НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С. П. ТИМОШЕНКА

На правах рукопису

МУКОЄД Олександр Анатолійович

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕОДНОРІДНИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ

01.02.04 — механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ — 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в — Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка Національної академії наук України

Науковий керівник — Доктор технічних наук, професор ПАНКРАТОВА Наталія Дмитрівна

Офіційні опоненти — Доктор технічних наук, професор ПІСКУНОВ Вадим Георгійович
Доктор фізико-математичних наук ХОМА Іван Юрійович

Провідна установа — Київський національний університет ім. Т. Шевченка

Захист відбудеться "11" 06 1996 р. о 10 годині на засіданні спеціальної вченої ради Д 01.03.03 при Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка Національної академії наук за адресою: 252057, Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту механіки НАН України.

Автореферат розіслано "10" 05. 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор технічних наук, професор — І. С. Чернишенко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена чисельно-аналітичному розв'язанню задач про напружено-деформований стан неоднорідних ортотропних прямокутних в плані товстостінних пластин під дією нерівномірних силових та температурних навантажень на основі розробки підходів до розв'язання задач розглянутого класу, що базуються на розв'язанні тривимірних рівнянь теорії пружності.

Актуальність роботи. Неоднорідні ортотропні пластини, як конструктивні елементи сучасної техніки, широко використовуються в авіабудуванні, машинобудуванні, будівельній механіці та інших галузях. В багатьох випадках такі елементи створюються у вигляді шаруватих конструкцій, для кожного шару яких характерна своя неоднорідність та анізотропія пружних властивостей матеріалу. При цьому конструктивні елементи знаходяться під дією нерівномірних силових та температурних навантажень. В даний час для розрахунку конструктивних елементів вказаного класу розроблено цілий ряд підходів, що базуються на різних припущеннях механічного та фізичного характеру. Досвід розрахунків напружено-деформованого стану (НДС) неоднорідних оболонкових конструктивних елементів показав, що найбільш повну і детальну оцінку їх напруженості і деформованості доцільно проводити на основі рівнянь теорії пружності як базової науки про міцність.

Загальний внесок в розвиток теорії та методів розрахунку товстостінних пластин або плит на основі тривимірних рівнянь теорії пружності внесли такі вчені, як Блох В. І., Бубнов І. Г., Василенко А. Т., Власов В. З., Ворович І. І., Гальоркін Б. Г., Григоренко Я. М., Гузь О. М., Лехніцький С. Г., Ломакін В. А., Лур'є А. І., Ляв А., Маслов Г. Н., Нейбер Г., Панкратова Н. Д., Папкович П. Ф., Пискунов В. Г., Подільчук Ю. М., Прокопов В. К., Рассказов А. Ю., Рвачов В. Л., Тимошенко С. П., Філоненко-Бородіч М. М., Шевляков Ю. А. та інші автори.

До теперішнього часу аналітично-чисельні методи розрахунку напружено-деформованого стану пластин розроблені в основному при певних обмеженнях на неоднорідність та анізотропію пружних властивостей матеріалу, способи закріплення шарів, типи граничних умов на всіх обмежуючих поверхнях та види навантаження. Врахування реальних властивостей конструкційних матеріалів, для яких характерна суттєва неоднорідність і анізотропія пружних властивостей, товстостінність елементів конструкції, складні види навантажень з урахуванням різних способів з'єднання шарів приводить до необхідності розробки нових ефективних підходів, які дозволяють враховувати довільність зміни пружних властивостей матеріалу, як на границях кожного шару, так і по товщині усього пакету в цілому, їх анізотропію, різні способи з'єднання шарів, складні види закріплення контурних поверхонь з урахуванням адекватності математичного формулювання граничних умов на всіх обмежуючих поверхнях при дії нерівномірних силових і температурних навантажень. Із сказаного вище випливає, що тема дисертації є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла. Робота належить до планових досліджень, що проводяться в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України.

