Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

УДК 519.8

АЛЕКСАНДРОВА Валентина Михайлівна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Наукові керівники: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук
ПШЕНИЧНИЙ Борис Миколайович,

доктор фізико-математичних наук
ПАНІН Віктор Михайлович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
ГУПАЛ А. М.,

кандидат фізико-математичних наук
ЖУРБЕНКО М. Г.

Провідна організація: Київський університет
імені Тараса Шевченка.

Захист відбудеться «14» червня 1996 р. о 11 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «7» травня 1996 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблема розв'язання скінченновимірних варіаційних нерівностей є важливою областю дослідження внаслідок того, що вони є узагальненням задач оптимізації, розв'язання операторних рівнянь, знаходження сідлових точок. До них зводяться задачі багатокритеріальної оптимізації, задачі прийняття рішень, що виникають при дослідженні статичних моделей рівноваги в економіці. Зокрема, у вигляді варіаційних нерівностей можуть бути сформульовані задача розподілу торгівлі, а також моделі, що описують відношення між виробництвом та споживанням, між попитом і споживанням та цінами. Окрім того, областю застосування варіаційних нерівностей є моделі знаходження точок рівноваги по Нешу в теорії ігор. Тому методи розв'язання варіаційних нерівностей мають важливе значення для вирішення проблем в різноманітних сферах діяльності.

Основою математичного апарату цієї теорії стала теорія монотонних операторів, яка була розвинена в роботах М. Вайнберга, Ж. Л. Ліонса, Г. Ж. Мінті, І. Екланда, Р. Т. Рокафелара. Фундаментальні результати були одержані стосовно питань існування, єдиності та локальної єдиності розв'язку варіаційних нерівностей. На відміну від теорії існування та єдиності, яка є майже завершеною областю дослідження, теорія побудови алгоритмів для розв'язання варіаційних нерівностей розвинена недостатньо. Існуючі методи з теоретично високими оцінками швидкості збіжності є, як правило, локально збіжними і потребують розв'язання складних допоміжних задач на вихідній нелінійній множині обмежень. Для методів першого порядку, запропонованих, наприклад, Б.М.Пшеничним, навпаки при ефективній реалізації кожної ітерації та нелокальній збіжності ітераційної послідовності, оцінки швидкості збіжності в околі розв'язку не встановлено. В алгоритмах, що базуються на розв'язанні системи необхідних умов першого порядку демпфірованими методами Ньютона, також виникають проблеми внаслідок особливостей цієї системи, а саме її недиференційовності далеко від розв'язку.

Таким чином, побудова глобально збіжних алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей, які по ефективності не поступаються перед алгоритмами умовної оптимізації відповідного порядку, залишається актуальною.

Мета роботи. Запропонувати глобально збіжні алгоритми, які б дозволяли ефективно знаходити розв'язок варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором. З цією метою варіаційну нерівність сформулювати у вигляді еквівалентної задачі оптимізації, для розв'язання якої застосувати розвинений апарат математичного програмування.

Ослабити вимогу сильної монотонності оператора і побудувати глобально збіжний метод першого порядку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонним оператором.

Застосувати ідею сполучення двох методів, яка була запропонована Б.М.Пшеничним та Л.А.Соболенко в умовній оптимізації, для побудови прискореного алгоритму розв'язання варіаційних нерівностей.

Методи досліджень. В основу досліджень покладено математичний апарат теорії умовної оптимізації, зокрема методів послідовного квадратичного програмування, дискретного мінімаксу та недиференційовних штрафних функцій.

Наукова новизна роботи. Запропоновано оптимізаційний підхід до побудови глобально збіжних алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором та опуклою множиною обмежень, у тому числі алгоритмів ньютонівського типу, що мають надлінійну швидкість збіжності в околі розв'язку. Одержана оцінка лінійної швидкості збіжності модифікованого методу Б.М.Пшеничного для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором. Побудовано регуляризований алгоритм першого порядку для варіаційних нерівностей з монотонним оператором на обмеженому багатограннику.

На основі сполучення двох методів сформульовано глобально збіжний метод для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором, який має квадратичну швидкість збіжності в околі розв'язку.

Теоретична і практична цінність роботи. Робота є частиною програми наукових досліджень, які проводяться у відділі обчислювальних методів оптимізації Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України.

Наведені в дисертації результати чисельного експерименту показують, що запропоновані алгоритми можуть бути використані для розв'язання задач економіки, теорії ігор, які зводяться до варіаційних нерівностей.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарах у відділі обчислювальних методів оптимізації Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України, у Київському університеті ім. Тараса Шевченка, на II-ій Українській конференції "Автоматика-95", м. Львів, 26-30 вересня 1995 р.

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 7 робіт, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура і обсяг роботи. Робота складається з вступу, трьох розділів, додатку, висновку та списку літератури з 75 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 95 сторінок.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність тематики досліджень, дається короткий огляд існуючих підходів до розв'язання варіаційних нерівностей. Змістовно викладено основні результати, які одержані в дисертації.

