НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БОГДАНСЬКИЙ Юрій Вікторович

ДЕЯКІ ПИТАННЯ
СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ

01.01.01 - Математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ-1996

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БОГДАНСЬКИЙ Юрій Вікторович

ДЕЯКІ ПИТАННЯ СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ

01.01.01 - Математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ-1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Національному технічному університеті України "Київський політехнічний інститут"

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Ейдельман С.Д., доктор фізико-математичних наук Кочубей А.Н., доктор фізико-математичних наук, професор Феллер М.Н.

Провідна установа: Національний Університет ім.Тараса Шевченка

Захист відбудеться "18" 06 1996 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ-4, МСП, вул.Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "16" 05 1996 року

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук Гусак Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертацію присвячено дослідженню різних задач для диференціальних рівнянь з суттєво нескінченновимірними операторами як у лінійному просторі, так і на найпростіших нелінійних многовидах.

У просторі функцій скінченновимірного аргументу лінійний однорідний еліптичний диференціальний вираз (далі: диференціальний оператор) другого порядку має вигляд:

$$(Lu)(x) = \mathrm{Sp}\, A(x) u''(x), \qquad (1)$$

де $A(x)$ - додатний лінійний оператор при кожному x. Ця формула вказує на один з можливих шляхів узагальнення поняття еліптичного диференціального оператора другого порядку на випадок функцій нескінченновимірного аргументу. При цьому узагальненні $A(x)$ - додатний ядерний лінійний оператор у гільбертовому просторі аргументу. Диференціальні рівняння з такими операторами вперше було розглянуто в роботах Ю.Л.Далецького.

З іншого боку, у випадку нескінченновимірного аргументу існує диференціальний оператор другого порядку, що не може бути вкладено в це узагальнення. Мова йде про оператор Лапласа-Леві (Л.-Л.), який у просторі ℓ_2 на функціях класу C^2 (за Фреше) визначено за формулою:

$$(Lu)(x) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x). \qquad (2)$$

Цей оператор був запропонований П.Леві у 1922 році в роботі, в якій ним було продовжено дослідження Р.Гато (1919 р.) гармонічних функцій на гільбертовому просторі. У роботах Р.Гато та П.Леві було знайдено розв'язок задачі Діріхле у гільбертовій кулі для відповідних рівнянь Лапласа (Р.Гато) та Пуассона (П.Леві).

У подальшому цей напрямок досліджень виявився майже забутим.

Відродження цього напрямку починається з середини 50-х років і пов'язане з ім'ям Ю.М.Поліщука. Ним отримано різноманітні результати, що стосуються теорії функціональних середніх та крайових задач для рівнянь з оператором Л.-Л. на інтегральних функціоналах. З 1965 року нескінченновимірні еліптичні рівняння з операторами Л.-Л. розглянуто в роботах М.Н.Феллера. Ним доведено єдиність розв'язку відповідної задачі Діріхле, досліджено різноманітні рівняння з оператором Л.-Л., побудовано у відповідних функціональних просторах диференціальні оператори будь-якого парного порядку, що породжені диференціальним виразом Л.-Л. У 1967-1974 рр. з'являється цикл публікацій Г.Є.Шилова, у яких оператор Л.-Л. було розглянуто з точки зору теорії комутативних нормованих кілець. Дослідження Г.Є.Шилова були продовжені у роботах А.С.Немировського, І.Я.Дорфман, В.Я.Сикирявого. Ними було запропоновано дещо інші варіанти означення оператора Лапласа, близького за характером та своїм властивостям до оператора Л.-Л. та досліджено різноманітні задачі для рівнянь з цими операторами. Оператор Л.-Л. та його модифікації досліджувались в роботах В.В.Калініна, В.Б.Соколовського, В.А.Народицького.

Ймовірнісні аспекти оператора Л.-Л. розглянуто в роботах Y.Hasegawa, H.H.Kuo, K.Saito, T.Hida, N.Obata.

До рівнянь з оператором Л.-Л. приводять деякі задачі теорії надпровідності (Н.Н.Боголюбов, R.Haag, W.Thirring, A.Wehrl) та теорії керованих систем (Ю.М.Поліщук). Новий сплеск інтересу до оператора Л.-Л. пов'язаний з роботою L.Accardi, R.Gibilisco, I.V.Volovich (1993 р.), у якій було помічено зв'язок між гармонічними за Леві функціями з розв'язками рівняння Янга-Міллса. Ця робота інспірувала серію нещодавніх публікацій Л.Аккарді та О.Г.Смолянова.

У роботі 1977 року автором дисертації було запропоновано клас диференціальних операторів другого порядку, що узагальнюють оператор (2) та успадковують усі основні властивості останнього.

Відповідний диференціальний вираз другого порядку ("еліптичний суттєво нескінченновимірний оператор") було визначено за формулою

$$(Lu)(x) = \frac{1}{2} j\,(u''(x)), \qquad (3)$$

де j - фіксований (або залежний від x - випадок змінних коефіцієнтів) лінійний невід'ємний функціонал на банаховому просторі $B_c(H)$ самоспряжених обмежених операторів в зчисленновимірному дійсному гільбертовому просторі H. При цьому припущено, що усі оператори з $B_c(H)$ скінченного рангу (а тому і усі компактні) належать до його ядра.

До числа таких операторів належить і оператор Л.-Л. Оператор (3) успадковує усі основні властивості оператора Л.-Л. (лейбніцівська властивість: $L(uv) = Lu\cdot v + u\cdot Lv$; $L(\varphi\circ u) = (\varphi'\circ u)\cdot Lu$; $Lu = 0$ для будь-якої циліндричної функції u класу C^2) і це в значній мірі визначає специфічні властивості рівнянь з такими операторами.

Тому дослідження диференціальних рівнянь з суттєво нескінченновимірними операторами є актуальним як з точки зору загальної теорії нескінченновимірного аналізу, так і зважаючи на можливі застосування в теорії випадкових процесів, в теорії надпровідності, при дослідженні рівняння Янга-Міллса.

Мета роботи - дослідження ефектів, що виникають у задачах для диференціальних рівнянь з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами та побудова суттєво нескінченновимірного поверхневого середнього (природного аналога класичного поверхневого інтеграла).

Наукова новизна. Всі результати, що викладені в дисертації, є новими. В ній зокрема:

- встановлено достатні умови коректності задач Коші для рівняння теплопровідності з нерегулярним еліптичним оператором та для суттєво нескінченновимірного параболічного рівняння із збуренням оператором першого порядку;

- знайдено нові достатні умови побудови півгрупи за формулою Чернова;

- запроваджено суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор на поверхні скінченної корозмірності у гільбертовому просторі та досліджено коректність задачі Коші для відповідного рівняння теплопровідності;

- знайдено розв'язок першої крайової задачі для суттєво нескінченновимірних рівнянь Лапласа та Пуассона у строго опуклих областях гільбертова простору;

- побудовано суттєво нескінченновимірні поверхневі середні для функцій на строго опуклих поверхнях гільбертова простору та отримано відповідні аналоги класичних формул Гріна;

- досліджено другу крайову задачу для суттєво нескінченновимірного рівняння Лапласа у строго опуклих областях гільбертова простору.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії еволюційних рівнянь, зокрема півгруп операторів, диференціальної геометрії, опуклого аналізу та суттєво нескінченновимірного аналізу.

