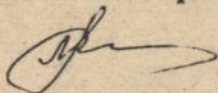


КИЇВСЬКИЙ ІНСТИТУТ ВІЙСЬКОВО-ПОВІТРЯНИХ СИЛ

На правах рукопису

**ЛЕГЕНЬКИЙ Віктор Іванович**



**СИМЕТРИЙНИЙ АНАЛІЗ КЕРОВАНИХ  
СИСТЕМ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО  
ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ПОЛЬОТУ**

20.02.12 – Військова кібернетика, інформатика, системний аналіз,  
дослідження операцій і моделювання систем та бойових дій (ВПС)

**АВТОРЕФЕРАТ**

**дисертації на одбуття наукового ступеня  
доктора технічних наук**

Київ – 1996

ДВ 34.947

Робота виконана в Київському інституті Військово-Повітряних Сил

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор  
**АСЛАНЯН Альберт Едуардович**

доктор технічних наук, професор  
**КАРПАЧОВ Юрій Андрійович**

доктор фіз.-мат. наук, професор  
**НІКІТІН Анатолій Глебович**

Провідна організація: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова  
НАН України.

Захист відбудеться " 28 " червня 1996 р. о 10.00 годині  
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.45.04 при Київсь-  
кому інституті Військово-Повітряних Сил за адресою:  
252186 Київ-186, Повітрофлотський проспект, 30.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий " 21 " травня 1996 р.

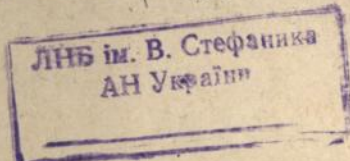
ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00754641 (R)

Вчений секретар спеціалізованої ради  
доктор технічних наук, сис

**О.В. ХАРЧЕНКО**



## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У теперішній час ефективно використання літальних апаратів (ЛА) значною мірою залежить від якості розв'язку задач керування польотом. Остання ж досягається не тільки "якістю" використаної математичної моделі руху ЛА, але й можливістю ефективного аналізу цієї моделі та тих додаткових умов, які відображають бажані властивості руху ЛА. При цьому ми повинні враховувати ті особливості, які притаманні постановці та розв'язку сучасних задач керування ЛА.

Головна з них – необхідність керування "у великому" в реальному часі, коли можливі початкові умови та параметри руху можуть змінюватись у межах, що порушують адекватність лінеаризованих моделей. Це приводить до необхідності застосування при розрахунках та аналізі руху ЛА нелінійних моделей.

В ситуації, що склалась, можливі два підходи. Перший полягає в розробці деяких універсальних обчислювальних процедур (наприклад, алгоритмів керування з прогнозуючою моделлю), які не залежать від специфіки правих частин диференціальних рівнянь руху моделі  $\dot{x}^i = f^i(t, x, u)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Однак, реалізація таких алгоритмів перед'являє підвищені вимоги до бортових ЕОМ.

Другий підхід передбачає попередній аналіз (в даній роботі – симетрійний (груповий) аналіз) нелінійної моделі та подальше використання результатів цього аналізу в рівноманітних задачах керування та моделювання руху ЛА. Вивчення тих чи інших симетрій математичної моделі дозволяє виявити структуру множини розв'язків, що відрізняються початковими умовами, параметрами моделі тощо.

Одне із спостережень автора, яке визначило вибір саме методів групового аналізу, полягає в тому, що більшість відомих у динаміці польоту перетворень (будь-то найпростіші перетворення математичних моделей до другої незалежної змінної – енергетичної висоти ( $h_*$ ), дальності ( $L$ ); введення безрозмірних змінних і таке інше) пов'язано так чи інакше з певними властивостями інваріантності вихідних математичних моделей руху і може бути вивчено на єдиній методологічній основи – теорії неперервних груп перетворень Софуса Лі.

"Приховану" групову природу мають, як це показано в дисертації, і метод "модуючих функцій", що застосовується в алгоритмах термінального керування, і гіпотеза А.О. Космодем'янського

про "особливу інтегровність" рівнянь оптимальних систем.

Друга особливість задач динаміки польоту полягає в тому, що при рооррахунках вибір керуючих впливів певною мірою довільний.

Наприклад, при дослідженні траєкторного руху у вертикальній площині з рівним успіхом як керування можуть бути прийняті:  $\alpha$  - кут атаки,  $c_y(\alpha, M)$  - коефіцієнт під'йомної сили ( $M$  - число Маху),  $n_{yn}(\alpha, M, h)$  - нормальне швидкісне перевантаження ( $h$  - висота польоту) і т.д.

Здійснюючи вибір того чи іншого керування, ми автоматично змінюємо структуру правих частин рівнянь руху, що зумовлює специфіку моделей керованого руху ЛА як об'єктів групового аналізу та допускає апріорне прийняття концепції керування із зворотнім зв'язком.

Таким чином, з одного боку виникла необхідність в узагальненні відомих в динаміці польоту перетворень, а з другого - необхідність в розвитку самого наукового напрямку - симетрійного аналізу керованих систем, поширивши його на системи, що функціонують за принципом керування із зворотнім зв'язком.

#### Мета роботи:

- 1) Вивчення симетрійних властивостей керованих систем, що функціонують за принципом керування із зворотнім зв'язком;
- 2) Роорробка методології використання симетрійних властивостей в роов'язку прикладних задач керування ЛА:
  - задачі введення математичних моделей руху керованих систем до найпростішого (мінімально - параметричного) вигляду;
  - задачі "схематизації" польоту;
  - задачі формування алгоритмів термінального керування;
  - задачі представлення роов'язків оптимізаційних задач;
- 3) Дослідження симетрій оптимальних процесів та математичне обгрунтування гіпотези А.О.Космодем'янського.

#### Наукова новизна роботи полягала у:

- систематичному вивченні симетрій керованих систем, що функціонують за принципом керування із зворотнім зв'язком;
- роорробці методики використання симетрійних властивостей у:
  - а) задачах введення (редукції) математичних моделей керованих систем (в тому числі ЛА) до мінімально - параметричного вигляду;
  - б) задачах "схематизації" польоту;

- в) проблемах термінального та оптимального керування;  
– розробці теоретико-групового формалізму в оптимальному керуванні.

**Методи дослідження.** В дисертації використовувались методи загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь, методи групового аналізу диференціальних рівнянь, теорія груп та алгебр Лі, класичне варіаційне числення і теорія оптимального керування, методи математичного моделювання та комп'ютерної алгебри.

**До захисту виносяться:**

- результати симетрійного аналізу математичних моделей керованих систем, що функціонують за принципом керування із зворотнім зв'язком;
- алгоритм зведення математичних моделей руху ЛА до мінімально-параметричного вигляду;
- представлення розв'язків задач оптимального керування у вигляді диференціального зворотнього зв'язку;
- результати симетрійного аналізу оптимальних процесів та математичне обґрунтування гіпотези А.О.Космодем'янського.

**Практична цінність роботи** полягає у:

- розробці рекурсивного принципу термінального керування, що дозволяє підвищити точність приведення керованого об'єкта в кінцеву точку;
- розробці методології "схематизації" польоту при виконанні льотчиком ізоенергетичного маневру у вертикальній площині;
- розв'язку оптимізаційної задачі про мінімум максимальної швидкості пікіруючого літака.

**Реалізація:**

- методика розв'язку термінальних задач наведення та дослідження в проблемі рятування авіаційного ракетного комплексу "Світло" реалізовані в Національному Космічному Агенстві України при проведенні ДКР "Світло" (Вих. 1-5/1263 від 20.12.1994 р.);
- алгоритми представлення розв'язків задач оптимального керування у вигляді диференціального зворотнього зв'язку та його програмна реалізація в системі аналітичних досліджень "REDUCE" запроваджена у Міжнародному Математичному Центрі НАН України при проведенні НДР в ДКБ "Південне" (акт реалізації від 9. 08. 1994 р.).