Дисертація присвячена методам розв'язання скінченновимірних варіаційних нерівностей. Вихідна задача полягає у знаходженні точки $x_* \in \Omega_x \subseteq \mathbf{R}^n$, для якої

$$(F(x_*), x - x_*) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega_x. \tag{1}$$

Задача (1) вивчається в залежності від виконання наступних умов:

а) оператор $F(x)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ неперервно диференційовний та сильно монотонний

$$M\|p\|^2 \geq (F'(x)p, p) \geq m\|p\|^2 \quad \forall x, p \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

де $M \geq m > 0$ - сталі;

б) множина Ω_x задається у вигляді

$$\Omega_x = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid h_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., l \}, \tag{3}$$

де $h_i(x)$, $i = 1, ..., l$ - опуклі неперервно диференційовні функції, та має внутрішню точку;

в) градієнти $h_i'(x)$, $i \in I(x) = \{ i \in 1, ..., l \mid h_i(x) = h^+(x) = \max \{0, h_1(x), ..., h_l(x)\} \}$ лінійно незалежні в розв'язку x_* (умова регулярності обмежень);

д) оператор $F(x)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ монотонний

$$(F'(x)p, p) \geq 0 \quad \forall x, p \in \mathbf{R}^n. \tag{4}$$

Всюди вектори, наприклад, $x = \{x^i\}$, розглядаються як вектор-стовбці з компонентами x^i; $(\cdot, \cdot)$ - знак скалярного добутку; $\|\cdot\|$ - евклідова норма вектора; T - знак транспонування. Позначимо $\omega^T = (x^T; \lambda^T)$, $L_x(\omega) = F(x) + H(x)\lambda$, де $H(x)$ - матриця виміру $n \times l$, стовбці якої є $h_i'(x)$, $i = 1, ..., l$; $h(x)$ - вектор-функція з компонентами $h_i(x)$, $i = 1, ..., l$. $|I_*| = t$ - кількість елементів в множині $I_* = I(x_*)$. Нижні символи x в $L_x(\omega)$ та ω в $L_\omega(\omega)$ введені для зручності позначень і не означають похідних; в решті випадків вони означають відповідні похідні: $\varphi_x(\omega) = d\varphi(\omega)/dx$, $L_{\omega\omega}(\omega) = dL_{\omega}(\omega)/d\omega$ і т.д.

У першому розділі розглянуто варіаційні нерівності (1) з сильно монотонним оператором $F(x)$. Запропоновано перехід до еквівалентних задач нелінійної умовної оптимізації та розглянуто обчислювальні методи їх розв'язання. На основі методів послідовного квадратичного програмування та використання недиференційовної штрафної функції побудовано глобально збіжний метод розв'язання задачі (1) - (3). Для запропонованого алгоритму встановлена оцінка лінійної швидкості збіжності.

В §1.1 викладено існуючі підходи до розв'язання варіаційних нерівностей та деякі відомі факти теорії існування та єдиності розв'язку.

Відомо, що задача (1) при виконанні умов а), б) має єдиний розв'язок x_*.

Точку $\omega_*^T = (x_*^T; \lambda_*^T)$, $x_* \in \Omega_x$ назвемо парою Куна-Такера задачі (1) - (3), якщо для неї виконуються необхідні умови першого порядку:

$$L_x(\omega_*) = 0,\ \lambda_*^i h_i(x_*) = 0,\ \ \lambda_*^i \geq 0,\ i = 1, \dots, l. \tag{5}$$

Якщо, окрім умов а), б), виконується умова в), то λ_* також визначається в (5) однозначно, таким чином ω_* - єдиний розв'язок системи

$$L_x(\omega) = 0,\ \lambda^i h_i(x) = 0,\ h_i(x) \leq 0,\ \lambda^i \geq 0,\ i = 1, \dots, l. \tag{6}$$

Якщо оператор $F(x)$ - монотонний, то задача (1), (3), (4) може мати неєдиний розв'язок $x_* \in \{x_*\} = X_*$. Однак, внаслідок припущення б), необхідні умови першого порядку (5) для задачі (1) є також і достатніми.

Точки $\omega_*^T = (x_*^T; \lambda_*^T)$, які задовільняють системі (5), назвемо шуканими як для задачі (1) - (3), так і для задачі (1), (3), (4).

В §1.2 для знаходження розв'язку системи (6) побудовано дві задачі нелінійної умовної оптимізації з аргументом $\omega^T = (x^T; \lambda^T) \in \mathbf{R}^{n+l}$. Перехід до еквівалентних оптимізаційних задач більшого ніж вихідна задача виміру обумовлений непотенціальністю оператора $F(x)$ $(F'(x) \neq F'^T(x))$. Однією з таких еквівалентних задач оптимізації є задача

$$\min_{\omega} \Theta(\omega),\ \omega \in \Omega_{\omega}, \tag{7}$$

де $\Theta(\omega) = \frac{1}{2}\|L_x(\omega)\|^2 - (\lambda, h(x))$, $\Omega_\omega = \Omega_x \times \Lambda^+$, $\Lambda^+ = \{\lambda \in \mathbf{R}^l \mid \lambda^i \geq 0,\ i = 1, \ldots, l\}$. Відмітимо, що функція $\Theta(\omega)$ була вперше використана Б.М.Пшеничним для розв'язання варіаційних нерівностей.

Цільова функція другої еквівалентної задачі оптимізації вводиться як функція квадрату відхилу рівностей системи (6)

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2}\|L_\omega(\omega)\|^2, \quad L_\omega(\omega) \equiv \begin{pmatrix} L_x(\omega) \\ \lambda_1 h_1(x) \\ \ldots \\ \lambda_l h_l(x) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а відповідна еквівалентна оптимізаційна задача має вигляд:

$$\min_\omega \varphi(\omega), \quad \omega \in \Omega_\omega . \tag{9}$$

Будемо називати стаціонарними точками задач (7), (9) точки $\overline{\omega} \in \Omega_\omega$, які задовільняють необхідним умовам екстремуму першого порядку відповідної задачі оптимізації.

