

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

НЕЩАДИМ Олександр Михайлович
МЕТОД ГРАНИЧНИХ
ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
В НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ
ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

01.01.03 — математична фізика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на одбуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1996

Дисертація в рукопис

Робота виконана в Київському інженерно-будівельному інституті та Українському державному університеті харчових технологій

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор БІЛОНОСОВ С.М.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор ЛИТВИНОВ В.Г.

кандидат фізико-математичних наук
ПЛОТНИЦЬКИЙ Т.А.

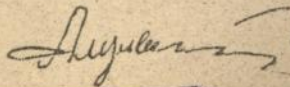
Провідна установа: Київський університет ім. Т.Шевченка

Захист відбудеться 11 червня 1996 р. о 15 годині
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.66.02
при Інституті математики НАН України за адресою:
252601, Київ, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту

Автореферат розісланий 8 травня 1996 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз.-мат. наук

 ЛУЧКА А.Д.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00740566 (S)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато задач математичної фізики полягає в розв'язуванні всередині деякої області диференціальних (інтегро-диференціальних) рівнянь з частинними похідними за певних умов на межі цієї області. Для розв'язання цих задач успішно застосовується метод потенціалів, який має більш загальну назву - метод граничних інтегральних рівнянь. Згідно з даним методом вихідна початково-крайова задача перетворюється в інтегральне рівняння, визначене на межі області. Реалізація методу потенціалів, стосовно кожної конкретної задачі, зв'язана з деякими труднощами. По-перше, необхідно знайти (точно або наближено) фундаментальний розв'язок, як функцію двох змінних точок, відповідного диференціального (або інтегро-диференціального) рівняння задачі. По-друге, потрібно вивести спеціальні функціональні співвідношення, які узагальнюють відомі із класичного аналізу формули Гріна, що зв'язують інтеграли по досліджуваній області з потенціалами по її межі. По-третє, дослідити граничні властивості одержаних потенціалів.

Метод граничних інтегральних рівнянь вигідно виділяється серед числових методів розв'язання задач математичної фізики. Останнім часом значна увага дослідників приділяється застосуванню методу потенціалів для розв'язування крайових задач в'язкопружності. При цьому, як правило, розглядаються задачі з малю змінов межі області. Задачі спадкової пружності з рухомими межами мало вивчені. Розробка ефективних методів дослідження і розв'язування таких задач є важливою проблемою.

Мета роботи:

- розробка методу потенціалів розв'язування початково-крайових задач лінійної в'язкопружності в плоских областях з рухомими межами;

- представлення методики наближеного розв'язування одержаних

інтегральних рівнянь.

Загальна методика досліджень. В дисертаційній роботі використовуються методи математичної фізики, методи теорії диференціальних рівнянь, методи теорії інтегральних рівнянь, методи теорії функцій комплексної змінної і інтегральних перетворень, методи теорії потенціалів, алгебри (векторна і матрична алгебра), методи теорії наближених обчислень.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що в ній:

- знайдено фундаментальні розв'язки інтегро-диференціальних рівнянь рівноваги та руху в переміщених однорідних, ізотропних, нестаріючих лінійно-в'язкопружних середовищ, які характеризуються реологічними моделями Максвелла, Ю.М.Работнова, А.Р.Фішбіна;
- одержано узагальнення формул Гріна для інтегро-диференціальних рівнянь в'язкопружної поведінки тіла;
- знайдено інтегральне зображення розв'язку рівняння руху (рівноваги) в'язкопружного тіла всередині області з рухомою межею;
- введені і досліджені в'язкопружні потенціали;
- побудовані системи граничних інтегральних рівнянь розв'язання основних крайових задач спадкової пружності;
- досліджена розв'язність систем сингулярних інтегральних рівнянь;
- доведено теореми єдиності розв'язків нестационарних крайових задач в області, яка змінюється з часом;
- запропоновано метод розв'язування систем сингулярних інтегральних рівнянь другого роду;
- розроблено алгоритми чисельного розв'язання в'язкопружних задач з рухомою межею;
- розв'язана квазістатична задача зв'язаної термов'язкопружності для довгої тонкої пластини.

