

Київський університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Мазорчук Володимир Степанович

УДК 512.553.1

Будова узагальнених модулів Верма

(01.01.06 — алгебра та теорія чисел)

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

ДВ 34.000

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник:

- доктор фізико-математичних наук, професор Ю.А.Дрозд

Офіційні опоненти:

- доктор фізико-математичних наук Клімук Анатолій Улянович;
- кандидат фізико-математичних наук Цильке Андрій Альфредович;

Провідна установа:

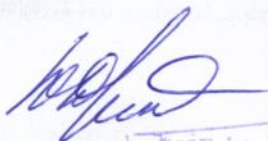
- Інститут математики АН України.

Захист відбудеться "27" травня 1996 року о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.01 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ-127, пр. акад. Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотечі Київського університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано "25" листопада 1995 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради



Овсієнко С. А.

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00740561 (N)

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми

Однією з областей математики, які найбільш інтенсивно вивчаються та мають широке застосування у різних галузях математики, фізики та біології є теорія зображень алгебр Лі над полем нульової характеристики.

Повна класифікація незвідних зображень алгебри Лі відома лише у випадку алгебри $sl(2)$, а у випадку алгебри $sl(3)$ отримано повну класифікацію так званих вагових зображень, тобто зображень, що розкладаються в пряму суму скінченновимірних вагових підпросторів відносно підалгебри Картана.

Класичним розділом теорії зображень напівпростих скінченновимірних алгебр Лі над алгебраїчно замкненим полем нульової характеристики можна вважати теорію модулів, породжених векторами старшої ваги, яка походить з оригінальних робіт Верма¹ та робіт Бернштейна - Гельфанда - Гельфанда^(2, 3, 4).

Відлуння результатів досліджень зображень, породжених елементами старшої ваги (модулів Верма), доходить і до теперешніх часів. Ці дослідження дали поштовх до виникнення нових гілок алгебраїчної теорії, наприклад, квазіспадкових алгебр, теорію БГГ-категорій та інше.

Класичні результати, такі як БГГ-критерій існування нетривіальних гомоморфізмів між модулями Верма, БГГ-резольвента скінченновимірного модуля, дуальність в категорії \mathcal{O} , формула Вейля для характерів, за останні 20 років узагальнювалися на різні випадки зображень як скінченновимірних алгебр Лі, так і алгебр Каца-Муїді.

У 1986 році, в своїй дисертаційній роботі, В.М. Футорним було розглянуто зображення напівпростих скінченновимірних алгебр Лі, що взагалі не мали елементів старшої ваги. В роботі було вивчено основні властивості таких модулів та описана явна конструкція у найпростішому випадку індукування з $sl(2)$ -розширення стандартної підалгебри Бореля. Надалі було побудовано категорію \mathcal{O}_α таких модулів та доведено, що $\mathcal{O}_\alpha \in \text{БГГ-категорію}$.

Більше того, за допомогою техніки, запропонованої в цій та подальших роботах, виявилось можливим будувати та вивчати зображення, вагові простори яких є нескін-

¹Verma D.N. Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 74(1968), p.160-166

²И.Н.Бернштейн, И.М.Гельфанд, С.И.Гельфанд, Структура представлений, порожденных векторами старшего веса, Функц. анализ и его прилож., 5(1971), с.1-9

³I.N.Bernstein, I.M.Gelfand, S.I.Gelfand, Differential operators on the base affine space and the study of \mathfrak{G} -modules, in:I.M.Gelfand, ed., Publ. of 1971 Summer School in Math., Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, p.21-64

⁴И.Н.Бернштейн, И.М.Гельфанд, С.И.Гельфанд, Об одной категории \mathfrak{G} -модулей, Функц. анализ и его прилож., т.10, вып.2, 1976, с.1-8

ченновимірними.

Але побудована теорія виявилася набагато складнішою за класичну, що одразу спричинило виникнення багатьох питань, які очевидним чином розв'язувались у класичному випадку. Найпростішим для вивчення виглядає випадок алгебри $sl(n, \mathbb{C})$, який має деякі особливі риси щодо вивчення вагових зображень з скінченновимірними ваговими підпросторами ⁽⁵⁾.