Теоретична та практична цінність. В дисертації досліджено нові ефекти, що пов'язані з суттєво нескінченновимірними диференціальними рівняннями. Розроблено нові методи, що дають можливість розв'язувати суттєво нескінченновимірні диференціальні рівняння як у лінійному просторі, так і на нелінійних поверхнях. Отримано суттєво нескінченновимірний аналог класичного поверхневого інтеграла. Результати дисертації можуть бути використані при дослідженні важливих проблем фізики.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались: на 11-тій школі з теорії операторів у функціональних просторах (м.Челябінськ, 1986 р.), на Кримській математичній школі-симпозіумі з спектральних та еволюційних задач (I - 1990 р., III - 1992 р., Y - 1994 р., YI - 1995 р.), на Київському семінарі з функціонального аналізу (Інститут математики НАН України, керівники: академік НАН України Ю.М.Березанський, проф. М.Л.Горбачук), на семінарі з теорії випадкових процесів та розподілів у функціональних просторах Інституту математики НАН України (керівник - академік НАН України Ю.Л.Далецький), на семінарі "Числення Маллявена та його застосування" Інституту математики НАН України (керівник - д.ф.-м.н. А.А.Дороговцев), на семінарі "Алгебраїчні структури в математичній фізиці" Національного технічного університету України "КПІ" (керівник - академік НАН України Ю.Л.Далецький).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1-14].

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, трьох глав та списку літератури, що містить 154 найменування. Повний об'єм роботи - 267 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми, дано короткий огляд результатів, що мають безпосереднє відношення до теми роботи, викладено зміст дисертації.

Перша глава присвячена дослідженню задачі Коші для параболічних рівнянь з суттєво нескінченновимірними і нерегулярними еліптичними операторами для функцій на гільбертовому просторі.

У § 1.1 досліджено додатні лінійні функціонали на банаховому просторі $B_c(H)$ самоспряжених обмежених операторів, що діють на вихідному сепарабельному нескінченновимірному дійсному гільбертовому просторі H .

Означення 1.1.1. Лінійний обмежений функціонал $j : B_c(H) \to \mathbb{R}$ назвемо суттєво нескінченновимірним, якщо усі скінченновимірні оператори з $B_c(H)$ належать до його ядра.

Конус додатних суттєво нескінченновимірних лінійних функціоналів позначено через $J_{c.н.} = J_{c.н.}(H)$; конус усіх додатних лінійних функціоналів на $B_c(H)$ позначено через $J = J(H)$.

Для будь-якої послідовності додатних ядерних операторів, що задовольняють умови $Sp\, A_n = const\, ;\, \|A_n\| \to 0$ функціонал $C \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} Sp\, A_n C$ (його область визначення $\neq B_c(H)$) після продовження за теоремою М.Г.Крейна на увесь $B_c(H)$ являє собою приклад функціоналу з $J_{c.н.}$. При $A_n = \frac{1}{n} P_n$ (P_n - ортопроектори, $P_n \uparrow$, $rank\, P_n = n$) маємо традиційний функціонал "Лапласа-Леві".

Твердження 1.1.2. Будь-який $j \in J$ можна представити у вигляді: $j = j_1 + j_2$, де $j_1(\cdot) = \mathrm{Sp}A(\cdot)$ $(A \geq 0,$ ядерний), а $j_2 \in J_{c.н.}$. Цей розклад єдиний.

У подальшому важливу роль відіграють спеціальні класи множин у просторах операторів.

Означення 1.1.3. Множину $\mathfrak{N} \subset \{H_1 \to H_2\}$ будемо називати *майже компактною,* якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ компактна множина $\mathcal{K} \subset \{H_1 \to H_2\}$ та числа $n \in \mathbb{N}$, $c \in (0, \infty)$ такі, що $\mathcal{K} + Q_{n,c}$ - ε-сітка для $\mathfrak{N}$ (тут $Q_{n,c} = Q_{n,c}(H_1, H_2)$ - множина усіх скінченновимірних операторів з $\{H_1 \to H_2\}$, ранг яких не перевищує n а норма не перевищує c).

Сукупність майже компактних підмножин в $\{H_1 \to H_2\}$ будемо позначати через $\mathfrak{M}(H_1, H_2)$; $\mathfrak{M}(H) = \mathfrak{M}(H, H)$. Майже компактні підмножини успадковують серію традиційних властивостей компактних підмножин.

Основний результат § 1.1 - теорема про представлення суттєво нескінченновимірних додатних функціоналів.

Теорема 1.1.6. Нехай $j \in J_{c.н.}(H)$. Тоді для будь-якої сепарабельної підмножини $X \subset B_c(H)$ існує послідовність додатних скінченновимірних операторів $\{A_m\}$ така, що $\|A_m\| \to 0$; $\mathrm{Sp}A_m = \|j\|$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ та $j(C) = \lim\limits_{m \to \infty} \mathrm{Sp}A_m C$ для $\forall C \in X$ причому збіжність $\mathrm{Sp}A_m(\cdot) \to j(\cdot)$ рівномірна на будь-якій майже компактній підмножині $\mathfrak{N} \subset X$.

У § 1.2 отримано достатні умови розв'язності рівняння теплопровідності з нерегулярним еліптичним оператором.

У відповідності до роботи [Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Труды ММО, 1972. - т.27, с.247-262] під нерегулярним еліптичним диференціальним оператором другого порядку розуміємо оператор, що визначений за формулою (3), де $j \in J$, але не може бути зведеним до вигляду (1).

У відповідності до твердження 1.1.2 нерегулярний еліптичний оператор (3) допускає (єдине) представлення у вигляді

$$(L u)(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A u''(x) + \frac{1}{2} \omega(u''(x)), \tag{4}$$

де $\omega \in J_{c.н.}$.

Через $\mathfrak{A}$ позначимо множину функцій класу $C^2(H)$, що задовольняють умови:

1) для $\forall u \in \mathfrak{A}, \forall R > 0 \; \exists \mathfrak{N}_{R,u} \in \mathfrak{M}(H)$ така, що $u''(x) \in \mathfrak{N}_{R,u}$ для $\forall x \in B_R = \{x \mid \|x\| \leqslant R\}$;

2) $u''(\cdot)$ рівномірно неперервна на обмежених множинах в H.

Цей клас функцій - підалгебра в $C^2(H)$.

Прикладами функцій алгебри $\mathfrak{A}$ є функції виду:

$u(x) = f((B_1 x, x), \ldots, (B_m x, x); Tx)$, де $B_1, \ldots, B_m \in B_c(H)$; T - компактний лінійний оператор в H ; $f \in C^2(\mathbb{R}^m \dotplus H)$ та $f''(\cdot)$ - рівномірно неперервна на обмежених множинах в $\mathbb{R}^m \dotplus H$ (твердження 1.2.3).