Теорема 1. Будь-яка стаціонарна точка $\overline{\omega}$ задач (7), (9) є шуканою для задачі (1) - (3). В точці x_* множники Лагранжа для еквівалентної задачі (7), що відповідають обмеженням множини Ω_ω, задовільняють умовам: $\mu^i = -h_i(x_*)$, $i = 1, \ldots, l$, $\theta \in \{\lambda_*\} = \Lambda_*$, а для задачі (9) відповідні множники дорівнюють нулю.

Результат теореми 1 не можна поширити на задачу (1), (3), (4). При виконанні умови д) можуть існувати стаціонарні точки $\overline{\omega}$ задач (7), (9), для яких $d\Theta(\overline{\omega})/d\omega = 0$, $d\varphi(\overline{\omega})/d\omega = 0$, але $L_x(\overline{\omega}) \neq 0$, $\Theta(\overline{\omega}) > 0$, $\varphi(\overline{\omega}) > 0$.

Наведемо інші властивості функції $\varphi(\omega)$.

Лема 1. Якщо в точці x_*, яка є розв'язком задачі (1) при виконанні умов а) - в), $\lambda^i_* > 0$ для всіх $i \in I_*$, то матриця $L_{\omega\omega}(\omega_*)$ невироджена і для будь-яких $\omega \in \mathbf{R}^{n+l}$

$$(\varphi_{\omega\omega}(\omega_*)\omega, \omega) \geq m_\varphi \|\omega\|^2, \quad m_\varphi > 0. \tag{10}$$

Лема 2. Якщо в задачі (1) - (3) множина Ω_x окрім нерівностей задається лінійними рівностями $h_{l+j}(x) = 0$, $j \in I^0 = \{1, \ldots, r\}$, розв'язок x_* задачі (1) існує, в точці x_* виконується (5), градієнти $h_i'(x_*)$, $i \in I_* \cup I^0$ лінійно незалежні, $\lambda_*^i > 0$ для всіх $i \in I_*$ та

$$(L_{xx}(\omega_*)x, x) \geq m\|x\|^2, \quad m > 0 \tag{11}$$

для всіх $x \in M = \{ x \mid (h_i'(x_*), x) = 0, \; i \in I_* \cup I^0 \}$, то виконується (10).

Відомо, що справедливість нерівності (11) на множині M називається достатньою умовою другого порядку, яка гарантує локальну єдиність розв'язку x_* задачі (1).

Лема 3. Для будь-якого фіксованого $C \geq 0$ множина $G_C = \{ \omega \in \mathbf{R}^n \times \Lambda^+ \mid \varphi(\omega) \leq C \}$ обмежена.

Задача (1) при виконанні умов а) - в) зводиться до задачі мінімізації (9), яка має єдиний розв'язок ω_*. Цільова функція $\varphi(\omega)$ задачі (9) має обмежені на $\mathbf{R}^n \times \Lambda^+$ лінії рівня, єдину на Ω_ω стаціонарну точку ω_*, яка є точкою глобального мінімуму функції $\varphi(\omega)$ і в околі якої $\varphi(\omega)$ сильно опукла, якщо $\lambda_*^i > 0$, $i \in I_*$.

В § 1.3 для розв'язання еквівалентної задачі оптимізації (9) розглядаються методи послідовного квадратичного програмування з використанням недиференційовної штрафної функції $\Phi(\omega; N) = \varphi(\omega) + Nh^+(x)$, N - коефіцієнт штрафу. Задача (9) зіставляється з задачею

$$\min_\omega \Phi(\omega; N), \quad \omega \in \mathbf{R}^n \times \Lambda^+ . \tag{12}$$

Лема 4. Розв'язок ω_* задачі (9) є стаціонарною точкою задачі (12) для будь-якого $N \geq 0$. Навпаки, яке б не було значення $N \geq 0$, стаціонарна точка задачі (12), яка належить області Ω_ω, є розв'язком задачі (9).

Теорема 2. Якщо окрім умов а) - в) вихідної задачі (1), функції $h_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ сильно опуклі:

$$m_i\|x\|^2 \leq (h_i''(z)x, x) \leq M_i\|x\|^2 \quad \forall x, z \in \mathbf{R}^n, \tag{13}$$

де $M_i \geq m_i > 0$ - сталі, то стаціонарні точки ω_{*N} задачі (12) обмежені рівномірно по $N \geq \nu$, де $\nu > 0$ - стала. Знайдеться, окрім того, порогове значення $\hat{N} > 0$ таке, що $\omega_{*N} = \omega_*$ для будь-якого $N \geq \hat{N}$.

Для методів послідовного квадратичного програмування допоміжна задача, яка є апроксимацією (9), має вигляд:

$$\min_{\omega}\left[(\varphi_{\omega}(\omega_k),\omega-\omega_k)+\frac{1}{2}(A_k(\omega-\omega_k),\omega-\omega_k)\right],\qquad(14)$$

$$h_i(x_k)+(h_i'(x_k),x-x_k)\le 0,\ \lambda^i\ge 0,\ i=1,\ldots,l,$$

де A_k - симетрична $(n+l)\times(n+l)$-матриця, яка для будь-яких $k=0,1,\ldots$ та $p\in\mathbf{R}^{n+l}$ задовільняє умові:

$$a\|p\|^2\le(A_k p,p)\le A\|p\|^2,\ A\ge a>0.\qquad(15)$$

В задачі (14) враховуються обмеження $\lambda^i\ge 0$ для всіх $i=1,\ldots,l$, оскільки всі λ^i входять до виразу функції $\varphi(\omega)$. Щодо обмежень $h_i(x_k)+(h_i'(x_k),x-x_k)\le 0$, то їх можна враховувати не для всіх $i=1,\ldots,l$, а лише для $i\in I_k=\{\,i\mid\ h_i(x_k)\ge h^+(x_k)-\delta/N\}$, де $\delta>0$ - стала.