Мета роботи

Дослідити будову α -розширених узагальнених модулів Верма над алгеброю Лі $sl(n, \mathbb{C})$, отримати критерій існування нетривіальних гомоморфізмів між узагальненими модулями Верма, отримати критерій незвідності узагальненого модуля Верма, побудувати БГГ-резольвенту та обчислити формулу Вейля для характерів для незвідних факторів узагальнених модулів Верма.

Методи досліджень

Використовуються методи теорії зображень алгебр Лі, методи алгебраїчної геометрії та методи гомологічної алгебри.

Наукова новизна

Основні результати дисертаційної роботи є новими. Побудовано узагальнену групу Вейля, яка діє на множині параметрів α -розширених узагальнених модулів Верма, що узагальнює дію класичної групи Вейля на множині параметрів модулів Верма. В термінах дії цієї групи отримано критерій нетривіальності гомоморфізмів між двома α -розширеними узагальненими модулями Верма, що узагальнює відомий критерій БГГ для модулів Верма. Отримано критерій незвідності узагальненого α -розширеного модуля Верма. Для певної множини параметрів побудовано слабку та сильну БГГ-резольвенту модуля $L(\lambda, p)$. Обчислено узагальнену формулу Вейля для характера незвідного модуля $L(\lambda, p)$.

Теоретичне і прикладне значення

Отримані результати мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при дослідженні зображень напівпростих скінченновимірних комплексних алгебр Лі.

⁵D.Fernando, Lie algebra modules with finite-dimensional weight spaces I, Tr ans. Amer. Math. Soc., 322, 1990, p.757-781

Апробація роботи

Результати, отримані в дисертації доповідались на конференції молодих науковців Київського університету в 1994 та 1995 роках, на студентських наукових конференціях (Київ, КДУ 1992, 1993 рр.), на науковому семінарі кафедри алгебри та математичної логіки Київського університету імені Тараса Шевченка та на Київському алгебраїчному семінарі.

Робота була нагороджена медаллю з премією Академії Наук України, як краща наукова робота серед робіт молодих вчених у галузі математики у 1995 році.

Публікації

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1, 2, 3].

Структура і обсяг дисертації

Робота складається із вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури із 43 найменувань. Обсяг роботи 60 сторінок.

Автор висловлює глибоку подяку своєму науковому керівникові, професору Ю.А. Дрозду, а також В.М. Футорному та С.А. Овсієнко за плідні співбесіди та постійну увагу до роботи.

Зміст роботи

У вступі обгрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи.

§2.1 носить допоміжний характер. Він містить основні поняття та визначення, а також класичні результати стосовно модулів Верма та модулів, породжених векторами старшої ваги.

У §2.2 наводиться конструкція узагальнених модулів Верма та їх основні властивості.

Позначимо через \mathfrak{G} просту алгебру Лі $sl(n, \mathbb{C})$, через \mathfrak{h} — її підалгебру Картана, $\Delta = \Delta_- \cup \Delta_+$ — систему коренів алгебри \mathfrak{G} з базою π . Фіксуємо в \mathfrak{G} деяку стандартну базу Шевалле $X_\beta, \beta \in \Delta; H_\beta, \beta \in \pi$.

Для фіксованої алгебри Лі \mathfrak{A} , з фіксованою підалгеброю Картана, позначатимемо через $U(\mathfrak{A})$ універсальну обгортуючу алгебру алгебри \mathfrak{A} , через $U(\mathfrak{A})_0$ — централізатор підалгебри Картана в $U(\mathfrak{A})$ та через $Z(\mathfrak{A})$ — центр алгебри $U(\mathfrak{A})$.

Фіксуємо корінь $\alpha \in \pi$. Нехай D позначає підалгебру алгебри \mathfrak{G} , породжену елементами $X_\beta, \beta \in \Delta_+; H_\beta, \beta \in \pi; X_{-\alpha}$.

Позначимо $\Omega = \mathfrak{H}^* \times \mathbb{C}$. Нехай $(\lambda, p) \in \Omega$ та $\rho_\alpha = \frac{1}{2}\alpha$. Розглянемо \mathfrak{G} -модуль $N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p)$. Поклавши, для довільного $h \in \mathfrak{H}^*$ та для довільного $v \in N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p)$, $hv = (\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha)v$, ми перетворюємо $N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p)$ в $\mathfrak{G}^a + \mathfrak{H}$ -модуль. Більше того, поклавши $av = 0$ для довільних $a \in \mathfrak{H}_+^*$ та $v \in N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p)$, ми перетворюємо $N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p)$ в D -модуль.

