КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ПОЛТАВЕЦЬ Дмитро Миколайович

ТОПОЛОГІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ПОВЕРХНЯХ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському університеті ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор Шарко Володимир Васильович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
Самойленко Валерій Григорович

кандидат фізико-математичних наук,
Константинов Олексій Юрійович

Провідна установа: Інститут кібернетики НАН України .

Захист відбудеться 17 червня 1996 р. о 14.00 годині на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.21 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ - 127, просп. акад. Глушкова, 6, корпус механіко-математичного факультету, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету за адресою: м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано 15 травня 1996р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради ... О.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Теорія гладких динамічних систем – область математики, яка почала формуватися на початку століття. За час, що минув вона збагатилася великою кількістю значних результатів. Тут плідно працювало багато математиків, починаючи з Пуанкаре, Ляпунова, Біркгофа. Останніми роками вона була значно розвинена, і визначилися деякі її загальні напрямки.

Більше двох десятиліть пройшло між двома важливими подіями: працею Андронова і Понтрягіна (1937), де було введене основне поняття грубості, та статтями Пейксото (1958 - 1962), який довів щільність грубих векторних полів на поверхнях. Пізніше Смейл суттєво збагатив теорію. Вказавши, що її основною метою є пошук типових і грубих властивостей, він отримав результати та запропонував проблеми, що мають велике значення у цьому контексті. В той же час Хартман і Гробман показали, що локальна грубість є типовою властивістю. Після цього Купка і Смейл досягли значних успіхів у вивченні задачі про періодичні орбіти.

Основою для топологічної класифікації потоків на двовимірних многовидах є теорія Пуанкаре - Бендіксона, під якою розуміють вивчення питання про можливу поведінку окремих напівтраєкторій і траєкторій та структуру їх граничних множин. Для потоків на двовимірній сфері траєкторії, що визначають якісну структуру, знайдені Леонтович і Майєром, а для потоків на орієнтовних двовимірних многовидах – Майєром.

Однією з основних задач теорії динамічних систем є описання структури траєкторій векторного поля на многовиді. Для цього можна обмежитись вивченням деякої підмножини в просторі векторних полів. Бажано, щоб ця підмножина була відкритою та щільною, а векторні поля з цієї множини були структурно стійкими та мали достатньо просту структуру траєкторій. Для компактних двовимірних многовидів виділено такий клас векторних полів, його елементи мають назву векторних полів Морса-Смейла. Цей результат отримано Пейксото.

Природним чином виникає проблема класифікації векторних полів Морса-Смейла на двовимірних многовидах. Ця задача була розв'язана для сфери Є.Ф. Леонтович та А.Г. Майєром. М. Пейксото застосував для розв'язання проблеми графи з відміченими вершинами, що задовольняють деякі умови. К. Мейєр та В.В. Шарко використовували функції Ляпунова. Х. Вонг вивчав поля Морса-Смейла за допомогою C^*-алгебр.

Конструкції, подібні до введених у першому розділі (кола з відміченими точками), були застосовані для вивчення векторних полів Морса-Смейла в роботі Флейтаса, але повне доведення теореми класифікації для двовимірного випадку, зокрема мінімальних векторних полів Морса-Смейла, а також підрахунок їх числа для многовиду роду два виконані у роботі Гірик О.А.

Ще однією з множин векторних полів, які інтенсивно досліджуються останнім часом, є векторні поля з нетривіальними рекурентними траєкторіями на поверхнях. Проблема локальної класифікації таких полів на торі вирішена у роботі Мартенса, ван Стрієна, ді Мело та Мендеса. Однак, питання глобальної класифікації залишалося відкритим.

Мета роботи.

Дисертація присвячена побудові інваріантів для векторних полів Черрі із заданим набором особливостей на двовимірному торі та полів Морса-Смейла на сфері, дослідженню гомеоморфізмів векторних полів та підрахунку кількості полярних систем Морса-Смейла на поверхні роду 3.

Методика досліджень.