Розглянуто задачу Коші для рівняння теплопровідності з оператором (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2} j(u''_x(x,t)) = L_x u(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,0) = \lim_{t \to 0+} u(x,t) = \varphi(x). \tag{6}$$

Теорема 1.2.5. Нехай $T \in (0, \infty)$; $\varphi \in \mathfrak{A}$ та існують такі сталі $C > 0$; $a \in [0, \frac{1}{2T\|A\|})$, що $\|\varphi''(x)\| \leqslant C \exp(a\|x\|^2)$ для $\forall x \in H$. Тоді задача Коші (5)-(6) має на інтервалі $(0, T)$ розв'язок, що може бути поданим у вигляді:

$$\overset{\circ}{u}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \int_H \varphi(x-y)\mu_{t(A+A_n)}(dy),$$

де $A_n = A_n(\varphi; x)$ - така послідовність додатних скінченновимірних операторів (що залежить від φ та x), що $\|A_n\| \to 0$ та $Sp\, A_n = \|\omega\|$ для $\forall n \in \mathbb{N}$; $\mu_A(dx)$ - гауссова міра в H з корреляційним оператором A.

Нехай $\Omega = \Omega_T$ - клас функцій, що визначені та неперервні в $\bar{Z} = H \times [0,T)$ (тут $T \in (0,+\infty)$), двічі неперервно диференційовні за x, неперервно диференційовні за t у $Z = H \times (0,T)$ та підлягають таким умовам: а) $\forall u \in \Omega\ \exists C>0$, $a \in [0, \frac{1}{2T\|A\|})$ такі, що нерівність $|u(x,t)| \leq C\exp(a\|x\|^2)$ виконується при $\forall (x,t) \in \bar{Z}$; б) $\forall u \in \Omega, \forall R>0$ існує таке $\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}(H)$, що $u''_x(x,t) \in \mathfrak{N}$ при $\forall (x,t) \in B_R \times [0,T)$.

Теорема 1.2.19. Задача (5)-(6) має у класі Ω не більш, як один розв'язок.

Розв'язок задачі Коші, що отримано в теоремі 1.2.5, належить до класу Ω. Крім того, рівномірна збіжність на H початкових умов $\varphi_n \to \varphi$ спричиняє рівномірну збіжність на $H \times [0,T)$ їх розв'язків. У цьому розумінні можна казати про коректність задачі (5)-(6) у класі функцій Ω.

У § 1.3 результати, що отримані вище, застосовуються для випадку суттєво нескінченновимірного рівняння ($j \in J_{с.н.}$).

Через $\mathfrak{A}_0$ позначено підалгебру фінітних функцій в $\mathfrak{A}$; через X - її замикання за нормою рівномірної збіжності.

Твердження 1.3.3. Нехай диференціальний вираз L визначено за формулою (3); $j \in J_{с.н.}$. Тоді $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_0 : L\varphi \in X$ і тому визначено *лінійний* оператор $L : \mathfrak{A}_0 \to X$. Оператор L допускає замикання та $\bar{L}$ є генератором (C_0)-півгрупи стисків

$T^{j}(t)$ на X (тут для $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ та $\forall t \in [0,+\infty)$: $T^{j}(t)\varphi \in \mathfrak{A}_0$; $(T^{j}(t)\varphi)(x) = u(x,t)$ - розв'язок задачі (5)-(6)).

Для випадку нерегулярного оператора (4) помічено таку властивість розв'язку задачі (5)-(6): якщо $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \mid \|x-x_0\| \le r\}$, то для $t \ge t_0 = \frac{r^2}{\|\omega\|}$ розв'язок $u(x,t) = 0$ для $\forall x \in H$.

Півгрупа $T^{j}(t)$ при $j \in J_{c.н.}$ мультиплікативна:

$T^{j}(t)(uv) = T^{j}(t)u \cdot T^{j}(t)v$ $(\forall u,v \in X;\ t \ge 0)$.

У § 1.4 отримано допоміжний результат - достатню умову існування півгрупи.

Теорема 1.4.1. Нехай $B(t)$ $(t \in [0,t_0) \subset [0,+\infty))$ - однопараметрична сім'я обмежених лінійних операторів у банаховому просторі X; $\|B(t)\| \le 1$; $B(0) = I$. Нехай $\mathcal{D}$ - щільний в X лінійний многовид, на якому визначено лінійний оператор $A : \mathcal{D} \to X$ та невід'ємна функція $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Нехай виконуються такі умови

1) $B(t)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ для $\forall t \in [0,t_0)$;

2) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta > 1$ такі, що нерівність $\|B(t)B(s)x - B(t+s)x\| \le t^{\alpha}s^{\beta}h(x)$ має місце для всіх $x \in \mathcal{D}$; $t, s, t+s \in [0,t_0)$;

3) $\exists a > 0$ таке, що нерівність $h(B(t)x) \le e^{at}h(x)$ виконується для $\forall x \in \mathcal{D}$ та $\forall t \in [0,t_0)$;

4) для $\forall x \in \mathcal{D}$; $\forall t \in [0,t_0)$ має місце нерівність: $\|B(t)x - x\| \le t\,h(x)$;

5) $\exists$ функція $q : [0,t_0) \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ така, що $\forall t \in [0,t_0)$ та $\forall x \in \mathcal{D}$ виконуються умови:

$$\left\| \frac{1}{t}(B(t)x - x) - Ax \right\| \le q(t,x);$$

для $\forall x \in \mathcal{D}$: $q(t,x) \to 0$ при $t \to 0+$;

для $\forall x \in \mathcal{D}$; $t \in [0,t_0)$:

$$q\left(\frac{t}{n}, \left(B\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n} x\right) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad (7)$$

Тоді для $\forall t \in [0,+\infty)$ існує $V(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} B(\frac{t}{n})^n$; $V(t)$ - (C_0)-півгрупа стисків в X та $V'(0) = \bar{A}$.

У тому випадку, якщо умову (7) не вдається задовольнити, теорема залишається справедливою в ослабленій формі: півгрупа $V(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} B(\frac{t}{2^n})^{2^n}$ існує та A є обмеженням її генератора $V'(0)$ на лінійний многовид $\mathcal{D}$.

Теорема 1.4.1 у повному варіанті застосовується далі при доведенні теореми 2.3.7, а в ослабленій формі при доведенні теореми 1.5.4.

У § 1.5 розглянуто суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори із змінними коефіцієнтами:

$$(\mathcal{L}u)(x) = \frac{1}{2} j(x)(u''(x)). \tag{8}$$

Доведено, що при відносно слабких обмеженнях на відображення j диференціальний вираз (8) визначає диференціальний оператор у просторі $\overline{\mathfrak{A}_0} = X$.

Твердження 1.5.1. Нехай $j : H \to J_{c.н.}$ таке, що $j(\cdot)(B) \in X$ для $\forall B \in B_c(H)$. Тоді $\mathcal{L}\varphi \in X$ для $\forall \varphi \in \mathfrak{A}_0$.

Для відображень j спеціального вигляду:

$$j(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x) j_k \tag{9}$$

($j_k \in J_{c.н.}, \alpha_k \in \mathfrak{A}_0, \alpha_k \geq 0, k = 1,\ldots,m$) отримано такий результат.

Теорема 1.5.4. Нехай $j : H \to J_{c.н.}$ визначене за формулою (9). Тоді в X існує (C_0)-півгрупа стисків $V(t)$, для якої $V'(0)\big|_{\mathfrak{A}_0} = \mathcal{L}$.

Детальніше розглянуто випадок відображення $x \mapsto \alpha(x) j$ ($j \in J_{c.н.}$).