Мета роботи полягає в

— розробці чисельно-аналітичного підходу до розв'язання задач статики товстостінних прямокутних в плані ортотропних шаруватих пластин при довільному закріпленні обмежуючих поверхонь у випадку жорсткого з'єднання суміжних шарів, які знаходяться під дією нерівномірних силових факторів, що базується на розв'язанні тривимірних рівнянь теорії пружності неоднорідного анізотропного тіла, з урахуванням довільної зміни по товщині неоднорідності і характерної для кожного шару анізотропії пружних властивостей матеріалу шарів;

— отриманні розв'язальних систем рівнянь розв'язків задач про напружено-деформований стан прямокутних пластин, що базуються на різних аналітичних перетвореннях з використанням методів сплайн-колокації, представленні розв'язку у вигляді подвійних рядів, що дозволяють вихідну тривимірну задачу звести до одновимірної;

— обгрунтуванні достовірності розробленого підходу до розв'язання задач про напружений стан жорстко закріплених товстостінних неоднорідних ортотропних прямокутних в плані пластин;

— побудові методики розв'язання задач про термонапружений стан неоднорідної пластини на випадок сумісного визначення температурних полів та викликаних ними напружень та переміщень при жорсткому з'єднанні суміжних шарів пластини, що базується на представленні розв'язку у вигляді подвійних тригонометричних рядів;

— побудові методики розв'язання задач для випадку нежорсткого з'єднання суміжних шарів ортотропної неоднорідної пластини під дією нерівномірних силових і температурних навантажень;

— побудові обчислювального алгоритму розв'язання одновимірної крайової задачі, що дозволяє одержати стійкий обчислювальний процес знаходження розв'язку з практичним ступенем точності;

— розробці та реалізації на ПЕОМ алгоритмів чисельного розв'язання задач розглянутого класу;

— обгрунтуванні на основі розв'язання тривимірних задач теорії пружності деяких припущень для пластин, які застосовуються в прикладних теоріях як для одношарових, так і для тришарових пластин;

— проведенні аналізу напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних пластин при певних способах закріплення обмежуючих поверхонь, видах з'єднання шарів при нерівномірних силових та температурних навантаженнях в широкому діапазоні зміни механічних та геометричних параметрів пластин;

— виявленні нових механічних ефектів, зумовлених різним способом закріплення обмежуючих поверхонь, видами з'єднання суміжних шарів, способами навантаження з урахуванням неоднорідності та анізотропії пружних властивостей матеріалу шарів пластини.

Наукова новизна і значущість результатів роботи полягає в

— розробці чисельно-аналітичного підходу та методик до розв'язання задач товстостінних ортотропних шаруватих певним чином закріплених на торцях прямокутних в плані пластин в просторовій постановці при силових і температурних діях для жорсткого і нежорсткого з'єднання шарів, що дозволяють враховувати довільну неоднорідність і анізотропію пружних властивостей матеріалу та отримувати практично точні розв'язки;

— розробці та реалізації на ПЕОМ алгоритмів розв'язання задач розглянутого класу;

— встановленні та обгрунтуванні на основі розробленого підходу границь застосованості деяких припущень, що використовуються в прикладних моделях;

— виявленні нових тривимірних ефектів, обумовлених неоднорідністю та анізотропією пружних властивостей матеріалу, способами з'єднання шарів, типами граничних умов, видами навантажень.

Достовірність основних положень забезпечується тривимірністю постановки задачі, строгістю математичних викладок, перевіркою практичної збіжності результатів, співставленням отриманих результатів розв'язання задач для деяких частинних випадків з точними розв'язками, а також із результатами, отриманими на основі інших підходів.

Практична цінність роботи полягає в розробці і реалізації на ПЕОМ ефективних методів розв'язання нових складних задач статики неоднорідних ортотропних шаруватих пластин, що дозволяють проводити розрахунки НДС пластин в широкому діапазоні зміни геометричних, механічних, теплофізичних параметрів із врахуванням видів закріплення торців пластини, способів навантаження та типів з'єднання суміжних шарів в єдиний пакет. Результати розрахунків можуть бути використані на підприємствах та в науково-дослідних організаціях будівельної механіки та машинобудівного профілю при оцінці міцності елементів конструкцій.

Апробація роботи. Основні положення і результати роботи доповідались і обговорювались на:

1. XIV, XV, XVI, XVIII наукових конференціях молодих вчених Інституту механіки НАН України (Київ, 1989, 1990, 1991, 1993).

2. Всесоюзній конференції "Совершенствование технической эксплуатации судов" (Калінінград, 1989).