Далі на основі розглянутого оптимізаційного підходу вивчаються обчислювальні методи розв'язання варіаційних нерівностей (1) - (3). Будемо називати методи вирішення варіаційних нерівностей, які використовують обчислення оператора $F(x)$ та градієнтів функцій $h_i(x)$, $i=1,\ldots,l$, методами першого порядку, а методи, які потребують визначення матриць $h_i''(x)$, $F'(x)$ або їх апроксимацій, методами другого порядку.

В §1.4 сформульовано глобально збіжний метод розв'язання сильно опуклих варіаційних нерівностей, який є методом послідовного квадратичного програмування для розв'язку еквівалентної задачі оптимізації (9). Ітерація методу має вигляд: $\omega_{k+1}=\omega_k+\alpha_k p_k$, де $p_k=\bar{\omega}-\omega_k$, а $\bar{\omega}$ - розв'язок задачі (14); α_k визначається з релаксації функції $\Phi(\omega;N)$ по правилу Армійо. Встановлено, що ітераційна послідовність цього методу глобально збігається до розв'язку задачі (1) - (3) з лінійною швидкістю збіжності в околі розв'язку.

<u>Теорема 3.</u> Якщо виконуються умови а) - в) задачі (1), множина Ω_x обмежена, $F'(x)$, $h_i''(x)$, $i=1,\ldots,l$ задовільняють умові Ліпшиця, то $\omega_k\to\omega_*$, $p_k\to 0$, $\mu_k\to 0$, $\theta_k\to 0$ для $k\to\infty$, $\alpha_k\ge\bar{\alpha}>0$ і, починаючи з деякої ітерації, величина $N_k=N$ є сталою. Якщо оператор $F(x)$ неперервно диференційовний та

монотонний, виконуються умови б) та в), $\lambda_*^i > 0$ для всіх $i \in I_*$, в точці ω_* виконуються достатні умови другого порядку, то для $\omega_k \to \omega_*$ в околі розв'язку ω_* справедливі оцінки:

$$\Phi(\omega_{k+1}; N) \leq q\Phi(\omega_k; N), \;\; \|\omega_k - \omega_*\| \leq Cq^{k/2}, \; q \in (0; 1).$$

Хоча побудований метод є методом першого порядку відносно оптимізаційної задачі (9), однак, він є методом другого порядку відносно вихідної задачі (1). Перевагою такого підходу порівняно з відомими методами розв'язання варіаційних нерівностей, а саме, проекційними, є те, що матрицю A_k можна варіювати. Якщо, наприклад, матрицю A_k вибирати так, щоб $A_k \to \mathcal{L}_{\omega\omega}(\omega_*; 0; 0)$, де $\mathcal{L}(\cdot)$ - функція Лагранжа оптимізаційної задачі (9), то можна прийти до швидкозбіжного методу ньютонівського типу, використовуючи обчислення матриць $h_i''(x)$, $F'(x)$.

У другому та третьому розділах запропоновані методи першого та другого порядку для вирішення варіаційних нерівностей і для них доведені оцінки швидкості збіжності, які властиві алгоритмам відповідного порядку в математичному програмуванні.

Другий розділ присвячений алгоритмам першого порядку для розв'язання варіаційних нерівностей.

В §2.1 розглянуто модифікацію методу, який було запропоновано Б.М.Пшеничним, для варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором та опуклими обмеженнями-нерівностями.

На кожній ітерації вказаного алгоритму наближення обчислюються за формулою: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Допоміжна задача, яка використовується для визначення напрямку p_k, має вигляд:

$$\min_p \left[(F(x_k), p) + \frac{1}{2}(Ap, p)\right], \tag{16}$$

$$h_i(x_k) + (h_i'(x_k), p) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, l.$$

Величина множника α_k обчислюється з релаксації функції

$v(x, \lambda) \equiv \min_p L(x; p; \lambda) = -\frac{1}{2}\|L_x\|^2 + (\lambda, h(x))$, де $L(x; p; \lambda)$ - функція Лагранжа задачі (16). Таким чином, α_k - найбільше серед чисел $\alpha = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots$, які задовільняють одночасно нерівностям:

$$v(x_k + \alpha p_k; \lambda_k) - N_k h^+(x_k + \alpha p_k) \geq v(x_k; \lambda_k) - \\ - N_k h^+(x_k) + \varepsilon \alpha^2 \frac{\|p_k\|^2}{2}, \tag{17}$$

$$h^+(x_k + \alpha p_k) \leq \beta, \quad \beta > h^+(x_0). \tag{18}$$

Позначимо $\Psi_k = \Psi(x_k; \lambda_k) = v(x_k; \lambda_k) - N_k h^+(x_k) =$ $= -\frac{1}{2}(Ap_k, p_k) + (\lambda_k, h(x_k)) - N_k h^+(x_k)$.

Відомо, що умови $\Psi_k = 0$ або $\Psi_k \to 0$, необхідні, а якщо

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_k^i \leq N_k, \tag{19}$$

то і достатні для того, щоб відповідно $x_k = x_*$ або $x_k \to x_*$. Якщо виконується умова (19), то $\Psi_k \leq 0$.