З цією метою доведено аналог формули М.Каца.

Нехай $\mathfrak{A}' = \{ f \in \mathfrak{A} \mid \sup\limits_{H} |f(\cdot)| < \infty \}$; $\mathfrak{X}$ - замикання $\mathfrak{A}'$ за нормою рівномірної збіжності. Тоді $\mathfrak{X}$ -алгебра, а X - $\mathfrak{X}$ - модуль.

Нехай $U(t) = U^j(t)$ - півгрупа в $\mathfrak{X}$, що пов'язана з задачею (5)-(6).

Твердження 1.5.13. Нехай $j \in J_{c.н.}$; $\mathcal{L} = \mathcal{L}^j : \mathfrak{A}_0 \to X$ визначене за формулою (3); $T(t) = T^j(t)$ - відповідна півгрупа в X; $g \in \mathfrak{X}$; $\inf\limits_{H} g(\cdot) > 0$. Тоді на X визначено обмежений оператор $(g(\cdot) - \overline{\mathcal{L}})^{-1}$, причому для $f \in X$ маємо:

$$[(g(\cdot) - \overline{\mathcal{L}})^{-1} f](x) = \int\limits_0^\infty exp\left[-\int\limits_0^t [U(s)g](x) ds\right] [T(t)f](x) dt. \qquad (10)$$

Наступне твердження є наслідком формули (10).

Твердження 1.5.15. Нехай $\alpha \in \mathfrak{X}$; $\inf\limits_{H} \alpha(\cdot) > 0$; $j \in J_{c.н.}$. Тоді $\alpha(\cdot) \overline{\mathcal{L}^j}$ - генератор (C_0) -півгрупи стисків $V(s) : X \to X$, що визначена за формулою $(V(s)u)(x) = [T^j(t(s;x))u](x)$, де для $\forall x \in H$ $t(\cdot\,; x)$ є оберненою функцією до функції

$$s(t; x) = \int\limits_0^t [U(\tau)(\tfrac{1}{\alpha})](x) d\tau.$$

У другій главі досліджується задача Коші для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\mathcal{L}_S)_x u \qquad (11)$$

на поверхні скінченної корозмірності у гільбертовому просторі H.

При цьому поверхню S (її далі називаємо *припустимою*) визначено як поверхню спільного рівня скінченного набору функцій g_k $(k = 1, 2, \dots, m)$: $S = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \{x \mid g_k(x) = 1\}$. Умови: $g_k \in C_p^2(H)$,

$\overset{\circ}{g}_K$ - фінітні та $\inf\limits_{x\in S} \Gamma(x) = \inf\limits_{x\in S} \Gamma(g_1'(x),\dots,g_m'(x)) > 0$ (Γ - визначник Грама) забезпечують її гладкість та обмеженість (тут і в подальшому символом $C_\rho^K(G)$ позначено клас функцій з $C^K(G)$, для яких $u^{(K)}(\cdot)$ рівномірно неперервна на G).

Вкладення $S \subsetneq H$ дозволяє ототожнити дотичний простір $T_x S$ з підпростором в H ; самоспряженому обмеженому оператору A в $T_x S$ можна поставити у відповідність оператор $A \oplus 0 \in B_c(H)$, що узгоджено з розкладом $H = T_x S \oplus (T_x S)^\perp$. Це дозволяє для $u \in C^2(S)$ інтерпретувати $(\nabla^2 u)(x)$ як оператор в H (∇ - індукована вкладенням зв'язність Леві-Чивіти на S).

Означення 2.1.11. Домовимось, що $u \in \mathfrak{A}(S)$, якщо $u \in C_\rho^2(S)$ ($\nabla^2 u(\cdot)$ - рівномірно неперервне на S) та існує $\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}(H)$, для якої $(\nabla^2 u)(x) \in \mathfrak{N}$ для усіх $x \in S$.

$\mathfrak{A}(S)$ - підалгебра в $C_\rho^2(S)$; її замикання за нормою рівномірної збіжності позначимо через $X(S)$.

У § 2.1 розглянуто зв'язок між алгебрами $\mathfrak{A}_0$ та $\mathfrak{A}(S)$ (відповідно X та $X(S)$).

Твердження 2.1.11. Нехай S - припустима поверхня в H та функції $g_K \in \mathfrak{A}_0$ ($K = 1, 2, \dots, m$) . Тоді

$$(u \in \mathfrak{A}_0) \Rightarrow (u|_S \in \mathfrak{A}(S));$$

$$(u \in X) \Rightarrow (u|_S \in X(S)).$$

Означення 2.1.12. Припустиму поверхню будемо називати поверхнею класу $\mathfrak{A}_1$, якщо $g_K \in \mathfrak{A}_0 \cap C_\rho^3(H)$ та існує $\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}(H)$ така, що $(g_K'(\cdot), \xi)''(y) \in \mathfrak{N}$ при $\forall y \in S; \forall \xi \in B_1$, $K = 1, 2, \dots, m$ ($B_1 = \{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$).

Теорема 2.1.12. Якщо S - поверхня класу $\mathfrak{A}_1$, то для будь-якої функції $u \in \mathfrak{A}(S)$ існує функція $v \in \mathfrak{A}_0$, для якої $u = v|_S$ (при цьому для $u \in X(S)$ існує продовження з простору X).

Процедура продовження визначає лінійний неперервний оператор $i : X(S) \to X$, що пов'язаний з оператором обмеження $p : X \ni v \mapsto v|_S \in X(S)$ співвідношенням: $p \circ i = id$.

У § 2.2 розглянуто загальні властивості суттєво нескінченновимірних еліптичних операторів на припустимих поверхнях.

Ці оператори визначено за формулою:

$$(L_S u)(x) = (L_S^j u)(x) = \frac{1}{2} j(\nabla^2 u(x)) \tag{12}$$

у якій $j \in J_{\text{с.н.}}$, а $(\nabla^2 u)(x)$ інтерпретуємо як оператор в H.

Твердження 2.2.1. Нехай S - припустима поверхня в H; $u \in C_p^2(S)$ та $v \in C_p^2(S_\varepsilon)$ - продовження u у ε-окіл S_ε поверхні S. Тоді для $x \in S$ має місце рівність:

$$(L_S u)(x) = (Lv)(x) + (Yv)(x),$$

де векторне поле Y (воно визначене в S_ε при достатньо малому $\varepsilon > 0$) має вигляд:

$$Y(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \left| \begin{array}{c|c} \widetilde{\Gamma}(x) & \begin{matrix} g_1'(x) \\ \vdots \\ g_m'(x) \end{matrix} \\ \hline Lg_1(x) \dots Lg_m(x) & 0 \end{array} \right| \tag{13}$$

(тут $\widetilde{\Gamma}(x)$ - відповідна матриця Грама).

Лема 2.2.3 (принцип максимуму). Нехай S - припустима поверхня в H класу $C^3(g_k \in C_p^3(H))$; W - відкрита множина в S (у топології, що індукована вкладенням $S \hookrightarrow H$); $u \in C_p^2(S)$; $(L_S u)(x) > \gamma > 0$ на W. Тоді $\sup\limits_W u = \sup\limits_{\partial W} u$.