**Апробація роботи і публікації.** Дисертація написана за пу-

бібліографіями автора [1 – 39]. У спільних публікаціях основні наукові результати належать автору. Результати роботи доповідались та обговорювались на Міжнародному семінарі IFAC "Негладкі та роривні задачі керування і оптимізації" (Владивосток, 1991 р.), Міжнародному семінарі "Сучасний груповий аналіз" (Уфа, 1991 р.), Міжнародному семінарі "Стійкість та коливання нелінійних систем керування" (Москва, 1992 р.), Міжнародній конференції "Симетрія в нелінійній математичній фізиці" (Київ, 1995 р.), на 17-ти конференціях республіканського та союзного рівня, на наукових семінарах в Інституті кібернетики НАН України, Інституті математики НАН України, Київському політехнічному інституті, ВПА ім. М.С. Жуковського, Інституті проблем керування (м. Москва), Московському фізико-технічному інституті, Обчислювальному Центрі РАН, Київському університеті ім. Т.Г. Шевченка, Київському інституті ВПС, КМЗ ім. О.К. Антонова, НВО "Молнія" (м. Москва).

**Структура дисертації.** Дисертація складається з 6 розділів і 22 підрозділів, 1 додатку і 10 малюнків. Список літератури містить 184 найменування. Всього в дисертації 239 сторінок.

## КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі розглянута актуальність теми, сформульована мета роботи, її наукова новизна та практичне значення, наведені відомості щодо реалізації та апробації роботи, описана структура дисертації.

В першому розділі аналізуються витoki використання груп та алгебр Лі в теорії керування та моделювання керованих процесів, наводяться необхідні відомості з теорії симетрії диференціальних рівнянь та вспоміжні геометричні конструкції.

Проводиться дослідження можливих підходів у вастосуванні груп і алгебр Лі до аналізу динамічних систем з керуванням, що мають вигляд

$$\dot{x}^i = f^i(t, x, u), \quad x \in X \in R^n, \quad u \in U \in R^r. \quad (1)$$

Зокрема, проаналізовані дві головні інтерпретації системи (1), які умовно можна назвати "динамічна полісистема" (R.W. Brockett, R.M. Hirschorn, H. Nijmeijer, C. Lobry, H.J. Sussman та ін.), та "регулярна система з керуванням" (Ю.М. Павловський, Г.М. Яковенко, В.І.Йолкін та ін.). Загальним для обох підходів є розгляд системи

(1) як такої, що параметризована деякими допустими керуваннями  $u \in U$ . Така інтерпретація системи (1) дозволяє перейти до еквівалентної сім'ї систем диференціальних рівнянь (або відповідної сім'ї векторних полів).

На цьому шляху вдалось отримати фундаментальні результати в таких галузях аналізу динамічних систем з керуванням (ДСК) як керованість, спостережливість, декомпозиція та ін. Значно менше були досліджені задачі синтезу. Крім того, як показав Г.М. Яковенко, цілком керовані системи вигляду (1) в класі симетрій "по стану", що задаються операторами вигляду

$$Y = \xi^i(t, x) \partial_{x^i}, \quad (2)$$

допускають лише скінченновимірні алгебри інваріантності ( $A_0$ ), розмірність яких не перевищує розмірності простору стану ( $\dim A_0 \leq n$ ).

В зв'язку з викладеним, виникає необхідність в альтернативній інтерпретації ДСК (1) у вигляді недовизначеного диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку

$$F = S_t + f^i(t, x, u, a) S_{x^i} = 0, \quad S_{x^i} = \frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad (3)$$

в якому функції  $S(t, x)$  та  $u(t, x)$  є залежними змінними наведених аргументів.

Така інтерпретація більшою мірою відповідає прийнятій в роботі концепції керування із зворотнім зв'язком та дає можливість природно включити до групових перетворень керуючі впливи. Закінчується перший розділ постановкою задачі про дослідження точкових (лієвих) симетрій рівняння (3) в класі інфінітезимальних операторів симетрії вигляду

$$X = \tau(t, x, u, S) \partial_t + \xi^i(t, x, u, S) \partial_{x^i} + \eta(t, x, u, S) \partial_S + \varphi^j(t, x, u, S) \partial_{u^j}, \quad (4)$$

для визначення коефіцієнтів якого  $\tau$ ,  $\xi^i$ ,  $\varphi^j$ ,  $\eta$  використовується умова симетрії

$$\left. \begin{matrix} XF \\ (1) \end{matrix} \right| F = 0 = 0, \quad (5)$$

де  $X_{(1)}$  - перше продовження оператора  $X$ .

Другий розділ присвячений розробці алгоритмів обчислення симетрій рівняння (3) на основі аналізу умови (5). З цієї метою на

першому етапі о (5) отримані вноначальної рівняння, що мають вигляд

$$X_0 \eta = 0, \quad U_j \eta = 0, \quad (6)$$

$$f^i U_j \tau - U_j \xi^i = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (7)$$

$$X f^i + f^i X_0 \tau - X_0 \xi^i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

де  $X_0 = \partial_t + f^i(t, x, u) \partial_{x^i}$  - асоційований в (1) оператор повного диференціювання за часом.

Існування деякого числа  $m$  функціонально-незалежних роов'язків системи (6) еквівалентно існуванню для рівняння (3) такого ж числа роов'язків  $S^l(t, x) = C^l$ ,  $l = \overline{1, m}$ , тобто некеровності системи (1). Відповідно, справедливим є наступний результат:

**Теорема 1** Якщо рівняння (3) допускає хоча б один оператор симетрії вигляду

$$X = \eta(t, x) \partial_S, \quad (9)$$

то система (1) - некерована. Якщо ж рівняння (3) допускає скінчене число  $m < n$  функціонально-незалежних операторів симетрії  $X_1, X_2, \dots, X_m$  вигляду (9), тоді співвідношення

$$\eta^1(t, x) = C^1, \quad \eta^2(t, x) = C^2, \quad \dots, \quad \eta^m(t, x) = C^m \quad (10)$$

визначають рівняння інваріантних поверхонь, по яким рухається динамічна система з керуванням.

Таким чином, встановлено, що будь яка цілком керована система може допускати оператори симетрії вигляду  $X = \eta(S) \partial_S$ . Крім того, оскільки праві частини рівняння (3) не залежать від  $S$ , система рівнянь (7), (8) також допускає вказаний оператор. А так як сукупність операторів симетрії утворює алгебру, можливо сформулювати наступний результат

**Теорема 2** Якщо оператор  $X$  є оператором симетрії рівняння (3), то оператор  $\dot{X} = [\partial_S, X]$  також є оператором симетрії цього рівняння.

Значення теорем 1 і 2 полягає в тому, що при подальшому розгляді можливо обмежитись вивченням операторів симетрії вигляду

$$X = \tau(t, x, u) \partial_t + \xi^i(t, x, u) \partial_{x^i} + \varphi^j(t, x, u) \partial_{u^j}. \quad (11)$$

Співвідношення (7), (8) вперше були отримані в працях Ю.М. Павловського та Г.М. Яковенка. Нижче проводиться їх подальший аналіз. Зокрема, відносно розв'язків системи (7) сформульовані наступні результати

**Теорема 3** Якщо керована система (1) має  $r \geq 2$  керуючих впливів  $(u^1, u^2, \dots, u^r)$ , всі з яких - істотні, тоді коефіцієнти  $(\tau, \xi^i)$  не залежать від  $u$ :  $\tau_u = \xi_u^i = 0$ . Відповідно, максимальною допускаємою групою в даному випадку є група еквівалентностей.