Методика грунтується на загальних методах топологічної теорії диференціальних рівнянь та диференціальної топології.

Наукова новизна.

В роботі підраховано кількість полярних векторних полів Морса-Смейла на двовимірному многовиді роду три.

Побудовано інваріант для полів Морса-Смейла із заданим набором особливостей на сфері. Доведена теорема про нерухомі точки гомеоморфізмів таких полів.

Знайдена класифікація полів Черрі із заданим набором особливостей на торі.

Практична та теоретична цінність.

Одержані результати можуть бути використані в теорії динамічних систем, а також у суміжних галузях теорії диференціальних рівнянь та топології.

Апробація роботи.

Результати роботи доповідались на семінарі з диференціальних рівнянь кафедри диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського університету імені Тараса Шевченка (керівник проф. М.О.Перестюк), на науково-дослідницьких семінарах відділу топологічних методів аналізу Інституту математики НАН України (керівник проф. В.В.Шарко), на Міжнародній конференції з топології та її застосувань (Київ, 28 травня - 4 червня 1995р.).

Публікації.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-4].

Структура та обсяг дисертації.

Дисертація складається з вступу, двох розділів, розбитих на 6 параграфів, та списку літератури, який налічує 48 найменувань. Об'єм роботи 77 сторінок тексту, робота набрана в системі LATEX.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається стислий огляд досліджень, близьких по темі дисертації, обгрунтовується актуальність роботи, формулюється мета досліджень та дається перелік основних результатів.

Метою досліджень у першому розділі є підрахунок кількості полярних векторних полів Морса-Смейла на замкненому компактному двовимірному многовиді роду три.

В §1.1 наводяться попередні відомості з топології та геометричної теорії динамічних систем.

Означення 1.1.6. Для векторного поля Морса-Смейла функцією Ляпунова називається функція, яка задовольняє слідуючі умови:

1. $f: M^2 \to R$ має критичні точки в особливостях поля X.

2. $Xf(p) < 0$ для всіх неособливих точок p поля X, тобто f спадає вздовж інтегральних траєкторій, тобто траєкторії X трансверсальні до ліній рівня f.

3. Існує константа $l > 0$ така, що для кожного N_i

$$-Xf(p) >= ld(p, x_i)^2 \text{ для } p \in N_i,$$

де (N_i, σ_i) - така координатна система, що

$$f \circ \sigma_i = f(x_i) + Q(x),$$

а Q - невироджена квадратична форма.

Далі, в §1.2, використовуючи цю функцію, будуємо інваріант для полярних систем Морса-Смейла на поверхнях.

Функція Ляпунова f для поля X визначається неоднозначно, тому задамо значення f в критичних точках :

$$f(x_0) = 1 \text{ (джерело)};$$

$$f(x_i) = 1 - (i/(2k+1)),\ i = 1, \ldots, 2k; \text{(сідла)};$$

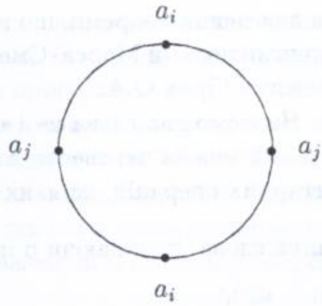
$$f(x_{2k+1}) = 0 \text{ (сток)}.$$

Візьмемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо лінію рівня $f^{-1}(1-\varepsilon)$. Це коло S^1. За означенням функції Ляпунова інтегральні траєкторії X підходять до S^1 трансверсально. Кожну сідлову точку з'єднують з джерелом дві сепаратриси, які перетинають S^1 у двох точках. Для сідла x_i позначимо ці точки a_i, a_i, $i = 1, \ldots, 2k$. Таким чином, ми маємо на колі $2k$ пар відмічених точок. Встановимо порядок розміщення цих пар на S^1.