Оператор $\mathcal{L}_S : C^2_\rho(S) \to C_\rho(S)$, що визначений за формулою (12), допускає замикання та задовольняє умову дисипативності.

Твердження 2.2.4. Нехай S - припустима поверхня класу C^3; $u_n \in C^2_\rho(S)\,(n \in \mathbb{N})$; $u_n \to 0$; $\mathcal{L}_S u_n \to v$ рівномірно на S. Тоді $v \equiv 0$.

Лема 2.2.5. Нехай S - припустима поверхня класу C^3. Тоді для будь-якої $u \in C^2_\rho(S)$ маємо: $\|u - \mathcal{L}_S u\| \geq \|u\|$, де $\|u\| = \sup\limits_S |u(\cdot)|$.

У § 2.3 досліджено задачу Коші для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\mathcal{L} + \mathcal{Z})_x u(x,t) \tag{14}$$

у гільбертовому просторі H.

Тут $\mathcal{Z}$ - векторне поле на H, на яке накладено такі умови (у подальшому такі векторні поля відносимо до класу $\mathfrak{A}_0$):

а) $\mathcal{Z}$ - фінітне векторне поле класу $C^2_\rho(H)$;

б) $\{\mathcal{Z}'(x) \mid x \in H\} \in \mathfrak{M}(H)$;

в) $\{(\xi, \mathcal{Z}''(x)) = (\xi, \mathcal{Z})''(x) \mid \|\xi\| \leq 1; x \in H\} = \mathfrak{N}_{\mathcal{Z}} \in \mathfrak{M}(H)$.

Теорема 2.3.7. Нехай $\mathcal{L}$ - диференціальний вираз, що визначено за формулою (3) $(j \in J_{c.н.})$; $\mathcal{Z}$ - векторне поле класу $\mathfrak{A}_0$. Тоді коректно визначено лінійний оператор $\mathcal{L} + \mathcal{Z} : \mathfrak{A}_0 \to X$, він допускає замикання і його замикання є генератором (C_0)-півгрупи стисків у просторі X.

Задачу Коші для рівняння (11) досліджено в § 2.4. Це дослідження потребує більш жорстких умов на поверхню S.

Означення 2 (п.2.4.1). Будемо називати $u : G \to \mathbb{R}$ (G - відкрита множина в H) функцією класу $\mathfrak{A}_1(G)$, якщо $u \in C^3_\rho(G)$; $\{u''(x) \mid x \in G\} \in \mathfrak{M}(H)$ та $\{(u'(\cdot), h)''(x) \mid \|h\| \leq 1;\ x \in G\} \in \mathfrak{M}(H)$.

Означення 3 (п.2.4.1). Припустиму поверхню S домовимось називати поверхнею класу $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$, якщо існує окіл S_ε поверхні S, у якому $g_k \in \mathfrak{A}_1(S_\varepsilon)$; $\mathcal{L} g_k \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$ $(k=1,2,\dots,m)$.

Для поверхні класу $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$ векторне поле Y, що визначене в околі S_ε поверхні S за формулою (13), може бути продовжене до векторного поля $\mathcal{Z}$ класу $\mathfrak{A}_0$, що визначене на всьому H. Це дозволяє пов'язати з задачею Коші для рівняння (11) на поверхні S задачу Коші для рівняння (14) в усьому просторі H. Через $V(t)$ позначимо відповідну півгрупу з генератором $\overline{\mathcal{L}+\mathcal{Z}}$. Тоді у просторі $X(S)$ визначено однопараметричну сім'ю операторів $W(t) = p \circ V(t) \circ i$, де $i: X(S) \to X$, $p: X \to X(S)$ - визначені вище оператори продовження та обмеження.

Теорема 2.4.3. Нехай S - поверхня класу $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$ в H; $j \in J_{c.н.}$ Тоді оператор $\mathcal{L}_S : \mathfrak{A}(S) \to X(S)$ коректно визначено за формулою (12), а однопараметрична сім'я операторів $W(t) = p \circ V(t) \circ i$ є мультиплікативною (C_0)- півгрупою в $X(S)$ з генератором $\overline{\mathcal{L}_S}$.

У § 2.5 розглянуто деякі приклади поверхонь класу $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$.

Твердження 2.5.2. Нехай $B_1, \dots, B_s$ - обмежені невід'ємні самоспряжені оператори в H; $B_1 \geqslant \alpha I > 0$;

$$g(x) = b(B_1 x, x)^k + \sum_{1 \le k_1 + \dots + k_s \le m} a_{k_1 \dots k_s} (B_1 x, x)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (B_s x, x)^{k_s} \tag{15}$$

(тут $b > 0$; $k, m \in \mathbb{N}$; $a_{k_1 \dots k_s} \geqslant 0$).

Тоді поверхня $S = \{x \mid g(x) = 1\}$ належить до класу $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$.

Твердження 2.5.3. Нехай $B, C \in B_c(H)$; $B \geqslant \alpha I > 0$ та існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$\begin{cases} \sigma(B-C) \cap (-\infty, -\varepsilon) \neq \varnothing \\ \sigma(B-C) \cap (\varepsilon, +\infty) \neq \varnothing \\ \sigma(B-C) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \varnothing . \end{cases}$$

Тоді поверхня $S=\{x \mid (Bx,x)=(Cx,x)=1\}$ належить до класу $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$.

Для сфери $\{x \mid \|x\|=R\}$ отримано формулу:

$$(W(t)\varphi)(x)=\left[T\left(\frac{R^2}{\|j\|}\left(1-e^{-\frac{t\|j\|}{R^2}}\right)\right)\tilde{\varphi}\right]\left(e^{-\frac{t\|j\|}{R^2}}x\right),$$

де $\varphi\in X(S)$; $\tilde{\varphi}\in X$ - продовження функції φ на весь простір H; $T(t)$ - півгрупа в X з генератором L^{j}.

У третій главі досліджено крайові задачі, що пов'язані з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами.

Задачу Діріхле для рівнянь Лапласа та Пуассона у гільбертовій кулі було розглянуто вперше ще в роботах Р.Гато та П.Леві. Детальніше цю задачу для оператора Лапласа-Леві та його модифікацій було розглянуто в роботах Ю.М.Поліщука, М.Н.Феллера, Г.Є.Шилова, І.Я.Дорфман, В.Я.Сикирявого.

У цих роботах було отримано теорему единості для задачі Діріхле у широкому класі областей та формули для розв'язків цих задач. При цьому розв'язки було отримано тільки для областей вигляду: $G=\{x \mid g(x)<c\}$, де $Lg(x)\equiv 1$ в H ("фундаментальні області").

У дослідженні, що пропонується, цю умову на область послаблено і розв'язки задачі Діріхле для рівнянь Лапласа та Пуассона отримано при умові "L-опуклості" області G (див.далі). Такими областями є, наприклад, строго опуклі обмежені області G в H з відповідними умовами гладкості ∂G.

Щодо другої крайової задачі для оператора типу Лапласа-Леві, то її було досліджено В.Б.Соколовським у гільбертовій кулі. Проте сам метод і формула для розв'язку задачі Неймана для рівняння Лапласа у кулі не допускає узагальнення на області, що обмежені еліпсоїдом (на відміну від відповідної задачі Діріхле, де таке узагальнення відоме) - див.твердження 3.6.8.