3. Всесоюзній конференції "Механіка неоднорідних структур" (Львів, 1991).

4. XXXII, XXXIV Міжнародних симпозіумах "Modelling in Mechanics" (Польща, 1993, 1995).

5. Науковому семінарі з прикладних проблем механіки (Москва, МІІТ, 1994).

6. Семінарах відділу обчислювальних методів Інституту механіки АН України (1989—1996).

7. Семінарі Інституту механіки НАН України за науковим напрямом "Будівельна механіка оболонкових систем" (Київ, 1996).

Публікації. За результатами досліджень, виконаних в дисертації, опубліковано 13 наукових робіт, 5 із них самостійні.

Структура роботи. **Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновку і списку літератури із 129 назв, включає 23 рисунків. Об'єм дисертації 132 стор.**

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові доктору технічних наук, професору ПАНКРАТОВІЙ Наталії Дмитрівні за постійну увагу до роботи та корисні поради при виконанні роботи.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дається обгрунтування актуальності розглянутих у роботі питань, наводиться короткий огляд наукових робіт по дослідженню НДС прямокутних в плані шаруватих анізотропних товстостінних пластин, а також по застосуванню сплайн-функцій до розв'язання подібного класу задач, сформульована мета досліджень, вказана наукова новизна та практична значимість роботи. Коротко викладено зміст роботи.

У першому розділі приведені основні рівняння лінійної теорії пружності для шаруватого ортотропного тіла в криволінійній ортогональній системі координат. Розглянуто пластини на відносну товщину, анізотропію, неоднорідність, пружних властивостей матеріалу, в радіальному напрямку яких в загальному випадку не накладено ніяких обмежень. При цьому припускається, що суміжні шари пластини працюють сумісно без відриву та про-сковзування.

Другий розділ присвячений викладенню розробленого чисельно-аналітичного підходу до розв'язання задач статики шаруватих ортотропних товстостінних пластин під дією нерівномірних силових навантажень. Спочатку приведено постановку задачі, основні співвідношення лінійної просторової задачі теорії пружності в декартовій прямокутній системі координат та дано вивід основної системи рівнянь в частинних похідних для довільного i-го шару. Остання має вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} &= C_{11}\frac{\partial u_x}{\partial z} + C_{12}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{13}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + C_{14}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\,\partial y} + C_{15}\frac{\partial u_z}{\partial x} + C_{16}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\,\partial z};\\
\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} &= C_{21}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y} + C_{22}\frac{\partial u_y}{\partial z} + C_{23}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + C_{24}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + C_{25}\frac{\partial u_z}{\partial y} + C_{26}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y\,\partial z};\\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= C_{31}\frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{32}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial z} + C_{33}\frac{\partial u_y}{\partial y} + C_{34}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\,\partial z} + C_{35}\frac{\partial u_z}{\partial z} + C_{36}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + C_{37}\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Тут C_{jk} ($j = 1,3$; $k = 1,7$) — величини, що виражаються через пружні характеристики i-го шару, u_x, u_y, u_z — переміщення в напрямках відповідних осей координат. Розв'язки системи рівнянь повинні задовільнити умови на всіх обмежуючих поверхнях та поверхнях спряження суміжних шарів пластини. Оскільки розв'язальні системи рівнянь записані в переміщеннях, то всі умови записуються також в переміщеннях, що далі дасть можливість значно спростити чисельний розв'язок задачі. В цьому ж розділі наводяться деякі відомості про сплайн-функції та метод сплайн-колокацій. Використовуючи методи розділення змінних та сплайн-колокації, вихідну систему рівнянь (1) приводимо до одновимірної.

Так, наприклад, якщо на контурах пластин $y = 0$ і $y = b$, задаються граничні умови, що відповідають умовам вільного опирання в теорії пластин ($u_x = u_z = 0, \sigma_z = 0$), то розв'язки системи рівнянь (1) при довільних граничних умовах на поверхнях $x = const$ і $z = const$, що обмежують пластину, шукаються у вигляді

$$u_x(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{N} u_{xni}(z)\, \varphi_i(x) \sin \lambda_n y;$$

$$u_y(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{N} u_{yni}(z)\, \psi_i(x) \cos \lambda_n y; \tag{2}$$

$$u_z(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{N} u_{zni}(z)\, \varphi_i(x) \sin \lambda_n y,$$