Фігуруюче у формулюванні теореми поняття "істотні" керуючі впливи означає наступне:

**Означення 1** Керуючі впливи  $u^k$  ( $k = \overline{1, r}$ ) будемо називати істотними, якщо не можна знайти  $(r-1)$  із функцій  $v(t, x, u)$ , таких, щоб мали місце тотожності:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x, u) = \Phi^i(t, x, v). \quad (12)$$

Необхідна і достатня умова "неістотності" керуючого впливу полягає в існуванні деякої повної системи операторів

$$X_l = \varphi_l^j \delta_{\omega^j}, \quad l < r, \quad (13)$$

причому нові керуючі впливи  $v(t, x, u)$  є інваріантами системи (13). Досить часто у ролі таких операторів можуть виступати оператори симетрії системи (1), для яких в цьому випадку виконується умова

$$X_l f^i = 0. \quad (14)$$

Як випливає з теореми 3, необхідність розв'язування системи (7) при  $r \geq 2$  відпадає. У випадку скалярного керування, система (7) є недовизначеною системою  $n$  рівнянь відносно  $(n+1)$  невідомої  $(\tau, \xi^i)$ . Для таких систем сформульовано наступний результат:

**Теорема 4** Якщо вронскіан функцій  $\varphi^i = \frac{\partial f^i}{\partial u}$  в системі (7) не дорівнює нулеві ( $W(\varphi^i) \neq 0$ ), її загальний (канонічний) розв'язок має вигляд

$$\tau = \sigma^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k \sigma^{(k)}, \quad (15)$$

$$\xi^i = f^i \sigma^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} B_k^i \sigma^{(k)},$$

де  $\sigma = \sigma(t, x, u)$  - довільна функція ( $\sigma^{(n)} = U^n \sigma = \frac{\partial^n \sigma}{\partial u^n}$ ), а визначення коефіцієнтів ( $A^i, B_k^i$ ) проводиться за наступним алгоритмом:

1) Знаходимо розв'язки лінійної системи рівнянь

$$\sum_{s=0}^{n-1} (U^{s+1} f^i) D_s = (-1)^{n+1} U^{n+1} f^i \quad (16)$$

відносно коефіцієнтів  $D_s$ ;

2) Визначаємо  $A_i$  у відповідності з формулою:

$$A_i = \sum_{m=i}^{n-1} (-1)^m \binom{m}{i} U^{m-i} D_m, \quad (17)$$

3) Обчислюємо коефіцієнти  $B_k^i$  за формулою:

$$B_k^i = f^i A_k + \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^{m+1} U^m (A_{m+k+1} U f^i), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (18)$$

У важливому частковому випадку  $U^{n+1} f^i = 0$  ( $\forall i$ ) наведені вище формули значно спрощуються:

$$\begin{aligned} A_n &= 1, \quad A_i = 0, \\ B_n^i &= f^i \quad B_k^i = (-U)^{n-k} f^i, \quad k = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

При невиконанні умов теореми (наприклад, якщо функції  $\frac{\partial f^i}{\partial u}$  - лінійно залежні), необхідно обмежитись розглядом деякої підсистеми системи (7), для якої ці умови справедливі. Для решти невідомих розв'язки будуються тривіальним чином і при цьому відбувається "параметричне розширення" множини розв'язків.

З виконанням представлення (15) для  $(\tau, \xi^i)$  задача обчислення коефіцієнтів операторів симетрії зводиться до розв'язування системи  $(n-1)$  рівнянь в частинних похідних відносно невідомої функції  $\sigma(t, x, u)$ . Ці рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (\hat{B}_k^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j} - X_0 \hat{B}_k^i) U f^i - (\hat{B}_k^i \frac{\partial f^j}{\partial x^j} - X_0 \hat{B}_k^j) U f^j \right] \sigma^{(k)} - \\ - \sum_{k=0}^{n-2} (\hat{B}_k^i U f^i - \hat{B}_k^i U f^i) X_0 \sigma^{(k)} = 0, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (20)$$

де  $\hat{B}_k^i = \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^{m+1} U^m (A_{m+k+1} U f^i)$ .

За допомогою отриманих співвідношень далі проведений аналіз рівних підалгебр, що допускаються системою (1). Зокрема, сформульовано наступний результат, що узагальнює вищенаведений результат Г.М. Яковенка:

**Теорема 5** Алгебра інваріантності (A) цілком керованої системи (1) в класі операторів

$$Z = \tau(t, x) \partial_t + \xi^i(t, x) \partial_{x^i} \quad (21)$$

є скінченновимірною

$$\dim A \leq n + 2. \quad (22)$$

На закінчення розділу наведено приклади обчислення симетрій рівноманітних керованих систем. Зокрема, обчислено симетрії цілком керованої системи

$$x^{(n)} = u, \quad x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}. \quad (23)$$

Система (23) допускає нескінченновимірний оператор симетрії, що має вигляд

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} \pi(\hat{X}_0^{(n-2)} g) \partial_t + (-x^{i+1} \frac{\partial}{\partial x} \pi(\hat{X}_0^{(n-2)} g) + \hat{X}_0^{(i-1)} g) \partial_{x^i} + (\hat{X}_0^{(n-1)} g) \partial_{x^n} + (X_0^2 \hat{X}_0^{(n-2)} g) \partial_u, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (24)$$

де  $g = g(t, x^1, \dots, x^{n-1})$  - довільна функція.  $X_0 = \hat{X}_0 + u \partial_x$ ,  $\hat{X}_0 = \partial_t + x^{i+1} \partial_{x^i}$ .

Проаналізовано також клас цілком керованих систем

$$x^i = f^i(u), \quad i = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Для цього класу має місце умова  $X_0 f^i = 0$ , що значно спрощує систему (20), вводячи її до вигляду

$$X_0 \sigma = 0, \quad X_1 \sigma = 0, \quad \dots, \quad X_{n-2} \sigma = 0, \quad (26)$$

де  $X_k = [U, X_{k-1}]$ ,  $k = \overline{1, n-2}$ , а вираз для коефіцієнта  $\varphi$  приймає вигляд:

$$\varphi = -X_0 U^{(n-1)} \sigma. \quad (27)$$

Система (26) – повна та має 3 функціонально-незалежні інваріанти, один з яких є очевидним  $\tau \omega^3 = u$ , а два інших можуть бути представлені у вигляді (якщо позначити  $t = x^0$ )

$$\omega^k = b_j^k x^j, \quad k = 1, 2, \quad j = \overline{0, n}, \quad (28)$$

в якому всі коефіцієнти  $b_j^k$  можуть бути взяті будь-які два функціонально-незалежні розв'язки системи

$$\begin{pmatrix} 1 & f^1 & f^2 & \dots & f^n \\ 0 & Uf^1 & Uf^2 & \dots & Uf^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & U^{n-2}f^1 & U^{n-2}f^2 & \dots & U^{n-2}f^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = 0. \quad (29)$$

Тому і в цьому випадку обчислення можуть бути виконані до кінця.

Наступні розділи ілюструють різні аспекти застосування груп перетворень в ріноманітних прикладних дослідженнях.

Так, у третьому розділі об'єктом групового аналізу стають динамічні системи, праві частини яких містять фізичні параметри (константи):

$$\dot{x}^i = f^i(t, x, a). \quad (30)$$

Під цей же клас підпадають і керовані системи при вивченні їх власних рухів (коли  $a = const$ ). Для системи (30) розв'язується задача про цілеспрямований пошук таких невироджених обмін оміяних  $\hat{y} = \hat{y}(t, x, a)$ ,  $\hat{t} = \hat{t}(t, x, a)$ ,  $b = b(a)$ , при яких нова система

$$\dot{\hat{y}}^i = g^i(\hat{t}, \hat{y}, b) \quad (31)$$

містить меншу, ніж в (30), кількість параметрів. Ця проблема, що є невід'ємною частиною параметричного аналізу прикладних задач, має важливе значення при організації процесу математичного моделювання. Проаналізовано різні відомі підходи (істотні параметри сім'ї функцій,  $\pi$ -теорема) та дано їх узагальнення. Принципове означення має поняття "визначального" параметра.