У дисертації досліджено другу крайову задачу для рівняння Лапласа у строго опуклих обмежених областях гільбертова простору H.

У скінченновимірному класичному випадку дослідження відповідної задачі Неймана в області $G \subset \mathbb{R}^m$ щільно пов'язане з поверхневим інтегралом по межі ∂G. Аналогічна ситуація має місце і у суттєво нескінченновимірному випадку: побудовано аналог поверхневого інтеграла - поверхневе середнє $I_{\partial G}$ на межі строго опуклої обмеженої області в H.

Проте з'ясовується, що на відміну від класичної скінченновимірної ситуації умова $I_{\partial G} \varphi = 0$ не є критерієм розв'язності відповідної задачі Неймана для рівняння Лапласа з крайовою умовою φ. Ця умова - необхідна, але не достатня - відповідний приклад наведено у п.3.6.4.

У § 3.1-3.2 досліджено задачу Діріхле.

Означення 3.1.1. Будемо казати, що поверхня S належить до класу $\mathfrak{A}$, якщо $S = \{x \mid g(x) = 1\}$, де $g \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$ (тобто $g \in C_p^2(S_\varepsilon)$; $\{g''(x) \mid x \in S_\varepsilon\} \in \mathfrak{M}(H)$) і при цьому $\inf\limits_{x \in S} \|g'(x)\| > 0$.

Означення 3.1.2. Нехай $\mathcal{L}$ визначено за формулою (3) ($0 \neq j \in J_{c.н.}$). Обмежену область $G \subset H$ з межею S класу $\mathfrak{A}$ назвемо "$\mathcal{L}$-опуклою", якщо $\forall x \in S_\varepsilon \cap G$ виконується нерівність $g(x) > 1$ та $\sup\limits_{x \in S} (\mathcal{L}g)(x) < 0$.

Доводиться, що не втрачаючи загальності, $\mathcal{L}$-опуклу область G можна задати умовою: $G = \{x \mid g(x) > 1\}$. При цьому $S = \partial G = \{x \mid g(x) = 1\}$; $g \in \mathfrak{A}_0$; $\mathcal{L}g(\cdot) \leq 0$ в H; $\mathcal{L}g(\cdot) < -\alpha < 0$

на S ; $\inf\limits_{S} \|g'(\cdot)\| > 0$.

Прикладом $\mathcal{L}$ -опуклої області є строго опукла обмежена область G в H з межею класу $\mathfrak{A}$ (при цьому $G = \{x \mid g(x) > 1\}$; $g''(x) < -\alpha I < 0$ для $x \in S$).

Теорема 3.1.12. Нехай G - $\mathcal{L}$ -опукла область в H . Тоді існує єдина функція на $\overline{G}$, що задовольняє умови: $\theta(x) > 0$ в G ; $\theta(x) = 0$ на S ; $\theta \in C(\overline{G})$; $\theta|_G \in X(G)$; $\overline{\mathcal{L}}_G(\theta|_G) = -1$. При цьому $\theta \in C^1_p(\overline{G})$ (тут $\mathfrak{A}(G) = \{u \in C^2_p(G) \mid \{u''(x) \mid x \in G\} \in \mathfrak{M}(H)\}$; $X(G) = \overline{\mathfrak{A}(G)}$; $\mathcal{L}_G : \mathfrak{A}(G) \ni u \mapsto \frac{1}{2} j(u''(\cdot) \in X(G))$.

Функцію θ будемо називати *фундаментальною функцією* області G .

У тому випадку, якщо функція g , що визначає область G має додаткову властивість: $\mathcal{L}g \in \mathfrak{A}_0$, можна зробити висновок про більш високу степінь гладкості функції θ: $\theta|_G \in \mathfrak{A}(G)$.

Якщо ж $g \in \mathfrak{A}_0 \cap \mathfrak{A}_1(H)$ та $\mathcal{L}^2 g \in \mathfrak{A}_0$, то $\theta|_G \in \mathfrak{A}_1(G)$.

Теорема 3.2.3. Нехай G - $\mathcal{L}$ -опукла область в H ; $S = \partial G$ - поверхня класу $\mathfrak{A}_1$. Тоді для будь-якої функції $\varphi \in X(S)$ існує єдина функція $\mathcal{D}ir\,\varphi \in C_p(\overline{G})$ така, що $\mathcal{D}ir\,\varphi|_G \in X(G)$; $\overline{\mathcal{L}}_G(\mathcal{D}ir\,\varphi|_G) = 0$ та $\mathcal{D}ir\,\varphi|_S = \varphi$. Її визначено за формулою:

$$(\mathcal{D}ir\,\varphi)(x) = (T(\theta(x))\tilde{\varphi})(x) \tag{16}$$

(тут $\tilde{\varphi} \in X$ - продовження φ на весь H ; $T(t)$ -півгрупа в X з генератором $\overline{\mathcal{L}}$).

Твердження теореми має місце і без додаткової умови на поверхню S (тобто S - поверхня класу $\mathfrak{A}$), але при цьому існування продовження треба постулювати: $\varphi = \widetilde{\varphi}|_S$.

Випадок рівняння Пуассона розглянуто за класичною схемою. При цьому доведено, що функцію $v \in X(G)$ можна продовжити на весь простір H до функції $\widetilde{v} \in X$ (якщо межа S належить до класу $\mathfrak{O}_1$), яку не втрачаючи загальності, можна вважати фінітною. Звідси робиться висновок про те, що функція $u_1 = (-\int_0^\infty T(t)\widetilde{v}\,dt)|_G$ є розв'язком рівняння $\overline{L}_G u_1 = v$.

У § 3.3 на строго опуклій обмеженій поверхні в H побудовано аналог поверхневого інтеграла.

Припускаємо, що G - обмежена область в H, межа якої $S = \{x \mid g(x) = 1\}$ є поверхнею класу $\widetilde{\mathfrak{O}}_1$. Крім того, при достатньо малому $\varepsilon > 0$: $L^2 g \in \mathfrak{A}(S_\varepsilon)$; $g(x) > 1$ при $x \in S_\varepsilon \cap G$ та існує таке $\alpha > 0$, що

$$g''(x) < -\alpha I \tag{17}$$

для $x \in S$.

За теоремою 2.4.3 у просторі $X(S)$ визначено (C_0)-півгрупу стисків $W(t)$.

Теорема 3.3.9. Якщо поверхня S задовольняє вищенаведені умови, то для $\forall \varphi \in X(S)$ існує $\lim\limits_{t \to +\infty} W(t)\varphi = W(\infty)\varphi$ та $W(\infty)\varphi$ - стала функція на S.

Середнє $I_S(u)$ функції $u \in X(S)$ можна визначити як $W(\infty)u$ (природним чином ототожнюємо $R(W(\infty))$ з $\mathbb{R}$).

Середнє $I_S : X(S) \to \mathbb{R}$ - характер алгебри $X(S)$.

Наведено приклад опуклої, але не строго опуклої поверхні (виконуються всі вищенаведені умови на поверхню S із заміною умови (17) на умову: $g''(x) \leq 0$), для якої твердження теореми 3.3.9 не виконується (приклад 3.3.11).

Задачу Неймана для рівняння Лапласа з суттєво нескінченновимірним еліптичним оператором розглянуто у § 3.4.