Прообразом $f^{-1}([1-\varepsilon, 1])$ є двовимірний диск D^2, для якого $\partial D^2 = f^{-1}(1-\varepsilon)$. На доповненні D^2 до многовиду M^2, тобто на $f^{-1}([0, 1-\varepsilon])$, розглянемо трубчасті околи сепаратрис, які виходять із джерела у сідла. Кожен такий окіл — це смуга, яка приклеєна до диску D^2 по колу $f^{-1}(1-\varepsilon)$ так, щоб її однаково направлені протилежні сторони задавали один і той же напрямок кола. Сідлова точка знаходиться на полосці. Таких смуг існує $2k$, по кількості сідлових точок. Відомо, що кожен двовимірний компактний многовид роду k з точністю до гомеоморфізму, — це двовимірна клітина, до якої приклеєні k пар схрещених смуг, а смуги заклеєні двовимірною клітиною. В кожній парі одна смуга розбиває край на дві частини, а друга знову зводить його до одної компоненти.

Розглядаючи трубчасті околи сепаратрис, ми і отримаємо диск з приклеєними до нього $2k$ парами смуг. Тому для кожної смуги знайдеться інша, яка з нею схрещується. На колі $f^{-1}(1-\varepsilon)$ це буде мати слідуючий вигляд. Ми позначаємо a_i, a_i точки перетину S^1 з сепаратрисами, які ідуть в сідлову точку x_i (тобто зі стійкими многовидами сідлової точки), $i = 1, \ldots, 2k$. Їм відповідає смуга l_i, на якій лежить точка x_i. Для l_i знайдеться інша смуга $l_j, j = 1, \ldots, 2k, i \neq j$, яка схрещується з l_i. На l_j знаходиться сідлова точка x_j і точки перетину сепаратрис з $f^{-1}(1-\varepsilon)$.

Пари точок a_i, a_i і a_j, a_j розташовані на колі наступним чином:



Мал. 1.1

Можна сказати, що пара a_j, a_j, розбиває пару a_i, a_i. Таким чином, ми поставили у відповідність полярній системі Морса–Смейла коло з $2k$ парами відмічених точок на ньому. Для кожної пари точок знайдеться інша, яка її розбиває. Можна по порядку виписати всі точки, які лежать на колі, починаючи з будь-якої (орієнтація не має значення). Це буде слово довжиною $4k$, складене з $2k$ пар букв, таке, що для кожної пари букв a_i, a_i знайдеться інша пара, яка її розбиває. Тобто вони розташовані наступним чином:

$$a_i \dots a_j \dots a_i \dots a_j \dots$$

Позначимо множину таких слів $\mathcal{Z}^k$.

Полярній системі Морса–Смейла на двовимірному многовиді ми поставили у відповідність слово з множини $\mathcal{Z}^k$. По такому слову відновлюється поле на многовиді M^2.

Таким чином, встановлено відповідність між множиною полярних полів Морса–Смейла на двовимірних орієнтовних многовидах роду k та множиною $\mathcal{Z}^k$ слів спеціального вигляду довжиною $4k$.

Необхідно зазначити, що при взятті трубчастих околів сепаратрис ми, взагалі кажучи, отримаємо смуги, перекручені на $2\pi n$, $0 \leq n$, але $n < \infty$, інакше не виконувалася б умова трансверсальності до поверхні рівня функції Ляпунова.

У §1.2 показано, що будь-яку полярну систему Морса–Смейла можна звести до вигляду, коли отримані смуги неперекручені. Для цього використовується операція, яка називається скручуванням Дена. В результаті послідовного застосовування сручування Дена ми отримуємо полярне поле Морса–Смейла на M^2, топологічно еквівалентне початковому, але у якого трубчасті околи сепаратрис дають неперекручені смуги.

В §1.3 приводиться доведення теореми, що встановлює відповідність між полярними векторними полями Морса–Смейла та словами спеціального вигляду, яке належить Гірик О.А.