Означення 2 *Параметр рівняння (30) будемо називати визначальним, якщо рівняння не допускає по ньому неперервну групу перетворень еквівалентності з твірною:*

$$X = \tau(t, x)\partial_t + \xi^i(t, x)\partial_{x^i} + \omega^j(a)\partial_{a^j}. \quad (32)$$

Відповідно, алгоритм введення необхідних змін змінних вводить до визначення інваріантів операторів (32), що допускає система (30). При визначенні числа визначальних параметрів важливим є наступне спостереження:

**Лема 1** *Оператори симетрії (32) при  $\tau(t, x) \neq 0$ ,  $\xi^i(t, x) \neq 0$ ,  $w^i(a) \neq 0$  утворюють повну систему.*

Наведенна лема, однак, не гарантує виключення  $r$  параметрів у випадку, якщо динамічна система допускає  $r$ -мірну алгебру інваріантності. Вирішальною обставиною в даному випадку є розв'язність відповідної алгебри. Як ілюстрацію до останнього зауваження розглянуто кубічне рівняння

$$x^3 + a^2 x^2 + a^1 x + a^0 = 0, \quad (33)$$

яке допускає тривимірну алгебру з базисом

$$X_1 = \partial_x - 3a^2 \partial_{a^2} - 2a^1 \partial_{a^1} - a^1 \partial_{a^0}, \quad (34)$$

$$X_2 = x \partial_x + a^2 \partial_{a^2} + 2a^1 \partial_{a^1} + 3a^0 \partial_{a^0}, \quad (35)$$

$$X_3 = x^2 \partial_x + (2a^1 - (a^2)^2) \partial_{a^2} + (3a^0 - a^1 a^2) \partial_{a^1} - a^2 a^0 \partial_{a^0}. \quad (36)$$

Але, в таблиці комутаторів алгебри

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3, \quad (37)$$

впливає, що вона нерозв'язна. Тому, із трьох коефіцієнтів  $(a^2, a^1, a^0)$  вдасться виключити тільки два. Наприклад, використовуючи інваріанти операторів  $X_1, X_2$ , що мають вигляд

$$z = \left(x + \frac{a^2}{3}\right) \left(a^0 - \frac{a^1 a^2}{3} + \frac{2(a^2)^3}{27}\right)^{-1/3}, \quad (38)$$

$$r = \left(a^1 + \frac{(a^2)^2}{3}\right) \left(a^0 - \frac{a^1 a^2}{3} + \frac{2(a^2)^3}{27}\right)^{-2/3}, \quad (39)$$

рівняння (33) вводить до вигляду

$$z^3 + rz + 1 = 0 \quad (40)$$

з одним визначальним параметром  $r$ .

Щодо динаміки польоту розглянуто задачу про зведення (редукцію) до мінімально - параметричного вигляду математичної моделі повздовжнього власного руху літака, яка береться у вигляді

$$\frac{dh}{dt} = V \sin \theta, \quad \frac{dL}{dt} = V \cos \theta, \quad (41)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m} \left( P - (Ac_y^2 + B) \frac{\rho V^2}{2} S - mg \sin \theta \right), \quad (42)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{mV} \left( c_y \frac{\rho V^2}{2} S - mg \cos \theta \right),$$

де ( $h$  - висота,  $L$  - дальність,  $V$  - швидкість,  $\theta$  - кут нахилу траєкторії,  $t$  - час) - є фазовими змінними, ( $P$  - тяга,  $c_y$  - коефіцієнт під'йомної сили,  $m$  - маса,  $S$  - характерна площа,  $\rho$  - густина повітря,  $g$  - присконення вільного падіння, ( $A, B$ ) - аеродинамічні характеристики поляря) - постійні коефіцієнти.

Основний результат тут такий: система (41),(42) допускає 9-вимірну алгебру інваріантності в базисом:

$$X_1 = t\partial_t - V\partial_V - 2P\partial_P - 2g\partial_g,$$

$$X_2 = h\partial_h + P\partial_P + \rho\partial_\rho,$$

$$X_3 = h\partial_h + L\partial_L + V\partial_V + P\partial_P + 2S\partial_S + g\partial_g - 3\rho\partial_\rho,$$

$$X_4 = \rho\partial_\rho - S\partial_S, \quad (43)$$

$$X_5 = \partial_h, \quad X_6 = \partial_L,$$

$$X_7 = \partial_t; \quad X_8 = \partial_A - c_y^2\partial_B,$$

$$X_9 = t\partial_t + 2h\partial_h + 2L\partial_L + V\partial_V - 2c_y\partial_{c_y} + 2A\partial_A - 2B\partial_B.$$

Із використанням інваріантів системи (43), що вояті у вигляді

$$k = \frac{c_y}{Ac_y^2 + B}; \quad \dot{V} = V \sqrt{\frac{\rho S (Ac_y^2 + B)}{2mg}}, \quad \dot{P} = \frac{P}{mg}; \quad (44)$$

$$\dot{t} = t \sqrt{\frac{\rho g S (Ac_y^2 + B)}{2m}}; \quad \dot{h} = h \frac{\rho S}{2m}; \quad \dot{L} = L \frac{\rho S}{2m}$$

рівняння (41), (42) опишуться наступним чином (онак опущений):

$$\dot{h} = V \sin \theta, \quad \dot{L} = V \cos \theta, \quad (45)$$

$$\dot{V} = P - V^2 - \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{V}(kV^2 - \cos \theta) \quad (46)$$

і містять лише два визначальних параметри:  $P$  – тягооборєність та  $k$  – аеродинамічну якість.

У четвертому розділі досліджується проблема "схематизації" польоту, тобто проблема представлення деякого програмного (заданого) руху пілота. Як відправне посилення використовується принцип стаціонарності операторської діяльності (та впливаючий із нього принцип стаціонарності динамічних властивостей інформації), що зумовлює представлення для контролю екіпажу таких "узгалепених" координат, які валишаються незмінними при виконанні даного маневру. Мова йде, іншими словами, про пошук для заданих рівнянь руху законів обереження.

При заданій специфікації керуючих впливів задача є тривіальною і полягає у відшуванні інваріантів. В розділі розглядається дещо інша постановка задачі – про пошук таких специфікацій керуючих впливів, які б гарантували існування відповідних інваріантів, оберігаючи при цьому відому функціональну довільність (різновид задачі про розділення омінних).

Пропонується для визначення таких специфікацій використовувати групи, що допускаються системою (1). Для знаходження кінцевих результатів плідною є також ідея "умовної" інваріантності та техніка інтегрування розв'язних структур.

Як приклад розглянуто задачу "схематизації" ізоенергетичного маневру типу "петля". Для цього випадку в системі (рівняння описано у безрозмірній формі)

$$\dot{h} = V \sin \theta, \quad (47)$$

$$\dot{L} = V \cos \theta, \quad (48)$$

$$\dot{V} = P - c_x(\alpha)V^2 - \sin \theta, \quad (49)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{V}(c_y(\alpha)V^2 - \cos \theta), \quad (50)$$

виконується умова  $P - c_x(\alpha)V^2 = 0$ , яка дає один з необхідних перших інтегралів  $h + \frac{V^2}{2} = C_1$ . Подальший аналіз зводиться до визчення груп симетрій, що допускає оператор

$$X_0 = \partial_t - \sin \theta \partial_V + (c_y V - \frac{\cos \theta}{V}) \partial_\theta. \quad (51)$$

Для оператора (51) існує лише оператор симетрії

$$Y = \partial_t, \quad (52)$$

але система  $(X_0, Y)$  утворює роов'язну структуру, так як виконуються комутаційні співвідношення

$$[X_0, Y] = 0, \quad [X_0, Y_1] = \frac{\cos \theta}{V \sin^2 \theta} (X_0 - Y), \quad [Y, Y_1] = 0, \quad (53)$$

де:

$$Y_1 = \frac{1}{V \sin \theta} \partial_\theta. \quad (54)$$

Відповідно, для отримання необхідного закону обереження треба вибрати  $c_y = c_y(V)$  (як інваріант операторів  $Y, Y_1$ ). В цьому випадку, якщо іє відповідної диференціальної 2-форми ( $\wedge$  - знак операції зовнішнього добутку)

$$\Omega = (dV + \sin \theta dt) \wedge (d\theta - (c_y V - \frac{\cos \theta}{V}) dt) \quad (55)$$

утворити диференціальну 1-форму

$$\omega^1 = \frac{Y \rfloor \Omega}{Y_1 \rfloor Y \rfloor \Omega}, \quad (56)$$

то остання стає замкненою (запис  $Y \rfloor \Omega$  позначає внутрішній добуток (антидиференціювання) оператора  $Y$  на диференціальну форму  $\Omega$ ). Дійсно, інтегруючи (56) отримаємо закон обереження у вигляді:

$$\int_0^V c_y(V) V^2 dV - V \cos \theta = C_2. \quad (57)$$

Далі проаналізовано різні частинні випадки, в яких як "узагальнена" координата запропонована величина

$$q = k n_y V - V_x = C, \quad (58)$$

де  $n_y$  - нормальне перевантаження,  $V_x = V \cos \theta$  - горизонтальна складова швидкості,  $k$  - постійний коефіцієнт, величина якого визначає форму "петлі".