Область G_1 задовольняє умови § 3.3.

Для $\varphi \in \mathfrak{A}(S)$ функція $\mathcal{D}ir\,\varphi|_G \in C_p^1(G)$ (див.(16)) і тому на S коректно визначено функцію $\frac{\partial}{\partial n_-}\mathcal{D}ir\,\varphi \in X(S)$ ($n_-(x)$- нормований вектор внутрішньої нормалі до S у точці $x \in S$).

Оператор $\frac{\partial}{\partial n_-} \circ \mathcal{D}ir : \mathfrak{A}(S) \to X(S)$ припускає замикання і при цьому $N = \overline{\frac{\partial}{\partial n_-} \circ \mathcal{D}ir} = \|\theta'(\cdot)\||_S \cdot \overline{L}_S$ (тут $\theta(\cdot)$ - фундаментальна функція області G_1).

Теорема 3.4.3. Оператор N - генератор (C_0)-півгрупи стисків $U(t) : X(S) \to X(S)$ і при цьому для $\forall x \in S, \forall u \in X(S)$ має місце формула: $(U(s)u)(x) = [W(t(s;x))u](x)$,

де $t(s;x) = t(s)$ - функція, що обернена до функції

$$s(t) = \int_0^t [W(\tau)(\|\theta'(\cdot)\||_S^{-1})](x)\,d\tau .$$

При цьому для $\forall u \in X(S)$ існує $\lim\limits_{t\to\infty} U(t)u = I_S u$.

Задачу Неймана для рівняння Лапласа в області G_1 ставимо як задачу пошуку такої функції $u \in C(\overline{G}_1)$, для якої:

$$u|_G \in \mathcal{D}(\overline{L}_G); \quad \overline{L}_G(u|_G) = 0; \tag{18}$$

$$u|_S \in \mathcal{D}(N); \quad N(u|_S) = \varphi, \tag{19}$$

де $\varphi \in X(S)$ - крайова умова.

Критерієм розв'язності задачі (18)-(19) є умова:

$$\int_0^\infty U(t)\varphi\,dt \quad \text{збігається} . \tag{20}$$

Розв'язок задачі (18)-(19) - єдиний з точністю до сталої і при цьому

$$u = -\mathcal{D}ir\left(\int_0^\infty U(t)\varphi\,dt\right) + const.$$

Необхідною умовою розв'язності задачі (18)-(19) є умова:

$$I_S\varphi = 0. \tag{21}$$

За аналогією з задачею (18)-(19) може бути поставлено третю крайову задачу для рівняння Лапласа:

$$u\big|_S \in \mathcal{D}(N)\,; \quad \mathcal{P}(u\big|_S) = \varphi, \tag{22}$$

де $u \in C(G)$; $\varphi \in X(S)$ - крайова умова; $\mathcal{P} = N + \sigma(\cdot)$; $\sigma \in X(S)$.

У тому випадку, якщо $\sup\limits_S \sigma(\cdot) < 0$, розв'язок задачі (18)-(22) існує для $\forall\varphi \in X(S)$; розв'язок єдиний і може бути поданим у вигляді:

$$u = -\mathcal{D}ir\left(\int_0^\infty \exp\left[\int_0^t U(\tau)\sigma\,d\tau\right] U(t)\varphi\,dt\right).$$

У § 3.5 представлено суттєво нескінченновимірні аналоги деяких класичних формул Гріна.

Це формула $I_S(\overline{L}_S\varphi) = 0$, що є аналогом класичної формули Гріна $\int_{\mathcal{M}} \Delta\varphi\,d\sigma = 0$ на компактному римановому многовиді $\mathcal{M}$, а також формула

$$I_{\partial G}\left(\frac{\partial u}{\partial n_+}\right) = K(G)\, I_G(Lu),$$

де $I_G v = I_{\partial G}(v\big|_{\partial G})$; $K(G) = I_G(\|\theta'(\cdot)\|)$; $u \in \mathfrak{A}(G)$,

що є аналогом класичної формули Гріна $\int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n_+}\,d\sigma = \int_G \Delta u\,dv$.

У § 3.6 наведено серію різноманітних прикладів.

Доведено, що область $\{x \mid g(x) < 1\}$, де g визначено за формулою (15), є L-опуклою областю з межею класу $\mathcal{U}_1$, а тому до неї можна застосувати всі результати § 3.1, 3.2 (п.3.6.1).

При цьому для області $G_1 = \{x \mid (Bx, x) < 1\}$ (тут $B \in B_c(H)$; $B \geq \alpha I > 0$) має місце відома формула:

$$(Dir\,\varphi)(x) = \left[T\left(\frac{1}{j(B)}\,(1-(Bx,x))\right)\tilde{\varphi}\right](x).$$

Для функцій вигляду (частинний випадок формули (15)):

$$g(x) = b\,(B_1 x, x)^{K} + \sum_{i=1}^{S}\sum_{k_i=1}^{m_i} a_{i,k_i}\,(B_i x, x)^{k_i}$$

(тут $B_i \in B_c(H)$; $B_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, S)$; $B_1 \geq \alpha I > 0$; $b > 0$; $k_i, m_i \in N$; $a_{i,k_i} \geq 0$) область $G_1 = \{x \mid g(x) < 1\}$ задовольняє умови, що накладено на область у § 3.3, а тому для неї застосовуються також усі результати § 3.3-3.5 (п.3.6.2).

Для кулі $B_R = \{x \mid \|x\| < R\}$ отримано інше представлення розв'язку задачі (18)-(19).

Твердження 3.6.3. Розв'язок задачі (18)-(19) у кулі B_R може бути поданим за формулою:

$$u(x) = -\int_0^{\infty} (Dir\,\varphi)(e^{-\frac{t}{R}}x)\,dt + const\,. \qquad (23)$$

Критерієм розв'язності задачі (18)-(19) є рівномірна за параметром $x \in S_R$ збіжність інтеграла у правій частині (23). Необхідною умовою розв'язності задачі (18)-(19) є умова

$$(Dir\,\varphi)(0) = 0 \qquad (24)$$

При цьому

$$I_{S_R}\,\varphi = (Dir\,\varphi)(0) \qquad (25)$$

(тут $S_R = \{x \mid \|x\| = R\}$).

У п.3.6.4 наведено приклад функції $\varphi \in X(S_R)$, для якої задача (18)-(19) не є розв'язною, незважаючи на те, що для неї виконується умова (24). Це доводить, що умови (20) та (21) - не еквівалентні.

Проте у класі гладких функцій на сфері умови (20) та (21), як з'ясовується, - еквівалентні.

Твердження 3.6.6. Нехай $\varphi \in \mathfrak{A}(S_R)$. Тоді умова $I_{S_R}\varphi = 0$ є критерієм розв'язності задачі (18)-(19) у кулі B_R.

Показано також, що рівність (25) не допускає узагальнення на випадок еліпсоїдів.

Твердження 3.6.8. Нехай $j \in J_{c.н.}$; $j \neq 0$. Тоді існують такий оператор $B \in B_c(H)$; $B > \alpha I > 0$ та функція $\varphi \in \mathfrak{A}(\partial G)$, де $G = \{x \mid (Bx, x) < 1\}$, що $I_{\partial G}\varphi \neq (\mathcal{D}ir\,\varphi)(0)$.