Означення 1.3.1. Назвемо два слова w_1 і w_2 з множини $\mathcal{Z}^k$ еквівалентними, якщо одне з них можна перевести в інше за допомогою скінченного числа елементарних операцій, до яких відносяться :

1) зсув, тобто читання слова, починаючи з іншої букви:

$a_i a_j a_l \dots a_k \sim a_j a_l \dots a_k a_i$;

2) інверсія, обернений порядок читання:

$a_i a_j a_k \dots a_l \sim a_i a_l \dots a_k a_j$;

3) зміна позначень (підстановка алфавіту):

$a_i a_k a_l \dots a_m \sim a_{i_j} a_{ik} \dots a_{il} a_{im}$,

де

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{2k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{i2k} \end{pmatrix}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1.3.1. *Два полярних векторних поля Морса–Смейла X і Y на двовимірному замкненому орієнтовному многовиді M роду k є топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли еквівалентні відповідні їм слова w_x і w_y, де $w_x, w_y \in \mathcal{Z}^k$.*

Можна іншими словами сказати: X і Y топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли ізоморфні відповідні їм діаграми (кола з відміченими на них $2k$ парами точок).

В §1.4 будуються подібні діаграми.

З'єднаємо на діаграмі точки a_i, a_i дугою, яку позначимо також a_i, $1 \leq i \leq 2k$. Тоді та умова, що для кожної пари точок a_i, a_i знайдеться інша пара a_j, a_j, яка її розбиває, $1 \leq i, j \leq 2k$, $i \neq j$, для дуг буде означати, що для кожної дуги a_i знайдеться дуга a_j, яка її перетинає, тобто можна говорити про четвірку точок.

Таким чином, для полярного поля Морса–Смейла на M^2 маємо діаграму: коло з $2k$ парами відмічених на ній точок, з'єднаних дугами таким чином, що для кожної дуги знайдеться інша, яка її перетинає.

Для поверхні роду $k = 3$ на колі є 12 відмічених точок, тобто 3 четвірки або 6 дуг, що попарно перетинаються.

Підраховано кількість нееквівалентних полярних полів Морса–Смейла для поверхні роду $k = 3$. Для підрахунків використовувалася авторська комп'ютерна програма.

Твердження. *На орієнтовній поверхні роду три існує 82 нееквівалентних полярних векторних поля Морса–Смейла.*

У таблиці наведені відповідні діаграмам закодовані слова. Після другого розділу зображені діаграми (кола з відміченими точками і дугами), які відповідають нееквівалентним системам Морса-Смейла для поверхні роду три.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню полів Морса-Смейла на сфері та полів Черрі із заданим набором особливостей на торі.

В §2.1 досліджуються поля Морса-Смейла на сфері. Розглянемо X - поле Морса-Смейла на S^2, яке має рівно одне джерело, n сідлових точок та $n+1$ сток.

Такому векторному полю ставиться у відповідність $M - S$ діаграма, що складається з кіл, які дотикаються одне одного так, що кожне коло j-го порядку має хоча б одну спільну точку з колом $(j-1)$-го порядку, може мати спільні точки з колами менших порядків і має одну спільну точку або з колом $(j+1)$-го порядку, або з іншим колом більшого порядку. Інших точок дотику коло не має. Кола не можуть утворювати кільце.

Доведене наступне твердження.

Твердження 2.1.1. *Будь-якому векторному полю Морса-Смейла на сфері без замкнених траєкторій, що має рівно одне джерело, n сідлових точок та $n+1$ сток, можна поставити у відповідність діаграму з кіл, яка задовольняє вказані вище вимоги.*

Справедливо і зворотнє. По будь-якій такій $M - S$ діаграмі можна відновити єдиним чином векторне поле Морса-Смейла на сфері S^2.

Має місце така теорема.

Теорема 2.1.1. *Для кожного векторного поля Морса-Смейла на диску D^2, яке має $n+1$ сток, n сідлових точок і не має замкнених траєкторій, будь-який зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм диску на себе, який траєкторії поля переводить в траєкторії поля, має нерухомими або всі, або тільки одну критичну точку цього поля.*

Означення 2.1.1. Дві діаграми конгруентні тоді і тільки тоді, коли існує зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм площини на себе, який переводить одну діаграму в іншу.