У п'ятому розділі методи групового аналізу знаходять застосування в проблемах термінального керування, тобто в задачах, в яких

ціль керування полягає у переведенні об'єкту керування у бажаний кінцевий стан у бажаний момент часу. Аналіз таких задач показує, що їх успішний алгоритмічний розв'язок знайдений для досить вузького класу систем, математичні моделі яких можуть бути представлені у вигляді

$$\dot{x}^{(n)} = u. \quad (59)$$

На відміну від відомих підходів, які істотно спираються на диференціальну структуру системи (59), в роботі запропоновано використовувати для синтезу законів термінального керування так звану "групову властивість". Введено поняття про "рекурсивне керування".

**Означення 3** *Рекурсивне керування* – керування, при якому керуючі впливи утворюються на основі поточного значення координат та деякого відомого (програмного) розв'язку задачі керування за скінчене число ітерацій.

Реалізація цього принципу передбачає наявність одного відомого програмного розв'язку ( $x(t)$ ,  $u(t)$ ) та інформації про алгебру інваріантності керованої системи (1). У цьому випадку алгоритм синтезу закону термінального керування складається із наступних кроків:

1. Виконується звуження допускової скінченновимірної алгебри  $X = C^k X_k$  на множину граничних умов

$$XF \Big|_{F=0} = 0, \quad (60)$$

(термінальний многовид стає інваріантним);

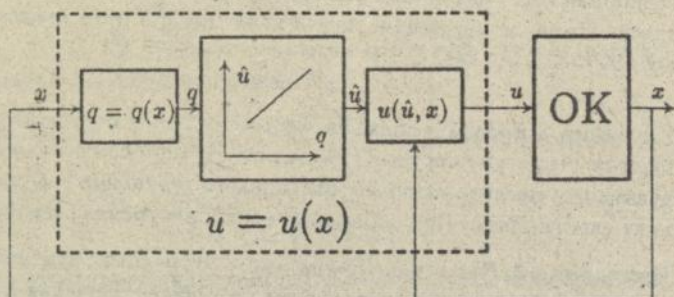
2. В отриманій підалгебрі виділяється деяка  $n$ -мірна підалгебра, оператори якої утворюють повну систему. Тут же одійснюється контроль "неінваріантності" вихідного (бажаного) розв'язку відносно вибраної алгебри.

3. Проводиться пошук двох інваріантів даної системи операторів.

4. Розв'язується задача синтезу шляхом представлення бажаного розв'язку через знайдені на попередньому кроці інваріанти.

Основою для вищенаведеного алгоритму є сформульована в роботі теорема.

**Теорема 6** *Незай* ( $x_n(t)$ ,  $u_n(t)$ ) – розв'язок задачі термінального керування для деяких граничних умов  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(T) = x_k$ ;  $G$  –  $n$  –



ОК – об'єкт керування

Мал. 1

мірна група симетрій, що діє в просторі  $T \times X \times U$ , для якої термінальний многовид  $x = x_k$ ,  $t = T$  є інваріантним многовидом, а генератори групи утворюють повну систему; тоді закон (термінального) керування ("керуючий многовид") може бути представлений у вигляді одного функціонального співвідношення відносно двох функціонально-незалежних інваріантів групи симетрій (коренів повної системи)

$$\Phi(\omega^1, \omega^2) = 0. \quad (61)$$

причому для отримання представлення (61) достатньо записати відомий розв'язок  $(x_r(t), u_r(t))$  в термінах інваріантів  $\omega^1, \omega^2$ .

Далі показано, що коли для синтезу використовуються генератори групи еквівалентностей, то один з двох інваріантів ( $q$ ) не належить від керування і названий "узагальнено-інваріантною" координатою, а другий інваріант ( $\hat{u}$ ), який належить від керування, названий відповідно "узагальнено-інваріантним" керуванням.

Таким чином, задача синтезу в даному випадку – побудова залежності  $\hat{u} = \hat{u}(q)$ , яка може мати чисельний розв'язок. Функціональна схема системи керування для цього випадку представлена на мал. 1.

В оаключному підрозділі п'ятого рооділу наведені приклади роов'яоків термінальних адаач о використанням запрооноосваного алгооритму.

В шостому рооділі аастосування групоого аналіу поширюються на адаачі оптимального керування.

В підрозділі 6.1 ставиться, а в підрозділі 6.2 – роов'язується адаача про виведення оптимальних аамікаючих співвідношень в оптимальних адаааах типу Майера (випадох скалярного керування), коли для оптимальних керувань одійснюється вклучення типу  $u_{opt} \in IntU$ . В цьому випадку визначення функції Белмана  $V(t, x)$  та синтезуючої функції  $u(t, x)$  може бути одійснено із системи рівнянь

$$X_1 V = \left( \partial_t + f^i \partial_{x^i} \right) V = 0, \quad (62)$$

$$X_2 V = \left( f_u^i \partial_{x^i} \right) V = 0. \quad (63)$$

На відміну від формаліому Гамільтона–Якобі–Белмана, в якому із системи (62), (63) виключається керуючий вплив  $u(t, x)$  о метою отримання одноіменного нелінійного рівняння в частинних похідних першого порядку, в роботі реалізована ідея виключення із системи (62), (63) функції  $V(t, x)$ , яка опирається на пропедуру інволютивного аамікання операторів  $X_1$  і  $X_2$ .

Сформульовано наступний результат:

**Теорема 7** *Нехай  $u(t, x)$  – закон оптимального керування (синтезуюча функція) для адаачі оптимального керування типу Майера, а  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) – асоційована з оптимальною адаааею поава система операторів з матрицею коефіцієнтів  $A = \|a_j^i\|$ . Тоді система операторів  $X_1, X_2$  має єдиний спільний інваріант (функцію Белмана  $V(t, x)$ ) о тому і тільки о тому випадку, коли виконується умова:*

$$\text{rank} \|a_j^i\| = n. \quad (64)$$

Зручний в обчислювальному плані критерій складає умова  $\det A = 0$ , яку можна представити у вигляді

$$X_{n+1} | X_n | \dots | X_2 | X_1 | \Omega = 0, \quad (65)$$

де  $\Omega = dt \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  – диференціальна  $(n+1)$ -форма. Умова (65) утворює математичну основу рооробленої автором програми виведення оптимальних аамікаючих співвідношень в системі аналітичних

обчислень "REDUCE" із використанням пакету "EXCALC". Розглянуті ріноманітні модельні приклади, що ілюструють розроблений алгоритм (задача про брахістохрону, задача Цермело, модельна задача виведення літального апарату на орбіту).

В підрозділі 6.3 розвинута теорія узагальнюється на випадок векторних ( $r$ ) керуючих впливів. Показано, що для цього випадку порядок  $\nu$  оптимальних замикаючих співвідношень, що мають вигляд

$$u^{j(\nu-1)} = \Phi^j(t, x, u, u^{j(\nu-2)}), \quad j = \overline{1, r}, \quad (66)$$

визначаються за формулою

$$\nu = \left[ \frac{n}{r} \right], \quad (67)$$

де  $n$  - розмірність фазового вектора ( $x \in \mathbf{R}^n$ ),  $r$  - розмірність вектора керування, випис  $[a]$  означає "ціла частина  $a$ ". Число додаткових інваріантних співвідношень, що при цьому виникають, визначається формулою

$$N = r\nu - n + 1. \quad (68)$$

В підрозділі 6.4 на конкретному прикладі вивчені особливості розв'язку за допомогою розробленого алгоритму оптимальних задач типу Больца.