де $\lambda = {}^{n\pi}/_{a}$, u_{xni}, u_{yni}, u_{zni} — невідомі функції, які треба визначити, φ_i, ψ_i — відомі функції, що знаходяться через кубічні B-сплайни, завдяки яким точно задаються граничні умови на поверхнях $x = 0$, $x = a$. Вигляд функцій φ_i, ψ_i ($i = \overline{0, N}$) — точки колокації) для наведених та деяких інших граничних умов дається в роботі. В результаті застосування розв'язку (2) до системи рівнянь (1) та деяких аналітичних перетворень приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь порядку $6 \times (N + 1)$ відносно такої ж кількості невідомих в кожній точці колокації для кожної гармоніки n, що в кожній точці колокації для певної гармоніки має вигляд:

$$\frac{dY}{dz} = AY + \bar{f}, \tag{3}$$

де $Y = [u_x, u_x', u_y, u_y', u_z, u_z']^T$, f — відомий вектор-стовпець, $A = \{ a_{ij}(z)\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) — відома матриця, T — означає операцію транспонування.

Умови спряження суміжних шарів з урахуванням (2), записані в переміщеннях, матимуть вигляд:

$$\bar{u}_x^{\,j+1} = \bar{u}_x^{\,j};$$

$$\bar{u}_y^{\,j+1} = \bar{u}_y^{\,j}; \tag{4}$$

$$\bar{u}_z^{\,j+1} = \bar{u}_x^{\,j};$$

$$\bar{u}_x{}'^{\,j+1} = \frac{1}{G_{19}{}^{j+1}} \left[G_{19}{}^{j} \bar{u}_x{}'^{\,j} + (G_{19}{}^{j} - G_{19}{}^{j+1})\, \Phi_0^{-1} \Phi_1 \bar{u}_z{}^{j} \right];$$

$$\bar{u}_y{}'^{\,j+1} = \frac{1}{G_{29}{}^{j+1}} \left[G_{29}{}^{j} \bar{u}_y{}'^{\,j} + (G_{29}{}^{j} - G_{29}{}^{j+1})\, \lambda_n \Psi_0{}^{-1} \Phi_0 \bar{u}_z{}^{j} \right];$$

$$\bar{u}_z{}'^{\,j+1} = \frac{1}{G_{29}{}^{j+1}} \left[B_{99}{}^{j} \bar{u}_z{}'^{\,j} + (B_{91}{}^{j} - B_{91}{}^{j+1})\, \Phi_0{}^{-1} \Phi_1 \bar{u}_x^{j} - (B_{92}{}^{j} - B_{91}{}^{j+1})\, \lambda_n \Phi_0{}^{-1} \Psi_0 \bar{u}_y^{j} \right]$$

$(j = 1, \overline{M-1})$.

Аналогічним чином отримується система рівнянь (3) і при інших способах закріплення поверхонь $y = 0$, $y = b$.

Для розв'язання системи (3) використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Використання цього методу дає можливість ефективно знаходити розв'язки для широкого діапазону зміни геометричних і механічних параметрів, що характеризують задану пластину, при довільній неоднорідності матеріалу по товщині та певного виду анізотропії кожного шару з урахуванням силових навантажень. Дається обгрунтування достовірності методу. Наводяться тестові приклади.

В третьому розділі дано узагальнення підходу до розв'язання задач про напружено-деформований стан шаруватих пластин, який базується на представленні розв'язку у вигляді подвійних тригонометричних рядів, що дозволяє шляхом розділення змінних звести точно вихідну крайову задачу до одновимірної на випадок знаходження термопружного стану шаруватих пластин шляхом сумісного визначення температурних полів та викликаних ними напружень і переміщень.

Виходячи із сказаного, до системи рівнянь, що описують напружено-деформований стан пластини, та умов механічного з'єднання суміжних шарів додаються умови теплового контакту шарів та рівняння теплопровідності

$$K_x{}^{i} \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2} + K_y{}^{i} \frac{\partial^2 T^2}{\partial y^2} + K_z{}^{i} \frac{\partial^2 T^i}{\partial z^2} = 0, \tag{5}$$

де $K_x{}^{i}$, $K_y{}^{i}$, $K_z{}^{i}$ — коефіцієнти теплопровідності.