У модифікованому алгоритмі для вибору α_k замість нерівності (17) використовується нерівність

$$v(x_k + \alpha p_k; \lambda_k) - N_k h^+(x_k + \alpha p_k) \geq (1 - \varepsilon \alpha^2)\Psi_k, \ \varepsilon > 0.$$

Теорема 4. Якщо для задачі (1) виконуються припущення а), б), матриці $F'(x)$, $h_i''(x)$, $i = 1, \ldots, l$ задовільняють умові Ліпшиця, множина Ω_x обмежена, то модифікований алгоритм збігається по прямих та двоїстих змінних: $x_k \to x_*$, $\lambda_k \to \{\lambda_*\}$, де $\{\lambda_*\}$ - множина векторів множників Лагранжа задачі (1) в точці x_*. При цьому $p_k \to 0, \Psi_k \to 0$ для $k \to \infty$; $\alpha_k \geq \bar{\alpha} > 0$ для всіх $k = 0, 1, \ldots$, величина $N_k = N$ стала для $k \geq k_0$. В околі розв'язку x_* справедливі оцінки:

$$|\Phi_k| \leq Cq^k, \ \|p_k\| \leq C_1 q_1^k, \ \|x_k - x_*\| \leq C_2 q_1^k, \tag{20}$$

де $q \in (0; 1)$, $q_1 = q^{1/2}$.

На базі оцінок (20) для модифікованого алгоритму доведена лінійна швидкість збіжності методу Б.М.Пшеничного. Одержана оцінка лінійної швидкості збіжності разом з доказаною раніше властивістю глобальної збіжності та простота реалізації ітерації методу дають основу для ствердження, що він є найкращим серед існуючих алгоритмів першого порядку для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором.

Більшість методів для розв'язання варіаційних нерівностей потребують сильної монотонності оператора $F(x)$. На відміну від них в §2.2 побудовано регуляризований алгоритм першого порядку для розв'язання задачі (1), для якої умова а) замінена на умову д), а множина Ω_x є обмеженим багатогранником. Допоміжною задачею регуляризованого методу є задача квадратичного програмування:

$$\max_p \left[-(F(x_k), p) - \frac{a_k}{2} \|p\|^2 \right], \tag{21}$$

$$h_i(x_k) + (h_i'(x_k), p) \le 0, \ i = 1, \ldots, l.$$

Для вибору множника α_k використовується функція $\Theta_{a_k}(\omega)$, де $a_k > 0$ - параметр регуляризації. Функція $\Theta_{a_k}(\omega)$, як і розглянута раніше функція $v(x; \lambda)$, є цільовою функцією, двоїстої до допоміжної задачі (21):

$$\Theta_a(\omega) = \max_p L^a(\omega; p) = \frac{1}{2a} \|L_x(\omega)\|^2 - (\lambda, h(x)).$$

Далі розглядається задача (1), (4), в якій множина Ω_x є обмеженим багатогранником:

$$\Omega_x = \{x \in \mathbf{R}^n \mid h_i(x) \equiv (b_i, x) + d_i \le 0, \ i = 1, \ldots, l\}. \tag{22}$$

<u>Формулювання алгоритму.</u> Виберемо довільними $x_0 \in \Omega_x$, $a_0 > 0$, $\varepsilon \in (0; 1)$, $q \in (0; 1)$ та позначимо $\Theta_k(\omega) = \Theta_{a_k}(\omega)$, $\Psi_k = (\lambda_k, h(x_k))$. Запишемо к-у ітерацію в точці $x_k \ne x_*$, $(p_k \ne 0)$, $k = 0, 1, \ldots$.

I. Розв'язуючи задачу (21) та двоїсту до неї, знаходимо p_k, λ_k, Ψ_k. Якщо $|\Psi_k| < a_k$, то йдемо на III, якщо $|\Psi_k| \ge a_k$, то - на II.

II ($|\Psi_k| \ge a_k$). Визначаємо α_k як найбільше серед чисел $\alpha = 2^{-s} \min \{1; a_k |\Psi_k|\}$, $s = 0, 1, \ldots$, які задовільняють нерівності

$$\Theta_k(x_k + \alpha p_k; \lambda_k) \le \Theta_k(\omega_k) + \varepsilon \alpha \Psi_k,$$

і знаходимо точку $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$. Покладемо $a_{k+1} = a_k$; кінець ітерації.

III ($|\Psi_k| < a_k$). Покладемо $x_{k+1} = x_k$, вибираємо a_{k+1} з умови $q a_k \le a_{k+1} < a_k$, $a_k \to +0$. Кінець ітерації.

Теорема 5. Якщо в задачі (1), (4), (22) похідна $F'(x)$ задовільняє умові Ліпшиця, то $\Theta_k(\omega_k) \to 0$, $\omega_k \to \{X_*; \Lambda_*\}$ для $k \to \infty$, а кожна ітерація процесу закінчується за скінченне число обчислень, яке рівномірно обмежене по $k \to \infty$.

Третій розділ присвячений алгоритмам другого порядку для розв'язання варіаційних нерівностей.

В §3.1 на основі підходу, який було запропоновано в розділі I, сформульовано нелокально збіжний квазиньютонівський метод для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно мо тоним оператором та сильно опуклими обмеженнями-нерівностями. На кожній ітерації алгоритму для знаходження напрямку спуску розв'язується допоміжна задача квадратичного програмування в просторі прямих змінних $(\omega; \xi) \in \mathbf{R}^{n+l+1}$

$$\min_{\omega,\xi}\left[(\varphi_\omega(\omega_k),\omega-\omega_k) + \frac{1}{2}(A_k(\omega-\omega_k),\omega-\omega_k)+N_k\xi\right], \tag{23}$$

$$h_i(x_k) + (h_i'(x_k),x - x_k) \le \xi,\ i \in \bar{I}_k,\ \lambda \in \Lambda^+,$$

де $\bar{I}_k = \{ i \in 0, 1, \dots, l \mid h_i(x_k) \ge h^+(x_k) - \delta / N_k \}$, $h_0(x) \equiv 0$, а $\xi \in \mathbf{R}^1$ - додаткова змінна.