Модуль

$$M_\alpha(\lambda, p) = U(\mathfrak{G}) \otimes_{U(D)} N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p),$$

називається узагальненим модулем Верма асоційованим з α , λ та p .

Основні властивості модулів $M(\lambda, p)$:

1. $M(\lambda, p)$ є ваговим, n_-^2 -вільним модулем з скінченновимірними ваговими підпросторами.
2. $M(\lambda, p)$ має єдиний максимальний підмодуль.
3. $M(\lambda, p) \in K_\alpha$.
4. $M(\lambda, p)$ є α -розшарованим тоді та тільки тоді, коли $N((\lambda_\alpha - \rho_\alpha)(H_\alpha), p)$ є незвідним.
5. $M(\lambda, p) \simeq M(\lambda + k\alpha, p)$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$.
6. $M(\lambda, p) \simeq M(\lambda, -p)$.

§2.3 присвячений визначенню дії узагальненої групи Вейля W_α на множині $\mathfrak{H}^* \oplus \mathbb{C}$, яка є аналогом дії класичної групи Вейля W на множині \mathfrak{H}^* — множині параметрів модулів Верма. Розглянемо розбиття $\pi = \{\alpha\} \cup \pi_1 \cup \pi_2$, де

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \{\beta \in \pi : (\alpha, \beta) \neq 0\} \setminus \{\alpha\}, \\ \pi_2 &= \{\beta \in \pi : (\alpha, \beta) = 0\}. \end{aligned}$$

Для кожного $(\lambda, p) \in \Omega$ та $\beta \in \pi_1$ позначимо $n_\beta = \frac{1}{2}(\lambda(H_\alpha + 2H_\beta) - p)$. Для кожного $\beta \in \pi$ визначимо такі лінійні перетворення w_β в Ω :

$$\begin{aligned} w_\beta(\lambda, p) &= (\lambda, -p), \text{ якщо } \beta = \alpha; \\ w_\beta(\lambda, p) &= (\lambda - n_\beta(\lambda, p)\beta, p + n_\beta(\lambda, p)), \text{ якщо } \beta \in \pi_1; \\ w_\beta(\lambda, p) &= (S_\beta\lambda, p) \text{ якщо } \beta \in \pi_2. \end{aligned}$$

Позначимо W_α групу породжену всіма елементами w_β для $\beta \in \pi$. Очевидно $W_\alpha < GL(\Omega)$.

Обґрунтуванням доцільності введення групи W_α є

Твердження 1. Нехай $(\lambda, \rho) \in \Omega^\alpha$ та $\beta \in \pi$. Якщо

$$\varphi_1(w_\beta(\lambda, \rho)) - \rho = \mu \in \text{supp } M(\lambda, \rho),$$

тоді існує α -примітивний елемент $v \in M(\lambda, \rho)_\mu$.

В §2.4 проводиться більш глибоке вивчення властивостей введеної групи W_α . Основним результатом цього параграфа є аналого відомої Харіш-Чандри про орбіту групи Вейля

Теорема 1. Нехай $r \in \mathbb{C}$ та елементи (λ, ρ) і (μ, q) належать Ω_r . Модулі $M(\lambda, \rho)$ та $M(\mu, q)$ мають однаковий центральний характер тоді та лише тоді, коли існує елемент $w \in W_\alpha$ такий, що $w(\lambda, \rho) = (\mu, q)$.

Глава 3 присвячена вивченню підмодульної будови α -розшарованих узагальнених модулів Верма.

§3.1 містить допоміжні леми, що грають важливу роль у доведенні основної теореми 2.

У §3.2 сформульовано та доведено основний результат глави — теорему 2, яка дає критерій існування нетривіальних гомоморфізмів між двома узагальненими модулями Верма у термінах дії групи W_α на просторі параметрів.

Теорема 2. Нехай (λ, ρ) та (μ, q) з Ω_r^α . Наступні умови рівносильні:

1. $M(\lambda, \rho) \subset M(\mu, q)$.
2. $L(\lambda, \rho) \in \mathcal{JH}(M(\mu, q))$.
3. Існує послідовність елементів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, які належать Δ_+ , та

$$(\mu, q) \geq w_{\beta_1}(\mu, q) \geq w_{\beta_2} w_{\beta_1}(\mu, q) \geq \dots \geq w_{\beta_k} \dots w_{\beta_1}(\mu, q) = (\lambda, \rho).$$

4. $\dim \text{hom}(M(\lambda, \rho), M(\mu, q)) = 1$.