Крім умов спряження суміжних шарів пластини та умов на обмежуючих поверхнях $z = z_0$ та $z = z_M$ необхідно також задовольнити умови на бокових обмежуючих поверхнях $x = const$, $y = const$.

В окремих випадках можна отримати розподіл температури в кожному шарі в аналітичній формі. При цьому необхідно задовольнити всі вищезгадані умови, що при великій кількості шарів приводить до необхідності розв'язання алгебраїчної системи рівнянь високого порядку. У зв'язку з наведеними міркуваннями при розв'язуванні конкретних задач про визначення термопружного стану шаруватих пластин рівняння теорії пружності та теплопровідності доцільно інтегрувати одночасно. При цьому для кожного i-го шару одержуємо систему рівнянь восьмого порядку:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^i}{\partial z} = B_1{}^i\,\bar{\sigma}^i + B_2{}^i \frac{\partial \bar{\sigma}^i}{\partial x} + B_3{}^i \frac{\partial \bar{\sigma}^i}{\partial y} + B_4{}^i \frac{\partial \bar{\sigma}^i}{\partial z} + B_5{}^i \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^i}{\partial x^2} + B_6{}^i \frac{\partial^2 \bar{\sigma}^i}{\partial x^2}; \qquad (6)$$

$$\bar{\sigma}^i = \{\sigma_z{}^i, \tau_{xz}{}^i, \tau_{yz}{}^i, u_z{}^i, u_x{}^i, u_y{}^i, T^i, T'^i\};$$

$$B_j{}^i = \|b^j_{mn}(z)\|, \;\; m, n = 1,2,...,8; \;\; j = 1,2,...,6.$$

Основними невідомими тут вибрані функції, через які формулюються умови спряження шарів та умови на обмежуючих поверхнях. Розв'язок системи (6) для деяких умов на обмежуючих поверхнях $x = const$, $y = const$ шукається у вигляді подвійних тригонометричних рядів. Після розділення змінних маємо для кожної пари гармонік m та n систему з восьми звичайних диференціальних рівнянь

$$d\,\frac{\bar{\sigma}_{nm}{}^i}{dz} = C_{mn}{}^i\,\bar{\sigma}_{mn}{}^i, \qquad (7)$$

в якій елементи матриці $C_{mn}{}^i$ є функціями координати z та залежать від механічних та теплофізичних параметрів i-го шару. Отримані крайові задачі з урахуванням умов на поверхнях $z = z_o$ та $z = z_M$ та поверхнях спряження шарів інтегруються з допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації, що дозволяє отримувати розв'язки з заданим ступенем точності.

Описаний алгоритм реалізований в обчислювальному комплексі на ПЕОМ.

Як приклад застосування наведеної методики розглядається задача про термонапружений стан тришарової пластини, зовнішні шари якої трансверсально-ізотропні, внутрішній — ізотропний. До внутрішньої та зовнішньої поверхонь пластини $z = z_o$ та $z = z_M$ підведена температура $\sigma\ T_o$ та T_o відповідно. Досліджується розподіл всіх факторів термопружного стану пластини в залежності від значень відношення товщини внутрішнього шару до товщини зовнішнього шару у випадку сталості загальної товщини пластини. Описуються виявлені тривимірні ефекти.

Друга частина третього розділу присвячена узагальненню вищезгаданого підходу до розв'язання задач про напружено-деформований стан неоднорідних ортотропних товстостінних пластин на випадок нежорсткого з'єднання суміжних шарів. Формулюється модель ідеального просковзування шарів по всій поверхні з'єднання. У відповідності з моделлю дотичні напруження τ_{xz}^{i} та τ_{yz}^{i} на поверхні спряження шарів обертаються в нуль, внаслідок чого переміщення u_x^i та u_y^i зазнають розриву при переході через поверхню контакта. Для нормальних напружень і переміщень виконуються умови неперервності при переході через поверхню спряження.