Допоміжна задача квадратичного програмування з додатковою змінною використовується замість задачі (14) для того, щоб двоїсті змінні оптимізаційної задачі були обмежені значеннями коефіцієнта штрафу N. На відміну від (14), задача (23) завжди має розв'язок, навіть тоді, коли функції обмежень не є опуклими.

Задачі (14), (23) будемо називати еквівалентними в точці ω_k, якщо стаціонарні точки цих задач співпадають по компонентах ω.

Лема 5. Якщо матриця A_k задовільняє умові (15) та $N_k > 0$, то умова $\xi_k = 0$ є достатньою для еквівалентності задач (14), (23). Якщо, окрім того, $0 \in \bar{I}_k$, то вона є також і необхідною.

Для побудови алгоритму ньютонівського типу в допоміжній задачі (23) матриці A_k вибираютья так, щоб $A_k \to \varphi_{\omega\omega}(\omega_*)$ для $\omega_k \to \omega_*$. Такій умові задовільняють матриці $L^T_{\omega\omega}(\omega_k)L_{\omega\omega}(\omega_k)$.

Формулювання алгоритму. Нехай $\omega_0 \in \mathbf{R}^n \times \Lambda^+$, $\delta > 0$, $\bar{C} > 0$, $q \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0; 1)$, $N_0 > 0$, $r > 0$ - достатньо мала величина, виберемо $\Phi^R = \Phi(\omega_0; N_0)$, де Φ^R - позначення поточного рекордного значення функції $\Phi(\omega; N)$.

Опишемо k-у ітерацію методу $\omega_{k+1} = \omega_k + \alpha_k p_k$ в точці $\omega_k \neq \omega_*$, $k = 0, 1, \ldots$.

I. Знаходимо розв'язки задачі квадратичного програмування (15), (23) та двоїстої до неї - p_k, μ_k, θ_k.

II. Обчислюємо α_k як найбільше серед чисел $\alpha = 2^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots$, які задовільняють нерівності

$$\Phi(\omega_k + \alpha p_k; N_k) < \Phi_k - \frac{1}{2}\varepsilon\alpha(A_k p_k, p_k).$$

Знаходимо точку $\omega_{k+1} = \omega_k + \alpha_k p_k$.

Якщо $\Phi_k > \Phi^R$, то йдемо на III, інакше ($\Phi_k \leq \Phi^R$) - на IV.

III ($\Phi_k > \Phi^R$). Якщо виконуються нерівності

$$\max\left\{\|p_k\|, \|A_k p_k\|, |(\theta_k, p_k^\lambda)|, \left|(\lambda_k, (A_k p_k)^\lambda)\right|\right\} \leq \bar{C}, \tag{24}$$

$$\mu_k^0 \leq rN_k, \tag{25}$$

то покладемо $N_{k+1} = 2N_k$, інакше при порушенні хоча б однієї з умов (24), (25) - $N_{k+1} = N_k$. Кінець ітерації.

IV ($\Phi_k \leq \Phi^R$).

а) Якщо $\mu_k^0 < rN_k$, то покладемо $\Phi^R = q\Phi(\omega_{k+1}; N_k)$, $N_{k+1} = N_k$; кінець ітерації.

б) Якщо $\mu_k^0 \geq rN_k$, то покладемо $\Phi^R = \Phi(\omega_{k+1}; N_k)$ та обчислюємо N_{k+1} за правилом: $N_{k+1} = N_k$, якщо $\alpha_k = 1$; $N_{k+1} = N_k / 2$, якщо $\alpha_k < 1$; кінець ітерації.

Теорема 6. Якщо виконуються припущення а) - в) задачі (1), та умова (13), то $\omega_k \to \omega_*$, $p_k \to 0$, $\mu_k \to 0$, $\theta_k \to 0$, величина $N_k = N > 0$ є сталою після деякої ітерації, а задачі (14), (23) еквівалентні. Якщо, окрім того, $\lambda_*^i > 0 \ \forall i \in I_*$, то в околі розв'язку ω_* виконується рівність $\alpha_k = 1$ та справедлива оцінка $\|p_k\| \leq S_k \|p_{k-1}\|$, де $S_k \to 0$ для $k \to \infty$.

Відмітимо, що для задачі оптимізації $\min\{f_0(x) \mid h_i(x) \le 0,$ $i = 1, ..., l\}$ релаксація функції $f_0(x) + Nh^+(x)$ не призводить до одержання $\alpha_k = 1$ в методі Ньютона з допоміжною задачею (16), в якій $A_k = L_{xx}(x_k, \lambda_{k-1})$, $F(x) = f_0'(x)$. Тому методи ньютонівського типу, які використовують релаксацію функції $f_0(x) + Nh^+(x)$, не є надлінійно збіжними (ефект Маратоса). Теорема 5 показує, що для випадку $F(x) = f_0'(x)$ при заміні вихідної задачі оптимізації еквівалентною задачею (9) більшого виміру ефект Маратоса не виникає в запропонованому методі.