Теоретична і практична цінність. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати є новими і можуть застосовуватись для розв'язування задач математичної фізики з рухомими межами, що дасть змогу моделювати в'язкопружну поведінку досліджуваних матеріалів.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались і обговорювались на Всесоюзній конференції "Інтегральні рівняння і крайові задачі математичної фізики" (Владивосток, 1990), на ІУ Всесоюзному симпозиумі "Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики" (Харків, 1989), на Республіканській науково-технічній конференції "Ефективні чисельні методи розв'язування крайових задач механіки твердого деформованого тіла" (Харків, 1989), на "Далекосхідному семінарі з проблем математичної фізики і обчислювальної математики" (Владивосток, 1989), на Об'єднаному семінарі математичних кафедр Київських вузів і деяких відділів інститутів АН УРСР "Теорія потенціалу і крайові задачі математичної фізики" (Київ, КІБІ, 1982-1986), на Міхлузівському науковому семінарі "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Київ, КДУ, 1996), на науковому семінарі кафедри теоретичної і прикладної механіки Київського університету ім. Т.Шевченка (Київ, 1996).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 6].

Статті [1,2,4,5] опубліковані у співавторстві з науковим керівником. В роботі [1] С.М.Вілоносову належить інтегральне зображення розв'язку рівняння лінійної в'язкопружної квазістатички в плоскій області з нерухомою межею. Результати статті [2] належать трьом авторам в однаковій мірі. В роботі [4] С.М.Вілоносову належить ідея наближеного знаходження фундаментального розв'язку інтегро-диференціального рівняння плоского руху в'язко-

пружного середовища експоненціального типу. В статті [5] науковому керівнику належить постановка задачі. Решта результатів, опублікованих у співавторстві з С.М.Білоносовим, одержані автором дисертації особисто.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновку та списку використаної літератури. Об'єм роботи - 156 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, її теоретичну та практичну цінність, наведено короткий огляд робіт в даній тематики, дається опис змісту та результатів роботи.

У розділі I коротко викладаються основні застосовувані співвідношення лінійної теорії в'язкопружності. Виділяються реологічні моделі, запропоновані Максвеллом, Д.М.Работновим, А.Р.Ржаницьким, в'язкопружної поведінки однорідних, ізотропних, нестаріючих матеріалів. Наводяться інтегро-диференціальні рівняння в переміщеннях плоского руху часток суцільного в'язкопружного середовища. Знайдені фундаментальні розв'язки (точні і наближені) вказаних рівнянь для конкретних реологічних моделей. Формулюються основні початково-крайові задачі спадкової теорії пружності.

В § I залежність між малими деформаціями і напруженнями однорідного, нестаріючого в'язкопружного ізотропного тіла вибирається у формі лінійних рівнянь стану з ядрами зсувної релаксації $q(t)$ і об'ємної релаксації $k(t)$. У випадку плоскої деформації прийнята така інтегро-диференціальна форма рівняння руху в'язкопружного середовища:

$$\mu \Delta \bar{u}(t) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}(t) - \mu \int_0^t q(t-\tau) [\Delta \bar{u}(\tau) + \frac{4}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}(\tau)] d\tau - \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}(t)}{\partial t^2} + \bar{f}(\bar{x}, t; \bar{u}) = \bar{0}, \quad (1)$$

тут

$$\bar{f}(\bar{x}, t; \bar{u}) = \rho_0 \bar{m}(\bar{x}, t) [1 - \operatorname{div} \bar{u}(t)] - k \int_0^t h(t-\tau) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}(\tau) d\tau; \quad (2)$$

$\bar{x} \equiv \bar{e}^k x_k(t)$ - радіус-вектор точки плоскої області в момент часу, $t > 0$ ($\{\bar{e}^i, \bar{e}^2\}$ - декартів базис); $\bar{u}(t) \equiv \bar{e}^k u_k(\bar{x}, t)$ - вектор малих переміщень; Δ - оператор Лапласа; $\bar{m}(\bar{x}, t)$ - інтенсивність масових сил; $\rho_0 = \rho(\bar{x}, t)|_{t=0}$ - густина ($\rho_0 = \text{const}$); μ - шиттєво-пружний модуль зсуву; k - миттєвий модуль об'ємної деформації; $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$. Оскільки вважається, що об'ємна релаксація в'язко-пружних матеріалів незначна, то доданки із ядрами $h(t)$ формально об'єднані із об'ємними силами. Такий підхід доцільний в поєднанні з методом "кроків по часі" (варіант скінченнорізницевого методу по змінній t).