У висновках коротко сформульовані основні результати дисертаційної роботи.

1. Доведено представлення нерегулярного еліптичного оператора другого порядку як суми регулярного та суттєво нескінченновимірного еліптичних операторів (формула (4)).

2. Отримано зображення суттєво нескінченновимірного додатного функціоналу в граничній формі (теорема 1.1.6).

3. Знайдено клас початкових умов, що забезпечують розв'язність задачі Коші для нерегулярного рівняння теплопровідності та отримано формулу для розв'язку цієї задачі (теорема 1.2.5).

4. Наведено достатні умови на однопараметричну сім'ю стисків у банаховому просторі, що дозволяють побудувати (C_0)-півгрупу за формулою Чернова та дають точне значення генератора цієї півгрупи (теорема 1.4.1).

5. Встановлено ряд результатів щодо суттєво нескінченно-вимірних еліптичних операторів із змінними коефіцієнтами (твердження 1.5.1, 1.5.4, 1.5.15).

6. Знайдено достатні умови рівномірної коректності задачі Коші для суттєво нескінченновимірного рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\overline{L+Z})_x u(x,t)$ у лінійному просторі (теорема 2.3.7).

7. На поверхні скінченної корозмірності у нескінченно-вимірному гільбертовому просторі розглянуто суттєво нескінченно-вимірний еліптичний оператор та доведено рівномірну коректність задачі Коші для відповідного рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = (\overline{L_S})_x u(x,t)$ (теорема 2.4.3).

8. Отримано розв'язок задачі Діріхле для рівнянь Лапласа та Пуассона у строго опуклій області гільбертова простору (теореми 3.1.12, 3.2.3).

9. Побудовано суттєво нескінченновимірне мультиплікативне середнє у просторі функцій на строго опуклій поверхні гільбертова простору (теорема 3.3.9) та отримано відповідні аналоги класичних формул Гріна.

10. Досліджено другу крайову задачу для рівняння Лапласа у строго опуклій області гільбертова простору та узгоджено її розв'язність з відповідним поверхневим середнім.

Основні результати дисертації опубліковано в наступних роботах:

1. Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L. Cauchy problem for the simplest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator //(Suppl.to chapters IY, Y): Yu.L.Dalecky, S.V.Fomin. Measures and differential equations in infinite-dimensional space. - Kluwer Acad.Publ., 1991. - pp.309-322.

2. Богданский Ю.В. Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения на бесконечномерной сфере //Укр.мат.журн. - 1983. - т.35, № 1. - С.18-22.

3. Богданский Ю.В. Принцип максимума для нерегулярного эллиптического дифференциального уравнения в счетномерном гильбертовом пространстве //Укр.мат.журн. - 1988. - т.40, № 1. - С.21-25.

4. Богданский Ю.В. Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором //Укр.мат.журн. - 1989. - т.41, № 5. - С.584-590.

5. Богданский Ю.В. Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами //Укр.мат.журн. - 1994. - т.46, № 6. - С.663-670.

6. Богданский Ю.В. Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором //Укр.мат.журн. - 1994. - т.46, № 7. - С.803-808.

7. Bogdansky Yu.V., Cauchy problem for the essentially infinite-dimensional heat equation on a surface in Hilbert space //Укр.мат.журн. - 1995. - т.47, № 6. - С.737-746.

8. Bogdansky Yu.V. The Neumann problem for Laplace equation with the essentially infinite-dimensional elliptic operator //Доп.НАН України. - 1995. - № 10. - С.24-26.

9. Богданский Ю.В. Нерегулярные эллиптические дифференциальные операторы для функций бесконечного числа переменных. Принцип максимума. - Киев, 1985. - 10 с. - Деп.в УкрНИИНТИ, № 1425 Ук-85Деп.

10. Богданский Ю.В. Параболические уравнения с нерегулярными эллиптическими дифференциальными операторами.

Задача Коши. - Киев, 1986. - 10 с. - Деп.в УкрНИИНТИ, № 42 - Ук86Деп.

11. Богданский Ю.В. Существенно бесконечномерные гармонические функции и задача Дирихле для уравнения Лапласа в гильбертовом шаре. - Киев, 1986. - 12 с. - Деп.в УкрНИИНТИ, № 41-Ук86Деп.

12. Богданский Ю.В. Задача Дирихле для уравнения Лапласа с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором в области, ограниченной эллипсоидом //Тр.XI Всесоюзной школы по теории операторов в функциональных пространствах. Ч.III. - Челябинск: Изд-во Челябинского политехн.ин-та. - 1986. - С.20.

13. Богданський Ю.В. Задача Коші для параболічного рівняння з нерегулярним еліптичним оператором //Тези доп.КРОМШ-І. - Київ. - 1991. - С.54.

14. Bogdansky Yu.V. Dirichlet Problem for Poisson Equation with Essentially Infinite-Dimensional Elliptic Operator //Proc.of the Fourth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. - Simferopol. - 1995. - pp.250-251.

Богданский Ю.В. Некоторые вопросы существенно бесконечномерного анализа.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается 14 научных работ, которые содержат теоретические исследования в области бесконечномерного анализа. Доказана равномерная корректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с существенно бесконечномерным эллиптическим

оператором на поверхности конечной коразмерности в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В пространстве функций на ограниченной строго выпуклой поверхности гильбертова пространства построено существенно бесконечномерное среднее, которое применено при исследовании задачи Неймана для соответствующего уравнения Лапласа.

Bogdansky Yu.V. Some problems of essentially infinite-dimensional analysis.

Doctor of Science Thesis (Physics and Mathematics), specialization - mathematical analysis. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv, 1996.

14 scientific papers containing theoretical studies on infinite-dimensional analysis are defended. The uniform well-posedness of the Cauchy problem for the heat equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator on a surface of finite codimension in an infinite-dimensional Hilbert space is proved. The essentially infinite-dimensional mean in the function space on a bounded strictly convex surface in a Hilbert space is constructed and applied to the investigation of the Neumann problem for the corresponding Laplace equation.

Ключові слова: нескінченновимірний аналіз, оператор Лапласа-Леві, півгрупа операторів, параболічне рівняння, крайова задача.

Подписано к печати 14.05.96. Формат 60х84, 1/16
Об"ем 1,5 печ.лист. Заказ № 44 Тираж 100

ОНТИиПД УкрНТИО

операторов на поверхности конечной коразмерности в бесконечномерном гильбертовом пространстве. В пространстве функций на ограниченной строго выпуклой поверхности гильбертова пространства построено существенно бесконечномерное среднее, которое применено при исследовании задачи Неймана для соответствующего уравнения Лапласа.

Bogdansky Yu.V. Some problems of essentially infinite-dimensional analysis.

Doctor of Science Thesis (Physics and Mathematics), specialization - mathematical analysis. Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, 1996.

14 scientific papers containing theoretical studies on infinite-dimensional analysis are defended. The uniform well-posedness of the Cauchy problem for the heat equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator on a surface of finite codimension in an infinite-dimensional Hilbert space is proved. The essentially infinite-dimensional mean in the function space on a bounded strictly convex surface in a Hilbert space is constructed and applied to the investigation of the Neumann problem for the corresponding Laplace equation.