В §3.2 побудовано комбінований метод для розв'язання варіаційних нерівностей. Він базується на сполученні глобально збіжного методу першого порядку для розв'язання варіаційних нерівностей та методу ньютонівського типу для розв'язання системи необхідних умов першого порядку.

Такий підхід до побудови прискореного методу лінеарізації в задачах умовної оптимізації був запропонований Б.М.Пшеничним та Л.О.Соболенко.

Позначимо $J(x) = \{ i \in 1, ..., l \mid h_i(x) + (h_i'(x), p) = 0 \}$, де $p \in \mathbb{R}^n$, $|J(x)|$ - кількість елементів множини $J(x)$.

<u>Формулювання алгоритму.</u> Виберемо $x_0 \in \mathbf{R}^n$, γ, ε, та β, де $\varepsilon \in (0; 1)$, $\gamma \in (0; 1)$, $\beta > h^+(x_0)$; $C_0 > 0$ - достатньо велике число. Опишемо k-у ітерацію методу.

I. Розв'язуємо задачу квадратичного програмування (16) та двоїсту до неї. Позначимо розв'язок задачі (16) $p(x_k)$ через p_k, а множники Лагранжу $\lambda^i(x_k) = \lambda^i_k$, $i = 1, ..., l$.

Якщо $\|p_k\| > C_k$, то покладемо $C_{k+1} = C_k$ та йдемо на IV, якщо $\|p_k\| \le C_k$ - на II.

II. Знаходимо y_k, розв'язуючи систему рівностей

$$\begin{aligned} \hat{L}_{xx}(x_k, \lambda_k)y + F(x_k) + \hat{H}(x_k)w &= 0, \\ \hat{H}^T(x_k)y + \hat{h}(x_k) &= 0, \end{aligned} \qquad (26)$$

де $\hat{h}(x_k) \in \mathbf{R}^{|J(x_k)|}$; $\hat{H}(x_k)$ - матриця виміру $n \times |J(x_k)|$, стовбці якої є вектори $\dot{h}_i(x_k)$, $i \in J(x_k)$, $y \in \mathbf{R}^n$, $w \in \mathbf{R}^{|J(x_k)|}$.

Якщо система (26) не має розв'язку, то покладемо $C_{k+1} = \gamma\|p_k\|$ та йдемо на IV, якщо розв'язок системи y_k знайдено, то - на III.

III. Обчислюємо

$$\bar{x} = x_k + y_k. \tag{27}$$

В точці $\bar{x}$ знаходимо $p(\bar{x})$, розв'язуючи задачу (16).

Якщо

$$\|p(\bar{x})\| \le \gamma\|p_k\|, \tag{28}$$

то покладемо $x_{k+1} = \bar{x}$, $C_{k+1} = \gamma\|p(\bar{x})\|$, $N_k = N_{k-1}$ ($N_0 > \sum_i \lambda_0^i$; $i = 1, \ldots, l$). Кінець ітерації.

Якщо умова (28) не виконується, то обчислюємо $C_{k+1} = \gamma\|p_k\|$ та йдемо на IV.

IV. Обчислюємо $N_k = \max\{N_{k-1}, 2\sum_{i=1}^{l} \lambda_k^i\}$.

V. Вибираємо α_k з нерівностей (17), (18), та обчислюємо $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$.

Теорема 7. Якщо, окрім умов а) - в) задачі (1), матриці $\dot{F}(x)$, $\ddot{h}_i(x)$, $i = 1, \ldots, l$ задовільняють умові Ліпшиця, множина Ω_x обмежена, $\lambda_*^i > 0$ для всіх $i \in I(x_*)$, то в комбінованому алгоритмі $x_k \to x_*$, $k \to \infty$. В околі розв'язку x_* наближення x_{k+1} обчислюються за формулою (27) і справедлива оцінка $\|x_{k+1} - x_*\| \le C\|x_k - x_*\|^2$, $C > 0$.

Перевагою комбінованого методу в порівнянні з квазиньютонівським алгоритмом (§3.1) є те, що він використовує ітераційний процес в просторі прямих змінних $\mathbf{R}^n$. Однак, для забезпечення збіжності він потребує вирішення на кожній ітерації двох допоміжних задач.

У додатку наведені результати чисельних експериментів. Регуляризований метод першого порядку (§2.2) та методи другого порядку - квазиньютонівський та комбінований (розділ III) - були випробувані на прикладах вирішення як варіаційних нерівностей, так і оптимізаційних задач. При знаходженні розв'язку варіаційних нерівностей запропоновані алгоритми порівнювались з існуючими методами першого та другого порядку (без апроксимації множини Ω_x). Результати обчислень підтвердили перевагу запропонованих методів другого порядку перед існуючими алгоритмами першого порядку. При розв'язанні оптимізаційних задач запропоновані методи - квазиньютонівський та комбінований - порівнювались з прискореним методом лінеаризації. Результати обчислень показали, що запропоновані методи другого порядку не поступаються перед оптимізаційними методами відповідного порядку і можуть бути використані також для розв'язання задач оптиміззції .

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором та опуклими обмеженнями-нерівностями запропоновано оптимізаційний підхід, який базується на переході до еквівалентних задач оптимізації. Вивчені властивості еквівалентних задач оптимізації. На основі математичного апарату методів послідовного квадратичного програмування з використанням недиференційовної штрафної функції сформульовані глобально збіжні алгоритми розв'язання сильно опуклих варіаційних нерівностей першого та другого порядку. Доведена глобальна збіжність методів та встановлені оцінки лінійної та надлінійної швидкості збіжності ітераційних послідовностей методів відповідно першого та другого порядку в околі розв'язку.