Нехтуючи величиною $h(t)$, одержуем рівняння руху в переміщеннях для узагальненого плоского напруженого стану у вигляді:

$$(k + \frac{4}{3}\mu) \Delta \bar{u}(t) + 3k \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}(t) - \frac{4}{3}\mu \int_0^t q(t-\tau) \Delta \bar{u}(\tau) d\tau - (k + \frac{4}{3}\mu) \rho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}(t)}{\partial t^2} - \rho_0 k \int_0^t q^*(t-\tau) \frac{\partial^2 \bar{u}(\tau)}{\partial \tau^2} d\tau + \bar{f}^*(\bar{x}, t; \bar{u}) = \bar{0}, \quad (3)$$

де

$$\bar{f}^*(\bar{x}, t; \bar{u}) = (k + \frac{4}{3}\mu) \rho(\bar{x}, t) \bar{m}(\bar{x}, t) + k \int_0^t q^*(t-\tau) \rho(\bar{x}, \tau) \bar{m}(\bar{x}, \tau) d\tau, \quad (4)$$

$q^*(t)$ - ядро зсувної повзучості. Найбільшого застосування в розрахунковій практиці спадкової пружності набули ядра релаксації:

$$q(t) = \frac{c}{\alpha} \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right), \quad h(t) = \frac{c_0}{\alpha_0} \exp\left(-\frac{t}{\alpha_0}\right); \quad (5)$$

$$q(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}; \quad (6)$$

$$q(t) = c t^{\alpha-1} \exp(-\beta t), \quad (7)$$

де $\alpha, \beta, c, \alpha, c_0, \alpha_0$ - параметри матеріалу. Ядра (5) - (7) пов'язані з іменами відповідно Максвелла, Д.М.Работнова, А.Р.Фіанціна.

В області \mathcal{D} , обмеженій гладким замкненим контуром L , для рівнянь руху (1), (3) формулюються основні початково-крайові задачі з нульовими початковими умовами

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{u}'_t(\bar{x}, 0) = \bar{0}.$$

Задача 1. На межі області відомі переміщення

$$\bar{u}(\bar{x}, t)|_L = \bar{u}^*(\bar{x}^*, t), \quad \bar{x}^* \in L, \quad t > 0. \quad (8)$$

Задача 2. На площинці контура L з зовнішньою нормаллю \bar{n} задані напруження

$$\bar{p}_n(\bar{x}, t)|_L = \bar{p}(\bar{x}^*, t), \quad \bar{x}^* \in L, \quad t > 0. \quad (9)$$

Задача 3. На контурі $L = L_1 \cup L_2$ задаються змішані умови: на частині L_1 відомі переміщення, а на іншій частині L_2 контура L задані напруження.

У випадку квазістатик (інерційні члени в рівняннях (1) і (3) відсутні) крайові задачі ставляться подібним чином.

В § 2 для кожного із інтегро-диференціальних рівнянь (1), (3) в безмежній плоскій області будуються фундаментальні розв'язки (матриці Гріна), регулярні в нескінченності. Знайдено скалярні функції

$$2\pi \Phi(z, \rho) = [\ln z + K_0(\rho \zeta)] / (\rho \rho^2), \quad (10)$$

$$2\pi \Omega(z, \rho) = [\ln z + K_0(\rho z)] / (\rho \rho^2);$$

при допомозі яких перетворені за Лапласом фундаментальні розв'язки розкладено на потенціальну і соленоїдну складові:

$$\bar{V}^{(1)}(z, \rho) = \text{grad}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \text{rot}_x [\bar{e}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}], \quad (11)$$

$$\bar{V}^{(2)}(z, \rho) = \text{grad}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \text{rot}_x [\bar{e}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}].$$

Тут позначено: $K_0(x)$ - функція Макдональда,

$$z = |\bar{x} - \bar{y}|, \quad \zeta = z \sqrt{\rho_0 / [\mu(1-Q)]};$$

$$\xi = \begin{cases} z \sqrt{\rho_0 / [3k + 4\mu(1-Q)]} & \text{- при плоскій деформації (рівняння (1))}, \\ \frac{z}{2} \left(\frac{\rho_0 [3k + 4\mu(1-Q)]}{\mu(1-Q) [3k + \mu(1-Q)]} \right)^{1/2} & \text{- при плоскому напруженому стані (рівняння (3))}; \end{cases}$$

$$Q(\rho) = \int_0^{\infty} q(t) \exp(-\rho t) dt.$$

Компоненти векторних функцій $\bar{V}^{(1)}(z, \rho)$, $\bar{V}^{(2)}(z, \rho)$ утворюють рядки матриці Гріна. Знайдено наближений вигляд функцій $\Psi(z, t)$ і $\omega(z, t)$ шляхом розгортання функцій $\Phi(z, \rho)$ і $\Omega(z, \rho)$ в ряд за малим параметром зображення $Q(\rho)$.