Доведена така теорема.

Теорема 2.1.2. *Два поля Морса-Смейла X і Y на S^2, що не містять замкнених траєкторій, які мають рівно одне джерело, $n+1$ сток і n сідлових точок, топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли конгруентні відповідні їм $M-S$ діаграми.*

За допомогою діаграм підраховано кількість нееквівалентних векторних полів Морса-Смейла на двовимірній сфері, які мають $n+1$ сток, одне джерело, n сідлових точок і не мають замкнених траєкторій. В таблиці наведені результати підрахунків. Верхній рядок – кількість стоків, нижній – кількість нееквівалентних полів.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	2	3	6	14	34	95	280

В §2.2 розглядаються векторні поля, які мають нетривіальні рекурентні траєкторії.

Означення 2.2.1. Нехай γ - траєкторія поля $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Будемо казати, що γ - рекурентна, якщо $\omega(\gamma) \supset \gamma$ або $\alpha(\gamma) \supset \gamma$.

Критичний елемент поля X є завжди рекурентною траєкторією. В цьому випадку кажуть, що рекурентна траєкторія є тривіальною. Всяка траєкторія ірраціонального потоку на торі є рекурентною і нетривіальною.

Розглянемо клас векторних полів на торі, у яких

1) скінченне число критичних елементів і всі вони гіперболічні;

2) немає періодичних траєкторій;

3) немає траєкторій, що з'єднують сідла;

4) немає джерел.

Будемо називати поля, що задовольняють умови 1) - 4), векторними полями Черрі.

Для векторного поля на торі ми будуємо відображення послідування, яке задане на трансверсальному до поля колі.

Далі ми вводимо поняття числа обертання для монотонного ендоморфізму кола степені 1.

Якщо у якості ендоморфізму кола взяти відображення послідування для векторного поля на торі і трансверсального до цього поля кола, то таким чином ми поставимо у відповідність потоку на торі число обертання.

Розглянемо векторне поле Черрі X, у якого n стоків, n сідлових точок і нетривіальні рекурентні траєкторії. У такого поля X знайдеться хоча б одна сідлова точка p така, що одна з її двох нестійких сепаратрис прямує у сток, а інша сепаратриса γ є ω-рекурентною. Знайдеться точка $x \in \gamma$, через яку за твердженням ми можемо провести криву Σ, яка трансверсальна до векторного поля X і не стягується в точку. Розрізавши тор по цій кривій, ми отримаємо сферу S^2 з двома виколотими дірками. Заклеїмо ці дірки дисками, на одному з яких розмістимо сток, а на іншому джерело так, щоб на дисках поведінка інтегральних кривих узгоджувалася з їх поведінкою на сфері. В результаті ми отримали векторне поле на S^2, у якого $n+1$ сток, n сідлових точок, одне джерело, немає замкнених траєкторій та немає траєкторій, що з'єднують сідла. Це поле Морса-Смейла. Для нього ми можемо побудувати $M-S$ інваріант, тільки тепер додатково відмітимо коло, яке відповідає вклеєному стоку. Два таких поля знову будуть топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли конгруентні відповідні їм $M-S$ діаграми з відміченими колами.

Ми поставили векторному полю Черрі X на торі $M-S$ інваріант з відміченим колом.

Розглянемо два векторні поля Черрі X і Y на T^2, у яких n стоків, n сідлових точок і вони мають нетривіальні рекурентні траєкторії. Для цих полів за твердженням знайдуться трансверсальні кола S_X і S_Y відповідно. Будь-які два таких кола на торі дифеоморфні, тобто знайдеться дифеоморфізм h_0 тора на себе, який S_Y переведе у S_X. При цьому векторне поле Y перейде у топологічно еквівалентне поле $Y_0 := h_0Y$. Тому, без обмеження загальності, можна розглядати на торі тільки поля Черрі, які мають одне спільне трансверсальне коло.