Вибираючи за основні розв'язальні функції, в яких формулюються умови на обмежуючих поверхнях $z = z_0$ та $z = z_M$ та поверхнях спряження шарів і виконуючи перетворення в вихідних рівняннях теорії пружності, отримаємо розв'язальну систему рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок цієї системи повинен задовольняти умовам на обмежуючих поверхнях та поверхнях спряження шарів пластини, які в загальному випадку мають вигляд

$$T_i \bar{\sigma}^{i}(z_i) - S_i \bar{\sigma}^{i+1}(z_{i+1}) = 0, \tag{8}$$

де T_i, S_i — задані матриці розміру 6×6. При жорсткому з'єднанні шарів $T_i = S_i = E$, де E — одинична матриця. Для вказаного способу з'єднання шарів вибір розв'язальних функцій дозволяє автоматично неперервно проводити розв'язування задач на всьому інтервалі інтегрування. Розв'язок шукається у вигляді подвійних тригонометричних рядів. Після розділення змінних маємо систему 6-ти звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, інтегрування якої проводиться методом дискретної ортогоналізації.

Після розділення змінних умови (8) для випадку ідеального просковзування шарів запишуться у вигляді:

$$\sigma_{z,mn}^{i} = \sigma_{z,mn}^{i+1}, \quad u_{z,mn}^{i} = u_{z,mn}^{i+1}, \quad \tau_{xz,mn}^{i} = 0, \quad \tau_{xz,mn}^{i+1} = 0, \tag{9}$$

$$\tau_{yz,mn}^{i+1} = 0, \quad \tau_{yz,mn}^{i} = 0.$$

Функції $u_{x,mn}^{i}$, $u_{y,mn}^{i}$ при переході через поверхню з'єднання $z = z_i$ повинні зазнавати скачку:

$$u_{x,mn}^{i} - u_{x,mn}^{i+1} = \Delta u_{x,mn}^{i}; \tag{10}$$

$$u_{y,mn}^{i} - u_{y,mn}^{i+1} = \Delta u_{y,mn}^{i},$$

щоб виконувались умови (9) відносно дотичних напружень. Таке формулювання приводить до багатоточкової крайової задачі.

В роботі пропонується розв'язувати вказану задачу зведенням до ряду двоточкових задач, що дозволяє використовувати розроблений метод чисельного розв'язку.

Умови (9), (10) запишуться у вигляді:

$$\overline{\sigma}_{mn}{}^{i+1}(z_i) = \overline{\sigma}_{mn}{}^{i}(z_i) + \overline{\sigma}_{o,mn}{}^{i}(z_i), \qquad (11)$$

$$\overline{\sigma}_{o,mn}{}^{i}(z_i) = \{\, 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \Delta u^{i}_{x,mn},\ \Delta u^{i}_{y,mn} \,\}.$$

Після інтегрування отримуємо розв'язок як лінійну функцію від $\Delta u^{i}_{x,mn}$, $\Delta u^{i}_{y,mn}$, які визначаються із розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь у відповідності з умовами (9). Після знаходження $\Delta u^{i}_{x,mn}$ та $\Delta u^{i}_{y,mn}$ находиться повний розв'язок сформульованої вихідної задачі.

В кінці розділу розглядається задача про напружено-деформований стан двошарової пластини, яка знаходиться під дією локалізованого навантаження у випадку нежорсткого з'єднання шарів. Вивчається вплив на НДС способів з'єднання суміжних шарів та різноманітних видів навантажень.

Четвертий розділ присвячений аналізу напруженого стану неоднорідних анізотропних товстостінних пластин на основі розробленого підходу та методик до розв'язання задач вказаного класу.

Перша частина присвячена аналізу НДС ізотропних та трансверсально-ізотропних одношарових та тришарових пластин та оцінці деяких припущень, що найчастіше використовуються в прикладних моделях. Проводиться порівняння результатів, отриманих по вказаному підходу в точній постановці, та результатів, отриманих при деяких нехтуваннях в рівняннях теорії пружності, які відповідають припущенням, що використовуються в прикладних моделях.

При розв'язанні задачі для одношарової пластини помічено, що нехтування деформаціями e_{xz} та e_{yz} приводить до значних похибок навіть при великих $\sigma = {}^{a}\!/_{mh} \leq 5$ (a — сторона пластини, h — товщина, m — номер гармоніки), поперечне обжимання e_z та напруження σ_z необхідно враховувати для $\sigma \leq 2$.