В § 3 побудовані фундаментальні розв'язки квазістатичного наближення рівнянь (1) і (3). Як і для випадку динаміки, одержано представлення у вигляді

$$\bar{v}^{(1)}(z, t) = \text{grad}_x \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \text{rot}_x [\bar{e}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_2}] \quad (12)$$

$$\bar{v}^{(2)}(z, t) = \text{grad}_x \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \text{rot}_x \left[\bar{e}^3 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right].$$

Для реологічних моделей (5) - (7) функції $\psi(z, t)$ і $\omega(z, t)$ знайдені за таблицями інтегральних перетворень. Вказані функції одержано також для в'язкопружного середовища Максвелла, в якому $h(t) \neq 0$ (має місце об'ємна релаксація).

II розділ присвячений побудові граничних інтегральних рівнянь сформульованих початково-крайових задач з нерухомим контуром плоскої області. Використовується перетворення Лалласа за часом до вихідних співвідношень. Досліджується розв'язність одержаних систем сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язана квазістатична задача термов'язкопружності для нескінченно довгої пластини.

В § 4 одержані узагальнення формул Гріна для інтегро-диференціальних рівнянь Ляме (I) і (3). Для рівняння (I) в області \mathcal{D} знайдено інтегральне зображення функції переміщень через її контурні значення і значення векторної функції напружень

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(\bar{x}, t) : \\ \bar{u}(\bar{y}, t) = -\nabla \times \nabla \times \int\limits_0^t \int\limits_L \left[\bar{P}_n(\bar{x}, \tau) \omega(z, t-\tau) - \mu \bar{u}(\tau) \frac{\partial \omega(z, t-\tau)}{\partial n} \right] ds + \\ + \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_0^t \bar{F}(\bar{x}, \tau) \omega(z, t-\tau) d\sigma \} d\tau + \nabla \int\limits_0^t \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \bar{F}(\bar{x}, \tau) \cdot \nabla \psi(z, t-\tau) d\sigma + \\ + \int\limits_L \left[\bar{P}_n(\bar{x}, \tau) \cdot \nabla \psi(z, t-\tau) + \lambda (\bar{n}, \bar{u}(\tau)) \Delta \psi(z, t-\tau) - \right. \\ \left. - 2\mu \bar{u}(\tau) \cdot \nabla \frac{\partial \psi(z, t-\tau)}{\partial n} \right] ds \} d\tau - \mu \nabla \times \nabla \cdot \int\limits_0^t \int\limits_0^{\tau} \int\limits_L \bar{u}(\xi) \frac{\partial \omega(z, \tau-\xi)}{\partial n} ds - \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu \nabla \times \bar{e}^3 \int_0^t \left\{ \int_L \bar{u}(\tau) \cdot \nabla \frac{\partial \psi(\tau, t-\tau)}{\partial s} ds - q(t-\tau) \int_0^\tau \int_L \bar{u}(\xi) \cdot \nabla \frac{\partial \psi(\tau, \tau-\xi)}{\partial s} ds \right\} d\tau \\
 & + 2\mu \nabla \int_0^t q(t-\tau) d\tau \int_0^\tau \int_L \left[\frac{1}{3} (\bar{u}(\xi), \bar{n}) \Delta \psi(\tau, \tau-\xi) + \bar{u}(\xi) \cdot \nabla \frac{\partial \psi(\tau, \tau-\xi)}{\partial n} \right] ds,
 \end{aligned}$$

де $\bar{y} \in \mathcal{D}$, $\bar{x} \in L$, $\nabla = \bar{e}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$, $grad = \bar{e}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Аналогічно зображено розв'язок рівняння (3).

У § 5 вводяться потенціали для перетворених за Лапласом рівнянь рівноваги та руху в'язкопружного середовища. Наводяться формули для обчислення похідних потенціалу простого шару. Знайдені ядра потенціалів подвійного шару і функції напружень. Досліджені граничні властивості цих ядер. За умов гладкості контура L і щільностей потенціалів встановлено, що досліджувані потенціали мають властивості, подібні властивостям добре відомих в математичній фізиці ньютонівських потенціалів простого і подвійного шару.

В § 6, виходячи з інтегрального вигляду (13) функції $\bar{u}(\bar{y}, t)$ введені в'язкопружні потенціали простого шару $\bar{v}(\bar{y}, t | \bar{v})$ та подвійного шару $\bar{w}(\bar{y}, t | \bar{\eta})$ з векторними щільностями $\bar{v}(\bar{x}, t)$ і $\bar{\eta}(\bar{x}, t)$ ($\bar{x} \in L$, $\bar{y} \in \mathcal{D}$). На основі властивостей цих потенціалів крайові задачі (8), (9) для рівнянь руху та рівноваги спадково-пружних середовищ зведені до систем сингулярних граничних інтегральних рівнянь другого роду відносно невідомих щільностей потенціалів.