Поля X і Y_0 мають спільне трансверсальне коло S_X. Цим полям можна поставити у відповідність функції послідування $f_{Y_0} : S_X \to S_X$ і $f_X : S_X \to S_X$, для яких визначаються числа обертання $\rho(f_X)$ і $\rho(f_{Y_0})$. Оскільки X і Y_0 мають нетривіальні рекурентні траєкторії, ці числа ірраціональні.

Доведена така теорема.

Теорема 2.2.3. *Задані два векторних поля Черрі на торі, які мають рівно n стоків, n сідлових точок і нетривіальні рекурентні траєкторії. Нехай у них ірраціональні числа обертання.*

Два таких поля топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли конгруентні відповідні їм $M-S$ діаграми з відміченим колом, і коли *їх числа обертання рівні між собою.*

Якщо ми зафіксуємо ірраціональне число обертання, то тоді можна підрахувати кількість нееквівалентних полів Черрі з цим числом обертання на торі, у яких n стоків. Ці значення будуть співпадати зі значеннями для полів Морса-Смейла на сфері, у яких $n+1$ сток. Для полів Морса-Смейла на сфері результати наведені в таблиці в кінці параграфа 2.1.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівникові Володимиру Васильовичу Шарку за допомогу в роботі над дисертацією.

Основні результати та висновки

1. В роботі за допомогою діаграм з відміченими точками підраховано кількість полярних векторних полів Морса-Смейла на двовимірному многовиді роду три.
2. Побудовано $M-S$ інваріант для полів Морса-Смейла із заданим набором особливостей на сфері. За допомогою цього інваріанту знайдено кількість нееквівалентних полів Морса-Смейла на двовимірній сфері в залежності від числа особливих точок.
3. Доведена теорема про нерухомі точки гомеоморфізмів полів Морса-Смейла із заданим набором особливостей на двовимірному диску.
4. За допомогою $M-S$ інваріанту знайдена класифікація полів Черрі із заданим набором особливостей на торі. Як висновок підраховано кількість нееквівалентних полів Черрі на торі в залежності від числа особливостей при фіксованому числі обертання.

Основні результати дисертації надруковані у наступних роботах:

1. Полтавец Д.Н. Полярные системы Морса-Смейла на двумерных многообразиях рода три.- Киев, 1995.-21с. – (Препр./НАН Украины. Ин-т математики; 95.4).

2. Полтавец Д.Н. Векторные поля Черри на двумерном торе.- Киев, 1996.-21с. -(Препр./ НАН Украины. Ин-т математики; 96.4).

3. Poltavets D. Equivalent polar Morse-Smale systems on two-dimentional manifolds of genus 3// Abstracts of International Conference on Topology and its Applications, Kiev, May 28 – June 4, 1995.–P.29.

4. Poltavets D.M. Cherry vector fields on the torus T^2// Methods of Functional Analysis and Topology.- 1996.- 2,N 2-P. 173-179.

Полтавец Д.Н. Топология динамических систем на поверхностях.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996. Рукопись.

Диссертация посвящена построению инвариантов для векторных полей Черри с заданным набором особенностей на двумерном торе и полей Морса-Смейла на сфере, исследованию гомеоморфизмов векторных полей и подсчету количества полярных систем Морса-Смейла на поверхности рода три.

Poltavets D.M. Topology of dynamical systems on surfaces.

A Doctor of Philosophy thesis, subject 01.01.02 – differential equations. Institute of mathematics, Ukrainian National Academy of Science, Kiev, 1996. Manuscript.

The thesis is devoted to a construction of invariants for Cherry vector fields with a fixed set of singularities and for Morse-Smale vector fields on a two-sphere, to a reseach of homeomorphisms of vector fields and to a calculation of a quantity of polar Morse-Smale systems on surfaces of genus 3.

Ключові слова: векторне поле, поле Морса-Смейла, поле Черрі, рекурентна траєкторія, класифікація.

Підп. до друку .03.96. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. . Ум. фарбо-відб. . Обл.-вид. арк. .
Тираж 100 пр. Зам. . Безкоштовно.