В задачах, де розглядаються тришарові пластини з легким заповнювачем, в прикладних моделях часто нехтують тангенціальними напруженнями та деформаціями e_z. В роботі проведено дослідження впливу цих факторів на НДС пластини. Показано, що неврахування тангенціальних напруг в середньому шарі тришaрової пластини цілком допустиме, а додатково нехтування поперечним обжиманням для великих відношень модулів пружності несучих шарів та заповнювача ($E_з / E_н \geq 10^2$) в зоні локалізованих навантажень може привести до значних похибок.

В другій частині розділу наводиться розв'язок задачі про НДС двошарової пластини, товщина та модуль пружності зовнішнього шару якої не змінюється, а змінюється в широкому діапазоні товщина та модуль пружності підстилаючого шару. Показано, що при збільшенні товщини підстилаючого шару та суттєвій неоднорідності ($E_з/E_н > 10^5$) напружений стан зовнішнього шару не залежить від НДС підстилаючого шару пластини.

Також показано, що з розв'язку задачі в просторовій постановці можна знайти коефіцієнт пружної основи, маючи який можна розв'язувати задачі про НДС двошарової пластини як одношарової на пружній основі, використовуючи гіпотезу недеформованих нормалей.

В заключній частині розділу досліджується напружено-деформований стан двошарової пластини, виготовленої із ортотропного матеріалу, шари якої повернуті один відносно одного на 90°. Дві протилежні грані пластини жорстко закріплені, дві інші — шарнірно оперті. Пластина знаходиться під дією локалізованого навантаження. Виявлені ефекти зв'язані з задоволенням граничних умов і специфікою матеріалу шарів пластини.

В заключній частині дисертації сформульовані основні результати, отримані в роботі:

— розроблено чисельно-аналітичний підхід до розв'язання задач статики товстостінних прямокутних в плані ортотропних шаруватих пластин при довільному закріпленні обмежуючих поверхонь у випадку жорсткого з'єднання суміжних шарів, які знаходяться під дією нерівномірних силових факторів, що базується на розв'язанні тривимірних рівнянь теорії пружності неоднорідного анізотропного тіла, з залученням методів сплайн-колокації та представлення розв'язку у вигляді тригонометричних рядів, різних аналітичних перетворень та методів чисельного аналізу;

— обгрунтовано достовірність розробленого підходу до розв'язання задач про напружений стан жорстко закріплених товстостінних неоднорідних ортотропних прямокутних в плані пластин;

— побудовано методику розв'язання задач для деяких умов на обмежуючих поверхнях на випадок сумісного визначення температурних полів та викликаних ними напружень і переміщень, що базується на представленні розв'язку у вигляді подвійних тригонометричних рядів;

— побудовано методику розв'язку задачі для випадку нежорсткого з'єднання суміжних шарів ортотропної пластини під дією силових та температурних навантажень;

— побудовано обчислювальний алгоритм розв'язання одновимірної крайової задачі, що дозволяє одержати стійкий обчислювальний процес знаходження розв'язку з високою точністю;

— розроблено та реалізовано на ПЕОМ алгоритми розв'язання задач розглянутого класу;

— обгрунтовано на основі розв'язання тривимірних задач деяких припущень для пластин, які застосовуються в прикладних теоріях як для одношарових, так і для тришарових пластин;

— проведено аналіз напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних пластин при певним способом закріплених обмежуючих поверхнях, видах з'єднання шарів, при нерівномірних силових та температурних навантаженнях в широкому діапазоні зміни механічних та геометричних параметрів пластин;

— виявлено нові механічні ефекти, зумовлені різним способом закріплення обмежуючих поверхонь, видами з'єднання суміжних шарів, способами навантаження з врахуванням неоднорідності та анізотропії пружних властивостей матеріалу шарів пластини.

В додатку описано алгоритм програми для чисельного дослідження на ПК.

Основний зміст дисертаційної роботи відображено в таких публікаціях:

1. Мукоед А. А. Напряженное состояние неоднородных анизотропных пластин в пространственной постановке // Труды XIV научной конференции молодых ученых Института механики АН УССР, Киев, 23—26 мая, 1989. Ч. 2 / Ин-т мех. АН УССР.—Киев, 1989.—С. 274—278.—Деп. в ВИНИТИ 2.08.89, № 5165—В89.