§3.3 містить два наслідки з теореми 2. Перший з них описує необхідні та достатні умови того, що модуль $M(\lambda, \rho)$ є незвідним.

Теорема 3. Наступні твердження еквівалентні:

1. $M(\lambda, \rho)$ є незвідним.
2. Для довільного $\mathfrak{B} \in \Delta_+$ виконується $w_\beta(\lambda, \rho) \not\prec (\lambda, \rho)$.
3. Для довільного $\mathfrak{B} \in \Delta_+$, $U(\mathfrak{G}^{(\beta)})$ -модуль $U(\mathfrak{G}^{(\beta)})v$ є незвідним.

Другий наслідок описує критерій вкладання одного узагальненого модуля Верма в інший у термінах порядку Брюа на класах суміжності групи W_α у випадку, коли параметри модулів належать "домінантній решітці" $P(\alpha)$.

Теорема 4. Нехай $(\lambda, p) \in P^{++}(\alpha)$ та $w_1, w_2 \in W_\alpha$. Наступні умови рівносильні:

1. $M(w_1(\lambda, p)) \subset M(w_2(\lambda, p))$.

2. $w_2 W(\alpha) <_B w_1 W(\alpha)$.

Главу 4 присвячено побудові сильної та слабкої БГГ-резольвенти узагальнених модулів Верма, та обчисленню формули Вейля у частковому випадку, коли параметр, що задає незвідний модуль для якого проводяться обчислення, має вигляд $(\mu, q) = w_2 w_1(\lambda, p)$, де $(\lambda, p) \in P^{++}(\alpha)$, w_1 — найдовший елемент групи W_α , а w_2 — найдовший елемент її підгрупи, породженої всіма елементарними відбиттями, крім відбиття, що відповідає кореню α при стандартному ізоморфізмі з класичною групою Вейля.

У §4.1 наводяться деякі відомості з теорії когомологій алгебр Лі. Для $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ будеться комплекс $V(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}, \lambda, \alpha)$, який узагальнює відомий комплекс $V(\mathfrak{G}, \mathfrak{P})$.

$V(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}, \lambda, \alpha)$ має вигляд:

$$D_0 \xleftarrow{d_1} D_1 \xleftarrow{d_2} D_2 \xleftarrow{d_3} \dots$$

де для $i \geq 0$ через D_i позначено \mathfrak{G} -модуль

$$D_i = U_i \otimes \bigwedge^i \mathfrak{P},$$

$U_i = U(\mathfrak{h}^{\otimes i})$

та гомоморфізми d_k задаються формулами

$$d_k(X \otimes X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} X X_i \otimes X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge X_k +$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} X \otimes [X_i, X_j] \wedge X_1 \wedge \dots \wedge \hat{X}_i \wedge \dots \wedge \hat{X}_j \wedge \dots \wedge X_k.$$

Теорема 5. Комплекс $V(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}, \alpha, \lambda)$ є точним.

В §4.2 за допомогою комплексу $V(\mathfrak{G}, \mathfrak{P}, \lambda, \alpha)$ будеться слабка БГГ-резольвента модуля $L(\mu, q)$, для вищеписаних параметрів (μ, q) .

Теорема 7. Нехай $(\lambda, p) \in \Omega^\alpha \cap P^{++}(\alpha)$ та $(\mu, q) = w_2 w_1(\lambda, p)$. Тоді для модуля $L(\mu, q)$ існує точна резольвента $V(\mu, q)$ вигляду

$$0 \leftarrow L(\mu, q) \leftarrow M(\mu, q) \leftarrow B_1(\mu, q) \leftarrow \dots \leftarrow B_m(\mu, q) \leftarrow 0,$$

де $m = |\Delta_+(\alpha)|$ та

$$B_i(\mu, q) \simeq \bigoplus_{w \in (W_+^*)^i} M(w(\mu, q)).$$

У §4.3 наводиться конструкція сильної БГГ-резольвенти модуля $L(\mu, q)$.

Нехай $C_i = \bigoplus_{w \in (W_+^*)^{(i)}} M(w(\mu, q))$. Позначимо

$$d_i = (d_{w_1, w_2}^{(i)})_{w_1 \in (W_+^*)^{(i)}, w_2 \in (W_+^*)^{(i-1)}}$$

матрицю відображення класичної БГГ-резольвенти⁶.