У § 7 вивчається розв'язність одержаних граничних інтегральних рівнянь. Показано, що сингулярні інтегральні рівняння є квазіфредгольмовими. Встановлено, що внутрішня задача I та

зовнішня задача 2 так же, як і зовнішня задача 1 та внутрішня задача 2, є взаємно солвними. Згідно з теоремами Фреді'ольма зроблено аналіз розв'язності вказаних внутрішніх та зовнішніх задач. Показана однозначна розв'язність внутрішньої задачі 1 і зовнішньої задачі 2. Установлено виродженість зовнішньої задачі 1 і внутрішньої задачі 2.

В § 8 розв'язана квазістатична задача лінійної термов'язкопружності для довгої пластинки. Розв'язок цієї задачі знайдено в аналітичній формі: наведено формули обчислення термов'язкопружних напружень на межі полоси для кожної з реологічних моделей (5) - (7). Одержані результати порівнюються з відомим розв'язком термопружної задачі.

Розділ III. присвячений побудові граничних інтегральних рівнянь для в'язкопружних початково-крайових задач з рухомих меж на площині області. Формулюються і доводяться теореми єдиності розв'язків крайових задач спадкової пружності. Пропонується метод для чисельного розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду з рухомих контуром інтегрування.

В § 9 виведені формули Гріна для інтегро-диференціальних рівнянь (1) і (3) (розглянуто випадки динаміки та квазістатички) при умові, що область \mathcal{D} змінюється з часом: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$. На основі цих формул одержано інтегральне зображення розв'язків рівнянь (1) і (3) всередині області $\mathcal{D}(t)$, обмеженої ліній $L(t)$. У випадку повільного руху в'язкопружного середовища, малих деформацій за короткий проміжок часу і повільної зміни межі $L(t)$ розв'язки лінеаризованих рівнянь руху в'язкопружного середовища (1), (3) формально співпадають з розв'язками відповідних рівнянь рівноваги. Відмінність полягає в тому, що функції

$\varphi(z, t)$ і $\omega(z, t)$ у випадках динаміки та квазістатички мають різний вигляд.

У § 10 зміна контуру $L(t)$ в часі описується в змінних Лагранжа (ℓ, t) співвідношенням

$$\bar{x}(\ell, t) = \bar{u}(\bar{x}, t) + \bar{x}(\ell), \quad (14)$$

де $\bar{x}(\ell) = \bar{e}^x \bar{x}_x(\ell)$ - рівняння лінії $L(t)$, ℓ - її довжина. Введені в'язкопружні потенціали з векторними щільностями, розподіленими на контурі $L(t)$. Функції

$$\bar{v}(\bar{y}, t | \bar{v}) = -\nabla \times \nabla \times \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{v}(\ell, \tau) \omega(z, t - \tau) ds - \quad (15)$$

$$-\nabla \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{v}(\ell, \tau) \operatorname{grad} \varphi(z, t - \tau) ds,$$

$$\bar{w}(\bar{y}, t | \bar{w}) = -\mu \nabla \times \nabla \times \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{w}(\ell, \tau) \frac{\partial \omega(z, t - \tau)}{\partial n} ds -$$

$$-\lambda \nabla \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{w}(\ell, \tau) \Delta \varphi(z, t - \tau) ds + 2\mu \nabla \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{w}(\ell, \tau) \nabla \frac{\partial \varphi(z, t - \tau)}{\partial n} ds -$$

$$-\mu \nabla \times \bar{e}^3 \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{w}(\ell, \tau) \operatorname{grad} \frac{\partial \omega(z, t - \tau)}{\partial s} ds +$$

$$+\mu \nabla \times \nabla \times \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \int_0^{t-\tau} q(t - \tau - \xi) \frac{\partial \omega(z, \xi)}{\partial n} d\xi ds + \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & + \nabla \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{\eta}(\ell, \tau) ds \int_0^{t-\tau} [2\mu \operatorname{grad} \frac{\partial \psi(\tau, \xi)}{\partial n} q(t-\tau-\xi) - \\
 & - \frac{2}{3} \mu \bar{n}(\bar{x}) q(t-\tau-\xi) \Delta \psi(\tau, \xi)] d\xi - \\
 & - \mu \nabla \times \bar{e}^3 \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \bar{\eta}(\ell, \tau) ds \int_0^{t-\tau} q(t-\tau-\xi) \operatorname{grad} \frac{\partial \omega(\tau, \xi)}{\partial s} d\xi
 \end{aligned}$$