2. Мукоєд О. А. До розрахунку напруженого стану одношарових і багатошарових анізотропних пластин в просторовій постановці // Тези доповідей XV наукової конференції молодих вчених Інституту механіки АН УРСР, Кийлів, 29 травня — 1 червня, 1990 / Ін-т. мех. АН УРСР. —Київ.—1990.—С. 34.

3. Мукоед А. А. К исследованию напряженного состояния слоистых пластин при нежестком контакте слоев // Труды XVI научной конференции молодых ученых Института механики АН УССР.—Киев. 21—24 мая, 1991. Ч. 1 / Ин-т мех. АН УССР.—Киев, 1991.—С. 141—143.—Деп. в ВИНИТИ 12.11.91, № 4259—В91.

4. Мукоед А. А. Упругое равновесие неоднородных ортотропных плит // Тезисы докладов третьей Всесоюзной конференции "Механика неоднородных структур", Львов, 17—19 сентября, 1991. Ч. 2 / Ин-т прикладных проблем механики и математики Львовского государственного университета им. И. Франко.—Львов.—1991.—С. 220.

5. Мукоед А. А. Исследование напряженного состояния толстостенных пластин с помощью метода сплайн-коллокации // Труды XVIII научной конференции молодых ученых Института механики АН УССР, Киев, 18—21 мая, 1993. Ч. 1 / Ин-т мех. АН УССР.— Киев, 1993.— С. 98—101.— Деп. в ГНТБ Украины 16.08.93, № 1764 —Ук93.

6. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. Оценка напряженного состояния трехслойных конструктивных элементов с легким заполнителем // Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции "Совершенствование технической эксплуатации корпусов судов".— Калининград, октябрь, 1989.— Ленинград: Судостроение.—1989.—С. 152.

7. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К оценке напряженного состояния трехслойных пластин с легким заполнителем // Сопротивление материалов и теория сооружений.—1990. **Вып 56.**—С. 24—29.

8. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К расчету напряженного состояния неоднородных пластин в пространственной постановке // Прикл. механика.—1990.—**26**, № 2.—С. 49—56.

9. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. К определению термонапряженного состояния ортотропных слоистых плит // Прикл. механика.— 1991.— 27, № 8.— С. 43—49.

10. Pankratova N., Mukoed A. Calculation of the Stressed State of Non-homogeneous Plates with Nonrigid Conjugation of Layers // XXXII Cymposiym "Modelling in Mechanics".—Gliwice.—1993. —P. 319—324.

11. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. Напряженное состояние слоистых плит при наличии нежесткого контакта слоев // Прикл. механика.— 1994.— 30, № 2.— С. 17—22.

12. Панкратова Н. Д., Мукоед А. А. Деформация неоднородных ортотропных прямоугольных в плане толстостенных пластин // Доповіді НАН України.— 1995.— № 6.— С. 59—62.

13. Pankratova N., Mukoed A. Deformation of the thick laminated ortotropic plate // XXXIV Cymposiym "Modelling in Mechanics".—Gliwice.— 1995.— P. 251—256.

Mukoed A. Solution of the problems of the stressed state of non-homogeneous orthotropic plates in space statement.

Dissertation for the Candidate of Physical and Mathematical Sciences Degree in Speciality 01.02.04 — mechanics of a deformable solid, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

13 scientific works on the investigation of the stress state of non-gomogeneous orthotropic thick-walled plates under the action of irregular forces and temperatures loadings are defended.

Мукоед А. А. Решение задач о напряженном состоянии неоднородных ортотропных пластин в пространственной постановке. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела, Институт механики им. С. П. Тимошенко Национальной академии наук Украины, Киев, 1996.

Защищается 13 научных работ, которые посвящены исследованию напряженного состояния неоднородных ортотропных толстостенных пластин под действием неравномерных силовых и температурных факторов.

Ключові слова: тривимірна теорія пружності, сплайн-колокація, спряження шарів, жорстке закріплення, локалізоване навантаження.

Підп. до друку 28.04.96. Формат 60×84 1/16. Друк офс.
Папір офс. Ум.- друк. арк. 0,93. Обл.- вид. арк. 1,0. Тираж 70 прим.
Надруковано з ориг.- макету вид-ва "Фенікс",
252030, Київ-30, вул. Жилянська, 87/30.
Свідоцтво № 319-МП/085 від 08.04.91.