2. Побудована модифікація методу Б.М.Пшеничного для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором на опуклій множині. Доведена лінійна швидкість збіжності модифікованого алгоритму та методу Б.М.Пшеничного.

3. Сформульовано регуляризований алгоритм першого порядку для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонним оператором на обмеженому багатограннику.

4. Побудовано комбінований алгоритм розв'язання сильно опуклих варіаційних нерівностей. Метод базується на сполученні глобально збіжного методу першого порядку з методом ньютонівського типу для розв'язання системи необхідних умов першого порядку.

5. Запропоновані алгоритми реалізовані та випробувані на розв'язанні прикладів як варіаційних нерівностей з несиметричним оператором, так і оптимізаційних задач. Наведені порівняльні характеристики запропонованих методів з існуючими методами розв'язання варіаційних нерівностей та задач оптимізації.

<u>Основні положення дисертації опубліковані в таких працях:</u>

1. Пакет прикладных программ "МЕТЛИН-ПЭВМ" для решения задач нелинейного программирования /Б.Н.Пшеничный, Л.А.Соболенко, А.А.Сосновский, В.М.Александрова и др. // Кибернетика и системный анализ. - 1993. - № 5. - С. 79 - 92.
2. Панин В.М., Александрова В.М. Линейная сходимость метода решения вариационных неравенств // Там же. - 1994. - № 3. - С. 175 - 179.
3. Панин В.М., Александрова В.М. Нелокальный квазиньютоновский метод решения вариационных неравенств // Там же. - № 6. - С. 78 - 91.
4. Панин В.М., Александрова В.М. О одном подходе к решению вариационных неравенств // Кибернетика и вычисл. техника. - 1995. - Вып. 105. - С. 45 - 54.
5. Александрова В.М. Ускоренный метод решения вариационных неравенств // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины. - 1995. - С. 8-13.
6. Панин В. М., Александрова В. М. Асимптотические свойства метода линеаризации в задачах выпуклого программирования // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины. - 1992. - С. 13 - 23.
7. Panin V.M., Alexandrova V.M. A method for solving variational inequalities with monotone operator // Тез. докл. II Укр. конф. "Автоматика-95", г. Львов, 26-30 сент. 1995. - г.Львов, 1995. - С. 38.

<u>Особистий внесок автора.</u> На базі ідей оптимізаційного підходу до розв'язку варіаційних нерівностей, запропонованих науковими керівниками, автором самостійно одержані результати, які складають основний зміст дисертації. В [3, 4] вивчені та встановлені властивості еквівалентної задачі оптимізації, до якої зводиться вихідна варіаційна нерівність, побудований метод першого порядку розв'язання опуклих варіаційних нерівностей та встановлені його властивості. В [7] доведена збіжність регуляризованого методу для розв'язання варіаційних нерівностей з виродженим оператором. В [2, 6] на базі оцінки, одержаної Паніним В.М. для модифікованого методу лінеаризації, доведена оцінка лінійної швидкості збіжності методу Пшеничного Б.М. для розв'язання варіаційних нерівностей з сильно монотонним оператором. Реалізовані на ПЕОМ всі запропоновані в дисертації методи розв'язку варіаційних нерівностей та системна частина ППП "МЕТЛІН-ПЕОМ" [1], складовою частиною однієї з версій якого є ці алгоритми.

Александрова В. М. Численные методы решения конечномерных вариационных неравенств.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 — математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, 1996.

Предложен оптимизационный подход к решению вариационных неравенств с сильно монотонным оператором на выпуклом множестве ограничений. На основе предложенного подхода и использования методов последовательного квадратичного программирования разработаны методы первого и второго порядка для решения сильно выпуклых вариационных неравенств. Доказана линейная скорость сходимости метода решения вариационных неравенств, предложенного Б. Н. Пшеничным. Сформулирован ускоренный алгоритм решения вариационных неравенств с сильно монотонным оператором, основанный на идее совмещения глобального метода решения вариационных неравенств с методом ньютоновского типа решения системы необходимых условий первого порядка. Для решения вариационных неравенств с монотонным оператором предложен регуляризованный метод первого порядка. В качестве примеров тестирования предложенных алгоритмов рассмотрены вариационные неравенства и задачи оптимизации.

Alexandrova V. M. Numerical methods for solving finite-dimensional inequalities.

Candidate of Phys. & Math. Sci. thesis, speciality 01.05.02 — Mathematical Modeling and Numerical Methods in Scientific Research. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS Ukraine, Kiev, 1996.

An approach for solving variational inequalities with strongly monotone operator on convex set of constraints has been proposed. On the base of the approach and sequential quadratic programming methods the first- and the seconde- order methods for solving strongly convex variational inequalities have been elaborated. Linear rate of convergence of method proposed by B. N. Pshenichny has been established. An accelerated algorithm for solving variational inequalities with strongly monotone operator has been formulated based on the idea of combining a global method for solving variational inequalities with Newton's type one for solving the first-order necessary conditions system. A regularization first-order method for solving variational inequalities with monotone operator has been suggested. As the examples of the testing proposed algorithms the variational inequalities and the optimization problems have been considered.

Ключові слова: Варіаційні нерівності, монотонний оператор, методи послідовного квадратичного програмування, недиференційовані штрафні функції.

Підп. до друку 23.04.96. Формат 60×84/16. Папір для розмнож. апар. Офс. друк. Ум. друк арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 1,0. Зам. 238. Тир. 100 прим.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України 252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40