е в'язкопружними потенціалами простого і подвійного шару для рівняння (I). Тут позначено: $\bar{n}(\bar{x})$ — зовнішня нормаль до контура $L(\tau)$ в точці $\bar{x}(\ell, \tau)$,

$$ds(\tau) = \left| \frac{\partial \bar{x}(\ell, \tau)}{\partial \ell} \right| d\ell.$$

Встановлені властивості потенціалів (15), (16), на основі яких розв'язування крайових задач для рівнянь (I), (3) зводиться до систем граничних інтегральних рівнянь. Так, для квазістатичної задачі I плоскої деформації одержана система інтегральних рівнянь

$$\pm \pi \zeta_i(\ell_0, t) + \int_{L(t)} \sum_{j=1}^2 \zeta_j(\ell, t) k_{ij}^{(2)}(\ell, \ell_0; t) ds(\tau) + \quad (17)$$

$$+ \int_0^t \tilde{k}(t-\tau) d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{j=1}^2 \zeta_j(\ell, \tau) k_{ij}^{(2)}(\ell, \ell_0; t, \tau) ds(\tau) = g_i(\ell_0, t), \quad i=1, 2.$$

Для задачі 2 система граничних інтегральних рівнянь має вигляд

$$\pm \pi v_i(\ell_0, t) + \int_{L(t)} \sum_{j=1}^2 v_j(\ell, t) k_{ij}^{(1)}(\ell, \ell_0; t) ds(\tau) + \quad (18)$$

$$+ \int_0^t \tilde{k}(t-\tau) d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{j=1}^2 v_j(\ell, \tau) k_{ij}^{(1)}(\ell, \ell_0; t, \tau) ds(\tau) = \Psi_i(\ell_0, t), \quad i=1, 2.$$

Для ядер $k_{ij}^{(m)}(l, l_0; t) \pm k_{ij}^{(n)}(l, l_0; t, \tau)$ виконуються співвідношення спряженості

$$k_{ij}^{(1)}(l, l_0; t) = -k_{ji}^{(2)}(l_0, l; t); \quad k_{ij}^{(1)}(l, l_0; t, \tau) = -k_{ji}^{(2)}(l_0, l; t, \tau),$$

причому

$$k_{11}^{(1)}(l, l_0; t) = [(1-3\mu_0)\cos\gamma(t) + \cos\gamma(t)\cos 2\gamma_0(t) + 3\mu_0 \sin\gamma(t)\sin 2\gamma_0(t)]/\varepsilon(t),$$

$$k_{12}^{(1)}(l, l_0; t) = [(1-3\mu_0)\sin\gamma(t) + \sin\gamma(t)\cos 2\gamma_0(t) - 3\mu_0 \cos\gamma(t)\sin 2\gamma_0(t)]/\varepsilon(t),$$

$$k_{21}^{(1)}(l, l_0; t) = [\cos\gamma(t)\sin 2\gamma_0(t) - 3\mu_0 \sin\gamma(t)\cos 2\gamma_0(t)]/\varepsilon(t),$$

$$k_{22}^{(1)}(l, l_0; t) = [\sin\gamma(t)\sin 2\gamma_0(t) + 3\mu_0 \cos\gamma(t)\cos 2\gamma_0(t)]/\varepsilon(t);$$

$$k_{11}^{(1)}(l, l_0; t, \tau) = 3\mu_0 [\cos\gamma(\tau) - \sin\gamma(\tau)\sin 2\gamma_0(\tau)]/\varepsilon(\tau), \quad (19)$$

$$k_{12}^{(1)}(l, l_0; t, \tau) = 3\mu_0 [\sin\gamma(\tau) + \cos\gamma(\tau)\sin 2\gamma_0(\tau)]/\varepsilon(\tau),$$

$$k_{21}^{(1)}(l, l_0; t, \tau) = 3\mu_0 \sin\gamma(\tau)\cos 2\gamma_0(\tau)/\varepsilon(\tau),$$

$$k_{22}^{(1)}(l, l_0; t, \tau) = -3\mu_0 \cos\gamma(\tau)\cos 2\gamma_0(\tau)/\varepsilon(\tau),$$

де

$$\varepsilon(t) = |\bar{x}(l, t) - \bar{x}(l_0, t)|, \quad \varepsilon(\tau) = |\bar{x}(l, \tau) - \bar{x}(l_0, \tau)|,$$

$$\gamma(t) = (\widehat{\bar{z}(t)}, \bar{n}(l, t)), \quad \gamma(\tau) = (\widehat{\bar{z}(\tau)}, \bar{n}(l, \tau)),$$

$$\gamma_0(t) = (\widehat{\bar{z}(t)}, \bar{n}_0), \quad \gamma_0(\tau) = (\widehat{\bar{z}(\tau)}, \bar{n}_0), \quad \bar{n}_0 = \bar{n}(l_0, t)$$