В підрозділі 6.5 вивчені точкові симетрії оптимальних процесів та проаналізована гіпотеза А.О. Космодем'янського про те, що "в ряді випадків ... для екстремальних режимів рівняння руху інтегруються в замкненому вигляді". Аналіз був проведений не в класичних міркувань Е. Нетер, коли вивчаються симетрії варіаційних функціоналів, а в наступній точці зору: які в симетрій вихідної (незамкненої) системи допускаються оптимальною (замкненою) системою.

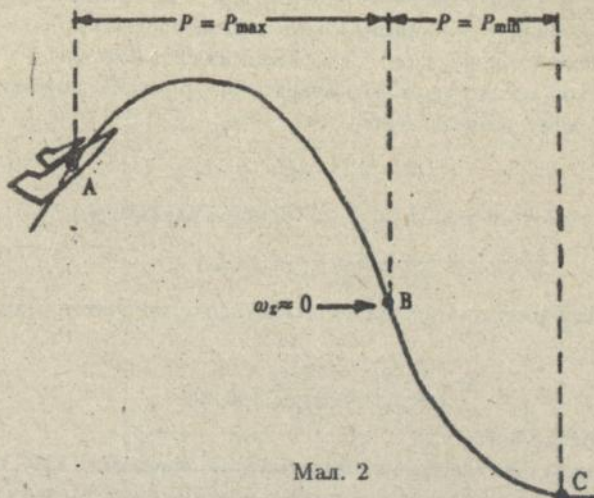
Найбільш загальний результат є таким:

**Пропозиція 1** Група перетворень еквівалентності вихідної (незамкненої) системи в інфінітезімальною твірною

$$X = \tau(t, x)\partial_t + \xi^i(t, x)\partial_{x^i} + \varphi(t, x, u)\partial_u, \quad i = \overline{1, n}, \quad (69)$$

допускається оптимальною (замкненою) системою для таких функцій  $\varphi(t, x, u)$ , які задовольняють умову

$$X_0\varphi = 0. \quad (70)$$



Мал. 2

Цей результат певним чином підтверджує гіпотезу А.О. Космодем'янського. Наведені приклади, коли оптимальні замикання співвідношення співпадають із замиканнями співвідношеннями, які отримані за умови обереження в замкненій системі симетрії вихідної системи.

Заключний підрозділ 6.6 присвячений аналізу особливих оптимальних керувань в системах з симетрією. Досліджується задача про мінімум максимальної швидкості авіаційно-космічної системи на етапі зведення до горизонту (мал. 2).

Формалізація цієї проблеми приводить до розв'язку оптимізаційної задачі про мінімум функціоналу

$$I = \min_{P, \alpha} \left( \max_t V(t) \right) \quad (71)$$

на множині розв'язків диференціальної системи (рівняння записані в безрозмірній формі)

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V \sin \theta, & \dot{V} &= P \cos \alpha - c_x(\alpha) V^2 - \sin \theta \\ \dot{L} &= V \cos \theta, & \dot{\theta} &= \frac{1}{V} (P \sin \alpha + c_y(\alpha) V^2 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (72)$$

де  $h$  – висота,  $L$  – дальність,  $V$  – швидкість,  $\theta$  – кут нахилу траєкторії,  $\alpha$  – кут атаки,  $P$  – приведена тяга (тягооборненість),  $c_x(\alpha)$  – коефіцієнт лобового опору,  $c_y(\alpha)$  – коефіцієнт підйомної сили.

З цієї метою максиміується гамільтоніан ( $H$ ) по  $P$ , що в використанням наслідку теореми Нетер

$$\tau_k H - \psi_i \xi_k^i = C_k \quad (73)$$

та очевидних симетрій задачі ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  – групові параметри)

$$\hat{t} = t + a, \quad \hat{h} = h + b, \quad \hat{L} = L + c, \quad (74)$$

приводить (після ряду проміжних обчислень) до остаточного результату

$$P = \begin{cases} P_{\max}, & \text{если } \omega_z < 0; \\ P_{\min}, & \text{если } \omega_z \geq 0. \end{cases} \quad (75)$$

де  $\omega_z$  – швидкість тангажу.

Таким чином, для зменшення максимальної швидкості АКС при пікіруванні необхідно утримувати режим максимальної тяги до появи у АКС тенденції до збільшення кута тангажу (кута нахилу траєкторії).

Такий розв'язок спростовує традиційні уявлення про необхідність відсічки тяги у верхній точці гірки, тобто виконання маневру о  $P = P_{\min}$ . Результати моделювання руху АКС в обома способами керування зображені на мал. 3.

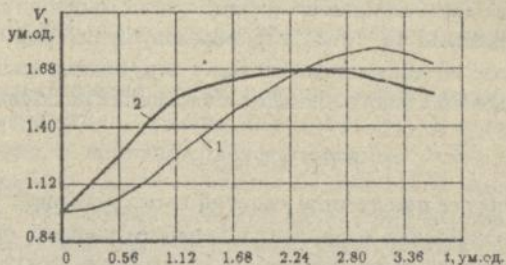
"Фізика" даного явища полягає в наступному: на початковому етапі пікірування при оптимальному керуванні швидкість збільшується інтенсивніше, але втрата кута нахилу траєкторії менше, тому на заключному етапі руху вплив ваги на роогін слабший, що й приводить до остаточного ефекту зменшення максимальної швидкості. Таким чином, замість використання для керування локальної умови

$$\frac{dV}{dt} \rightarrow \min, \quad (76)$$

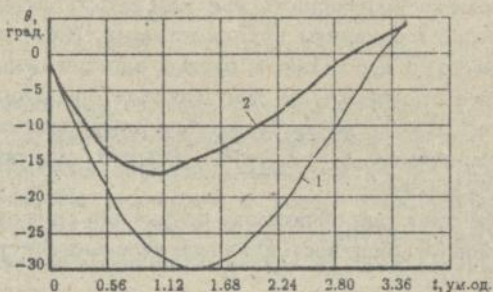
слід використовувати умову

$$\frac{dV}{d\theta} \rightarrow \min. \quad (77)$$

Цікаво відзначити, що умова  $\omega_z = 0$  означає баланс (рівність) сил, ортогональних до сили тяги.



а)



б)

1 -  $P = 0$ , 2 -  $P = P_{\text{opt}}$

Мал. 3

В додатку наведена програма виведення оптимальних замикючих співвідношень в системі аналітичних обчислень "REDUCE".

### ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Ефективний розв'язок сучасних задач керування рухомими об'єктами, зокрема літальними апаратами, зумовлисе подальший розвиток математичних методів аналізу їхніх моделей руху та тих задач, які формулюються в рамках цих моделей: задачі програмування траєкторій, представлення програм руху екіпажу, синтезу законів

оптимального та термінального керування.