Теорема 8. *Послідовність $V_{Str}(\mu, q)$, що має вигляд*

$$0 \leftarrow L(\mu, q) \xleftarrow{\epsilon} M(\mu, q) \xleftarrow{d_{(1)}} \bigoplus_{w \in (W_+^*)^{(1)}} M(w(\mu, q)) \xleftarrow{d_{(2)}} \dots \xleftarrow{d_{(m)}} M(w_2(\mu, q)) \leftarrow 0$$

є точною.

У §4, ґрунтуючись на результатах двох попередніх параграфів, отримано формулу Вейля для характеру модуля $L(\mu, q)$, що узагальнює класичну формулу Вейля скінченновимірному модуля ([6, теорема 7.5.9]). Основним результатом є

Теорема 10.

$$\begin{aligned} \text{ch}(L(\mu, q)) = e^\sigma \left(\sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha} \right) & \left(\sum_{w \in W_+^*} (-1)^{l(w)} e^{w(\mu + \rho_1)} \right) \times \\ & \times \left(\sum_{w \in W_+^*} (-1)^{l(w)} e^{w(\rho_{(\mu, q)} + \rho_1)} \right)^{-1} \left(\sum_{s \in B} (-1)^{l(s)} e^{s(\sigma)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Як допоміжний результат, обчислено характер узагальненого модуля Верма (лема 35).

⁶I.N.Bernstein, I.M.Gelfand, S.I.Gelfand, Differential operators on the base affine space and the study of \mathfrak{G} -modules, in: I.M.Gelfand, ed., Publ. of 1971 Summer School in Math., Janos Bolyai Math. Soc., Budapest, p.21-64

Роботи автора за темою дисертації

- [1] В.С.Мазорчук, α -расслоённые модули над алгеброй Ли $sl(n, \mathbb{C})$, Укр. мат. журн., 1993, т.45, №9, с.1215-1224
- [2] Мазорчук В.С. БГГ-резольвента та формула Вейля для узагальнених модулів Верма, Збірник праць студентів та аспірантів Київського університету (природничі науки), Київ-1994, с.36-44
- [3] Mazorchuk V.S. On the structure of an α -stratified generalized Verma Module over Lie algebra $sl(n, \mathbb{C})$, Manuscripta Mathematica 88, 59-73(1995)

Ключові слова: алгебра Лі, модуль Верма, група Вейля, точна послідовність, резольвента, формальний характер.

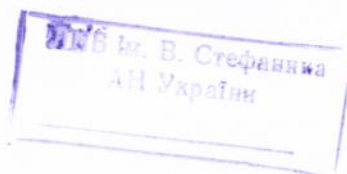
Мазорчук В.С., Структура обобщенных модулей Верма. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — алгебра и теория чисел. Киевский университет имени Тараса Шевченка, Киев, 1996.

В диссертации исследуются структура обобщенных модулей Верма над алгеброй Ли $sl(n, \mathbb{C})$. Построена обобщенная группа Вейля, которая действует на множестве параметров α -расслоенных обобщенных модулей Верма. В терминах действия этой группы получен критерий существования нетривиальных гомоморфизмов между двумя α -расслоенными обобщенными модулями Верма. Получено критерий неприводимости обобщенного модуля Верма. Для некоторого множества параметров построено слабую и сильную БГГ-резольвенту модуля $L(\lambda, p)$. Получено обобщенную формулу Вейля для характера неприводимого модуля $L(\lambda, p)$.

Mazorchuk V.S., The structure of generalized Verma modules. Manuscript. Thesis of dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06—algebra and number theory. Kiev Taras Shevchenko university, Kyiv, 1996

There are investigated the structure of the generalized Verma modules over the Lie algebra $sl(n, \mathbb{C})$. There were constructed the generalized Weyl group, acting on the set of parameters of the α -stratified generalized Verma modules. A criterium of the existence of non-trivial homomorphisms between given generalized Verma modules was obtained in terms of the action of this group. There was obtained a criteria of irreducibility of generalized Verma module. For a certain set of parameters weak and strong BGG-resolution of the module $L(\lambda, p)$ was constructed and the generalization of the Weyl characters formula of the module $L(\lambda, p)$ was obtained.

Зам. №84 Тираж 75
ВПЦ "Київський університет"



AR 34855
AB 34.859

1981
1982
1983