В залежності від реологічної моделі функція $\tilde{k}(t)$ має вигляд:

а) для моделі (5)

$$\tilde{k}(t) = \left[(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_0})(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha}) e^{\alpha_1 t} - (\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_0})(\alpha_2 + \frac{1}{\alpha}) e^{\alpha_2 t} \right] / (\alpha_2 - \alpha_1);$$

б) для моделі (6)

$$\tilde{k}(t) = \frac{3k}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (4\mu c)^n \frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)};$$

в) для моделі (7)

$$\tilde{k}(t) = \frac{3k}{4\mu} \sum_{n=1}^{\infty} [4\mu c \Gamma(\alpha)]^n \frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} \exp(-\beta t),$$

ут позначено

$$\mu_0 = \mu / (3k + 4\mu)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-3k(\alpha + \alpha_0 - c_0 \alpha) - 4\mu(\alpha + \alpha_0 - c \alpha_0) \pm \sqrt{d_0}}{2\alpha \alpha_0 (3k + 4\mu)},$$

$$d_0 = [3k(\alpha_0 - \alpha + c_0 \alpha) - 4\mu(\alpha_0 - \alpha + c \alpha_0)]^2 + 4\mu \alpha \alpha_0 c c_0 k \mu > 0$$

В системах рівнянь (17), (18) верхній знак "+" при щільностях відповідає внутрішнім задачам, а нижній знак "-" - зовнішнім. Наводяться формули для обчислення функцій $g_i(l, t)$ і $\psi_i(l, t)$.

§ II присвячений вивченню єдиності розв'язків основних крайових задач складкової пружності в областях з рухомими межами. Одержані результати сформульовані у вигляді теорем. У випадку плоскої деформації інтегро-диференціальний оператор з пам'яттю має вигляд

$$\mathcal{L}(q, h) = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \text{grad div} - \int_0^t \mu q(t-\tau) [\Delta + \text{grad div}] - \\ - \left[\frac{2}{3} \mu q(t-\tau) - k h(t-\tau) \right] \text{grad div} \} \langle \cdot \rangle d\tau.$$

Теорема 1. Граничні розв'язки задач 1 та 3 для рівняння рівноваги

$$\mathcal{L}(q, h)\bar{u}(t) + \bar{f}(\bar{x}, t) = \bar{0}$$

ізотропного, в'язкопружного нестаріючого середовища єдині в області $\mathcal{D}(t)$, якщо ядра релаксації $q(t)$ і $h(t)$ обмежені.

Теорема 2. Перша і третя початково-крайові задачі динамічної теорії лінійної в'язкопружності мають єдиний розв'язок в області $\mathcal{D}(t)$, якщо ядра релаксації обмежені.

В § 12 пропонується метод чисельного розв'язування систем інтегральних рівнянь другого роду, які мають вигляд (17), (18): метод "кроків за часом". Згідно з цим методом, в кожен момент часу послідовно розв'язуються два рівняння Фредгольма другого роду відносно компонент векторної щільності. Найвні особливості інтегралів переносяться в праві частини розв'язуваних рівнянь і чисельно визначаються на кожному кроці обчислень. За знайденими щільностями в момент часу $t = t_k$ обчислюються переміщення $\bar{u}(\bar{x}, t_k)$ на межі області $\mathcal{D}(t)$. Значачи ці переміщення, за наближеною формулою

$$\bar{x}(\ell, t_{k+1}) \approx \bar{u}(\bar{x}, t_k) + \bar{x}(\ell), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

визначаються координати точок рухомої межі $L(t)$ в наступний момент часу $t = t_{k+1}$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Знайдено фундаментальні розв'язки інтегро-диференціальних рівнянь рівноваги та руху в переміщеннях однорідних, ізотропних, нестаріючих лінійно-в'язкопружних середовищ, які характеризуються моделями Максвелла, Работнова, Ржаніцина.
2. Одержано узагальнення формул Гріна для інтегро-диференціальних рівнянь в'язкопружної поведінки матеріалу.