1. У відповідності до прийнятої в дисертації концепції керування із зворотнім зв'язком ( $u = u(t, x)$ ), розглянута інтерпретація математичних моделей динамічних систем з керуванням вигляду  $\dot{x}^i = f^i(t, x, u)$  як недовизначеного рівняння в частинних похідних першого порядку

$$S_t + f^i(t, x, u)S_{x^i} = 0$$

і визначено поняття про точкові симетрії цього рівняння. Отримані рівняння для обчислення коефіцієнтів інфінітезимальних операторів симетрії та проаналізована можливість їх розв'язку, окрема, отримані аналітичні розв'язки системи  $\xi_u^i - f^i \tau_u = 0$ ;

2. Встановлена відповідність між властивістю керовності динамічної системи з керуванням та її симетріями. Показано, що властивість керовності з необхідністю овужує алгебри інваріантності, що допускаються: по-перше, не допускаються оператори симетрії вигляду  $X_1 = \eta(t, x)\partial_s$ , а, по-друге, алгебра інваріантності ( $L_2$ ) операторів симетрії вигляду  $X_2 = \tau(t, x)\partial_t + \xi^i(t, x)\partial_{x^i}$  має скінчену розмірність ( $\dim L_2 \leq n + 2$ );

3. Наведені приклади обчислення операторів симетрії, окрема обчислені алгебри інваріантності для класів керованих систем вигляду  $x^{(n)} = u$  та  $\dot{x}^i = f^i(u)$ ;

4. Введено поняття про визначальні параметри та істотні керуючі впливи математичних моделей керованих систем. Запропоновано критерій визначення істотності керуючих впливів. Показано, що для систем з векторними керуючими впливами, всі з яких – істотні, максимально широкою допускаємою групою є група перетворень еквівалентності;

5. Вивчені властивості проективної алгебри  $L_1$  та сформульована теорема про редукцію моделей з параметрами. В прикладному плані введена до найпростішого (мінімально – параметричного) вигляду математична модель доводовжнього руху літального апарату. Показано, що при розгляді власних рухів ЛА із 8 параметрів моделі ( $S, P, \rho, m, g, A, B, c_y$ ) можна утворити 2 визначальних: аеродинамічну якість ( $k$ ) та тягооборобність ( $p$ );

6. Розроблена методологія специфікації керуючих впливів як функцій від інваріантів груп симетрій, що допускаються рівняннями руху, та отриманні на цій основі (в разі достатньо широкої групи)

законів обереження. Як приклад отримана серія законів обереження при виконанні ізоенергетичних маневрів літака у вертикальній площині та, на підставі цього, рекомендована програма виконання "петлі Нестерова";

7. Сформульовано новий принцип керування із зворотнім зв'язком – рекурсивне керування, при якому керуючі впливи виробляються на основі як поточних значень координат, так і деякого програмного розв'язку задачі керування за скінчене (і наперед відоме) число кроків. Розроблено алгоритм визначення законів термінального керування, який реалізує принцип рекурсивного керування для систем з симетрією. Доведено теорему про представлення закону термінального керування, що отриманий із використанням симетрій, у вигляді одного функціонального співвідношення між "узагальнено – інваріантним керуванням" та "узагальнено – інваріантною координатою";

8. Розроблено представлення розв'язків задач оптимального керування у вигляді диференціального зворотнього зв'язку. Процедура виведення замикаючих диференціальних рівн. для керуючої змінної є регулярною та реалізована в системі аналітичних обчислень "REDUCE". Розв'язок задачі Коші для відповідного рівняння в частинних похідних дає можливість визначити закон керування (синтезуючу функцію) в неявному вигляді. Як приклад розв'язана модельна задача виведення ЛА на орбіту;

9. Отримані умови симетрії оптимальних процесів та на основі цих умов проведений порівняльний аналіз симетрій вихідної (незамкненої) системи та оптимальної (замкненої) системи. Зокрема, в'ясовано, що оптимальна система допускає проектну групу вихідної системи, що певним чином підтверджує гіпотезу А.О. Космодем'янського;

10. Розв'язана задача про оптимальне керування тягою авіаційно-космічної системи на етапі введення до горизонту. Отримані умови оптимального вимикання двигуна за умови мінімуму максимальної швидкості ( $\omega_z = 0$ ). При керуванні АКС згідно з запропонованим способом можливо зменшити максимальну швидкість на 10-15%.

## ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ У ТАКИХ ПРАЦЯХ

### Статті

1. Легенький В.И. Концепция одновременного разрыва связей в задачах отделения крупногабаритных грузов от сверхтяжелых самолетов. - В кн.: Научно - методические материалы по математическим моделям и алгоритмам ПНК. - Харьков: ХВВАИУ, 1985, с. 24 - 28.
2. Легенький В.И., Вовчок Ю.В. Особенности задания нелинейных дифференциальных программ движения. - В кн.: Материалы XXVII конференции ВНО, ч. III, Киев: КВВАИУ, 1986, с. 238 - 239.
3. Легенький В.И. Особенности приведения тяжелых самолетов в горизонтальный полет. - В кн.: Материалы XXVI конференции ВНО. - Киев: КВВАИУ, 1986, с. 26 - 27.
4. Легенький В.И., Алцибеев А.В. Координатные преобразования при решении задач оптимального маневрирования ЛА. - В сб.: Оборудование ЛА, вып. 2, Киев: КВВАИУ, 1987, с. 46 - 48.
5. Легенький В.И., Алцибеев А.В., Чумаченко С.Н. Качественный анализ нелинейных дифференциальных программ движения. - В сб.: Материалы XXVII военно - научной конференции училища, ч. III, Киев: КВВАИУ, 1987. - С. 74 - 77.
6. Легенький В.И., Попов В.Г., Сивов Н.С. Особенности алгоритмического обеспечения программирования оптимальных траекторий летательного аппарата // Научно - методические материалы по современным методам проектирования авиационных автоматических систем. - Иркутск: ИВВАИУ, 1989, с. 149 - 150.
7. Легенький В.И., Кирак С.А. К задаче оптимального управления с переменной областью управления. - В сб. Материалы XXIX военно - научной конференции училища. - Киев: КВВАИУ, 1989, с. 72 - 74.

8. Легенький В.И. Групповые методы в вариационных задачах динамики полета // Вопросы повышения эффективности и качества систем управления полетом и навигации ВС: сб. науч. трудов. - Киев: КИИГА, 1990, с. 83 - 87.
9. Легенький В.И. Синтез оптимального управления гладкими динамическими системами как задача группового анализа // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики: Сб. науч. тр. / АН УССР. Ин - т математики. - Киев, 1990, с. 40 - 43.
10. Легенький В.И. Теоретико-групповой подход в решении задач синтеза оптимального управления для динамических систем с дифференцируемой управляющей функцией // Математическое обеспечение задач управления и испытаний летательных аппаратов и их систем: научно-методические материалы / ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского. - М., 1990, с. 192 - 200.
11. Легенький В.И. Геометрические аспекты представления решений задач оптимального управления // Адаптивные системы автоматического управления: Респуб. межведомств. научно - технический сб., Вып. 19. / Киев: Техніка, 1991, с. 50 - 56.
12. Легенький В.И. Теоретико - групповой алгоритмы решения задач синтеза оптимального управления // Кибернетика и вычислительная техника: Респуб. межведомств. сборник научных трудов. Вып.91: Сложные системы управления / АН УССР. Ин - т кибернетики им. В.М.Глушкова. - Киев, 1991, с. 41 - 48.
13. Легенький В.И. Симметрии и проблема редукции в синтезе оптимальных систем // Кибернетика и вычислительная техника: Респуб. межведомств. сборник научных трудов. Вып. 95: Сложные системы управления / АН УССР. Ин - т кибернетики им. В.М.Глушкова. - Киев, 1992, с. 12 - 18.
14. Легенький В.И. Приложение групп Ли к решению задач программного управления полетом самолета // Автоматика. - 1992. - № 6. - С. 26 - 33.
15. Легенький В.И. Многопараметрические группы и редукция в синтезе оптимальных систем // Адаптивные системы автома-

- тического управления: Респуб. межведомств. научно - техниче-  
ский сб., Вып. 20 // Киев: Техніка, 1992, с.31 - 35.
16. Легенький В.И., Саранчук Ю.М. Использование системы анали-  
тических вычислений "REDUCE" при синтезе алгоритмов опти-  
мального управления // Оборудование летательных аппаратов:  
сборник статей ВНО, ч.3, - Киев: КВВАИУ, 1992, с.24 - 26.
  17. Легенький В.И. Приложение групп Ли к решению задач управле-  
ния летательными аппаратами // Современный групповой ана-  
лиз: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. - М., 1993, с. 69 - 74.
  18. Легенький В.И. О приведении математических моделей движения  
ЛА к простейшему виду // Моделирование процессов управления  
и обработки информации: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. М.,  
1994, с. 70 - 78.
  19. Легенький В.И. Точечные симметрии и управляемость динами-  
ческих систем с управлением // Доклады НАН Украины. - 1995.  
- N 3. - С. 15 - 17.
  20. Легенький В.И. О минимально - параметрической форме ура-  
внений движения летательных аппаратов // Прикл. механика. -  
1995. - N 10. - С. 81-87
  21. Легенький В.И. К вопросу о минимуме максимальной скорости  
пикирующего самолета // Проблемы управления и информатики.  
- 1995. - N 4. - С. 129 - 134.
  22. Lehen'kyj V. Point symmetries of controlled systems and their ap-  
plications // Proceedings of the International Conference "Symmetry  
in Nonlinear Mathematical Physics", J. Nonlin. Math. Phys., 1996,  
v3, N 3-4, p. 42-48.

