^k\right]ds\right] +$$

$$+ c_2\, \varepsilon^{m+2-h-\alpha} \sup_{\tau\in[0;\,\tau_k-\varepsilon S]} \sum_{i=1}^{2n} \exp\left[\varepsilon^{-h}\int_{0}^{\tau} Re\left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(i)}(s)\varepsilon^k ds\right]\right] +$$

$$+ c_3\, \varepsilon^{m+2-h-\alpha} \sup_{\tau\in[\tau_k+\varepsilon S;\,T]} \sum_{i=1}^{2n} \exp\left[\varepsilon^{-h}\int_{\tau_k+\varepsilon S}^{\tau} Re\left[\sum_{k=0}^{m} \lambda_k^{(i)}(s)\varepsilon^k ds\right]\right],$$

де α, β - деякі додатні числа, які визначаються в дисертації.

В § 2.9 побудовано формальні наближені розв'язки деяких задач прикладного та ілюстративного характеру.

Основні результати та висновки

Основні результати дисертації полягають у наступному:

1. Побудовано загальний асимптотичний розв'язок сингулярно вбуреної системи другого порядку із скінченним числом точок повороту довільної кратності.

2. Досліджено неоднорідну систему диференціальних рівнянь, зокрема розглянуто випадок точкового резонансу.

3. Побудовано неперервно диференційовний розв'язок задачі Коші.

4. Досліджено властивості отриманих розв'язків. Вказано умови, при яких формальні розв'язки будуть асимптотичними.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Карпенко Ю.И. Асимптотическое решение задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка при наличии точки поворота // Дифференциально-функциональные уравнения. - К.: КГПИ, 1991. - С. 19-23.

2. Шкіль М.І., Карпенко Ю.І. Асимптотичний розв'язок сингулярно збуреної системи другого порядку з точковим резонансом // Докл. АН УРСР. Сер. А. - 1991. - N 5. - С. 18-21.

3. Шкіль М.І.,Карпенко Ю.І. Про асимптотичні розв'язки задачі Коші для лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку при наявності точки повороту // Доп. АН УРСР. Сер. А. - 1992. - N 3. - С. 11-14.

4. Шкиль Н.И.,Карпенко Ю.И. Решение задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с точкой поворота // Дифференциально-функциональные уравнения. - К.: КГПИ, 1991. - С. 100-106.

5. Яковец В.П.,Карпенко Ю.И. Асимптотика решений общей линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами. - Нежин, 1986.- 29 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 02.10.86 г. - N 2405 - Ук86.

6. Яковец В.П.,Карпенко Ю.И. Об асимптотических решениях линейных сингулярно возмущенных систем при наличии точки поворота // Мат. физика и нелинейн. механика.- 1992. - N 18(52). - С. 6-11.

Карпенко Ю.И. "Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка при наличии точек поворота".

Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается диссертация, посвященная построению асимптотических решений линейных систем дифференциальных уравнений с точками поворота. Строятся решения задачи Коши при произвольных начальных условиях.

Применяются методы "изменения масштаба" и "возмущения характеристического уравнения".

Karpenko Y.J. "Asymptotic integration the system of linear differential equations of the second order with turning points".

Doctor of philosophy thesys, speciality 01.01.02 - differential equations. Institute of mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

The thesis deals with the construction of asymptotic solutions of linear systems of differential equations with turning points. The solutions of Koshy's problem are made with arbitrary initial conditions.

Here apply the method of "scale chenge" and "disturbance of characteristic equation".

Ключові слова: точка повороту, зміна масштабу, збурення характеристичного рівняння, зшивання, точковий резонанс, асимптотика.

Карп

Підп. до друку 16.04.96. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.- вид. арк. 0.8.
Тираж 100 пр. Зам. 100

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3