3. Знайдено інтегральне зображення розв'язку рівняння руху (рівноваги) в'язкопружного тіла всередині області з рухомою межею.
4. Введені і досліджені в'язкопружні потенціали.
5. Побудовані системи граничних інтегральних рівнянь розв'язання основних крайових задач спадкової пружності.
6. Досліджена розв'язність систем сингулярних інтегральних рівнянь.
7. Доведено теореми єдиності розв'язків нестационарних крайових задач в області, яка змінюється з часом.
8. Запропоновано метод і розроблено алгоритм чисельного розв'язання в'язкопружних задач з рухомою межею.
9. Розв'язана квазістатична задача зв'язаної термов'язкопружності для нескінченно довгої тонкої пластинки.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Белоносов С.М., Нецадим А.М. Применение метода потенциалов к решению плоских квазистатических задач линейной вязкоупругости // Тез. докл. IУ Всесоюз. симпоз. "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики." - Харьков, 1969. - С.21.

2. Белоносов С.М., Нецадим А.М., Редкобородий Ю.Н. Фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений динамики вязкоупругой среды, характеризуемой моделью Максвелла // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С.48-52.

3. Нецадим А.М. Построение граничных интегральных уравнений для плоской задачи о деформациях среды типа Максвелла с подвижной границей. - Киев, 1989. - 6 с. - Деп. в УкрНИИТИ I.06.89, № I471 - Ук 89.

4. Нешидим А.М., Белоносов С.М. Фундаментальное решение уравнения плоского движения стабильной, изотропной вязкоупругой среды// Тез. респ. науч.-техн. конф. "Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела". - Харьков, 1989.- Ч.2.- С.53-54.

5. Нешидим А.М., Белоносов С.М. Связанная квазистатическая задача линейной термовязкоупругости для бесконечно длинной тонкой пластины// Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики.- Владивосток: Ин-т прикладной математики ДВО АН СССР, 1992.- Ч.1.- С.39-45.

6. Нешидим А.М., Омаров А. Построение граничных интегральных уравнений в динамике вязкоупругой среды Максвелла при заданных на контуре тела напряжениях// Вестн. Каракалпакского филиала АН УзССР.- 1985.- №.- С.6-9.

Нешидим А.М. "Метод граничных интегральных уравнений в нестационарных задачах линейной вязкоупругости"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защита диссертации, посвященная применению метода потенциалов для решения плоских начально-краевых задач линейной вязкоупругости. Построены фундаментальные решения интегро-дифференциальных уравнений равновесия и движения в перемещениях для изотропной, нестаршей вязкоупругой среды при различных реологических моделях: Максвелла, Работнова, Ризницына. Получено интегральное представление решения квазистатической и динамической начально-краевых задач вязкоупругости в области с подвижной границей.

ЛНБ ім. В. Стефанька
АН України

С помощью вязкоупругих потенциалов, краевые задачи наследственной теории упругости при подвижном контуре области сведены к системе граничных сингулярных интегральных уравнений второго рода. Доказана единственность решений основных начально-краевых задач линейной теории вязкоупругости в области с подвижной границей и, соответственно, установлена разрешимость граничных интегральных уравнений. Для практических вычислений предложен метод "шагов по времени". Решена связанная квазистатическая задача термовязкоупругости для бесконечно длинной тонкой пластинки.

Neschadim A.M. "Boundary integral equations method in non-stationary problems linear viscoelasticity".

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.03 - Mathematical Physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyev, 1996.

This thesis is devoted to the application of potentials method for solution of plane initial-boundary value problems in linear viscoelasticity. Fundamental solutions of integro-differential equations of equilibrium and movement in displacement for isotropic stable viscoelastic medium at different rheological models of Rabotnov, Maxwell and Rzhanysin have been constructed. Solution integral representation of quasi-static and dynamic initial-boundary value problems of viscoelasticity in the moving bound region was received. Boundary value problems of elasticity hereditary theory for region moving circuit are reduced to the system of boundary singular second type integral equations with the help of viscoelastic potentials. Solutions uniqueness of main

initial-boundary value problems of viscoelasticity linear theory in region with the moving bound was proved and correspondingly boundary integral equations solvability was defined. Method of "steps by time" was proposed for practical calculations. Coupled quasi-static problem of thermo-viscoelasticity for infinitely long thin plate has been solved.

Ключові слова: мініма в'язкопружність, ядро релаксації, квазістатика, динаміка, потенціали, інтегро-диференціальне рівняння, фундаментальний розв'язок, формула Гріна, щільність потенціалу, сингулярні рівняння, граничні інтегральні рівняння, альтернатива Фредгольма, інтегральне зображення розв'язку, рухома межа, метод "кроків за часом", реологічні моделі.

Мещеряков

Сколько же...
государства...
проблема...
наиболее...
для практической...
и т.д.

Mathematical Institute of the Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 1996.

Піди. до друку 06.05.96. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,9.
Тираж 100 пр. Зам. 105 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, ІСП, вул. Терещенківська, 5

11461182

AB 34.864