#### Теорії доповідей

23. Легенький В.И. К вопросу об оптимальном программировании  
траекторий летательных аппаратов // Фундаментальные и при-  
кладные проблемы космонавтики: 3-и Королевские чтения 1-ой  
республиканской конференции, Киев 11 - 15 мая 1988 г.: Тео.  
докл. / АН УССР, КПИ, Киев, 1988. - С. 3 - 4.

24. Легенький В.И. К проблеме определения оптимального управления с обратной связью // Проектирование автоматизированных систем контроля и управления сложными объектами: 3-ья Всесоюзная школа – семинар, Туапсе, 2 – 6 октября 1988 г.: Теодокл. / Научный совет по проблеме "Кибернетика" АН СССР. ХИРЭ им. акад. М.К.Янгеля. Харьков, 1988. – С. 43.
25. Легенький В.И. Высокоточные адаптивные системы автоматического управления современных летательных аппаратов // Пути совершенствования пилотажно- навигационных комплексов и систем управления полетом: Республ. межведомственная конференция, Киев, 19 – 20 декабря 1989 г.: Теодокл. / Общество "Знание" Украины. Киев, 1989. – С. 4.
26. Легенький В.И., Сивов Н.С. Особенности управления динамическими объектами с переменной областью управления // Тр. 18-х гагаринских научных чтений по космонавтике и авиации (1988 г.) / Ин-т проблем механики АН СССР. – М.: Наука, 1989. – С: 219.
27. Легенький В.И. Симметрия в системах оптимального управления // Фундаментальные и прикладные проблемы космонавтики: 5-ые Королевские чтения 2-ой республиканской конференции, Киев, 30 мая – 1 июня 1990 г.: Теодокл. / АН УССР. КПИ. Киев, 1990. – С. 5.
28. Легенький В.И. Групповые методы в теории терминального управления // Использование численных методов при решении прикладных задач аэромеханики: Респуб. научно – техническая конференция, Харьков, 24 – 25 мая 1990 г.: Теодокл. / Украинское республиканское правление ВНТО Машпром, ХВВАИУ. – Харьков, 1990. – С. 12.
29. Легенький В.И. Групповая техника решения задач оптимального управления // Проектирование автоматизированных систем контроля и управления сложными объектами: 4 – ая Всесоюзная школа – семинар, Туапсе, 9 – 12 октября 1990 г.: Теодокл. / Научный совет по проблеме "Кибернетика" АН СССР. ХИРЭ им. акад. М.К.Янгеля. Харьков, 1990. – С. 23.

30. Легенький В.И. Особые оптимальные управления в задачах динамики полета // Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации: Международный семинар IFAC, Владивосток, 9 – 13 сентября 1991 г.: Тео. докл. / АН Беларуси. Институт математики. Минск, 1991, с. 73 – 75.
31. Легенький В.И. Динамическое программирование Р. Беллмана и теория групп С. Ли в синтезе оптимальных систем: связь и перспективы // Современный групповой анализ: Международный семинар, Уфа, 17 – 22 июня 1991 г.: Тео. докл. / БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1991. -- С. 26.
32. Легенький В.И. Теоретико-групповой подход к синтезу алгоритмов управления движением авиационно – космических систем // Проблемы управления и навигации авиационно – космических систем: Межведомственная научно – техническая конференция, Киев, 24 – 25 мая 1991 г.: Тео. докл. / КВВАИУ. Киев, 1991, с. 31 – 32.
33. Легенький В.И., Попов В.Г. Коррекция момента включения вспомогательной двигательной установки ЛА при решении терминальной задачи управления // Там же, с. 39 – 40.
34. Легенький В.И., Стогний В.И. Особые оптимальные управления в задачах динамики полета // Разрывные динамические системы: Республиканская школа – семинар, Ужгород, 17 – 19 сентября 1991 г.: Тео. докл. / Общество "Знание" Украины. Киев, 1991. – С. 30 – 32.
35. Легенький В.И. Условные симметрии управляемых систем и метод Гамильтона – Якоби – Ляпунова – Беллмана // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Международный семинар, Москва, 17 – 19 июня 1992 г.: Тео. докл. / РАН, Ин – т проблем управления, Москва, 1992, с. 69.
36. Легенький В.И. К вопросу о группах, допускаемых управляемыми системами // Методы оптимизации и их приложения: IX Сибирская школа – семинар, Иркутск, 11 – 17 августа 1992 г.: Тео. докл. // ИИЦ СО РАН, Иркутск, 1992, с. 55.

37. Легенький В.И. Групповой подход в проблеме синтеза оптимальных векторных законов управления // Современный групповой анализ. Методы и приложения: IX Коллоквиум, Нижний Новгород, 24 – 30 июня 1992 г.: Тео. докл. // Нижний Новгород: Научно – исследовательский радиофизический ин – т, 1992, с. 32.
38. Легенький В.И. Приложение групп Ли к решению задач управления летательными аппаратами // Современный групповой анализ и задачи математического моделирования: XI Российский коллоквиум, Самара, 7 – 11 июня 1993 г. Тео. докл. // Ред. Н.Х.Ибрагимов, Л.М.Беркович, В.Е.Воскресенский. – Самара: Иод – во Самарского ун – та, 1993, с. 85.
39. Легенький В.І. Симетрійні властивості керованих систем // Друга українська конференція з автоматичного керування "Автоматика-95", 26-30 вересня 1995 р., Праці, т.1, Львів, 1995. – С. 84 – 85.

---

Підписано до друку 14.05.1996. 2 друк. арк.

1,86 ум. друк. арк. Тир. 100 пр. Безкоштовно. Зам. 165

---

Друкарня КІ ВПС

447 866

Легенький В.И. Симметрия в задачах динамического управления  
его приложение к задачам динамики полета.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 20.02.12 – военная кибернетика, информатика, системный анализ, исследование операций и моделирование систем и боевых действий (ВВС), Киевский институт Военно-Воздушных Сил, Киев, 1996.

Защищается рукопись на основе 39 работ, которые содержат теоретические исследования по симметричному анализу управляемых систем и его приложениям к задачам динамики полета. Исследованы симметричные свойства математических моделей управляемых систем, функционирующих по принципу управления с обратной связью; разработаны алгоритмы вычисления симметрий, установлена связь между свойством симметрии и управляемостью. В прикладном плане осуществлена разработка алгоритмов приведения математических моделей летательных аппаратов к минимально – параметрическому виду, изучены проблемы "схематизации" полета, разработаны принципы рекурсивного управления в терминальных условиях, решена задача о минимуме максимальной скорости авиационно-космической системы на этапе приведения к горизонту.

Lehenkyi V.I. Symmetry analysis of controlled systems and its application in problems of flight dynamics.

Thesis for the Degree of Technical Sciences, Speciality 20.02.12 – Military Cybernetics, Informatics, System Analysis, Operational Investigations and Modelling of Fights (Air Force), Kiev Institute of Air Force, Kiev, 1996.

The defence is based on the 39 papers containing theoretical investigation on symmetry analysis of controlled systems and its applications to problem of flight dynamics. Symmetry properties of mathematical models of controlled systems with a feedback are studied. Symmetries are found, symmetries are developed, a connection between symmetry and controllability is established; applied algorithms are developed. Mathematical models to minimal – parametric form; problems of "structuralization" are studied, principles of recursive control in terminal conditions are developed. A problem of minimization of maximum velocity of space systems on the stage of approaching horizontal line is solved.

Ключові слова: симетрія, група Лі, алгебра Лі, динамічна система з керуванням, літальний апарат, динаміка польоту, термінальне керування, оптимальне керування.