МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

На правах рукопису

Зорій Лонгін-Микола Михайлович

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ І СТІЙКОСТІ КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНИХ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФУНКЦІЙ ВПЛИВУ

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Львів - 1996

Робота виконана в Державному університеті "Львівська політехніка"

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Горошко Олег Олександрович / Київ /,

доктор технічних наук, професор
Василенко Микола Васильович / Київ /,

доктор фізико-математичних наук, професор
Вігак Василь Михайлович / Львів /.

Провідна організація - Львівський державний університет
ім. Івана Франка

Захист відбудеться "24" червня 1996 р. о 15:00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.17.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України за адресою: 290601, м.Львів, МСП, вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України /м.Львів, вул.Наукова,3-б/.

Відгук на автореферат просимо надсилати за адресою: 290601 м.Львів, МСП, вул.Наукова, 3-б, ІППММ, вченому секретарю спеціалізованої ради Д.04.17.01.

Автореферат розіслано "21" травня 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради
кандидат фізико-математичних наук П.Р.Шевчук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У різних галузях сучасного природознавства й техніки щораз більшої ваги набувають теорія коливань і стійкості та методи розв"язування задач статики й динаміки континуально-дискретних пружних систем з довільним допустимим розподілом параметрів. Практичне значення вказаних задач обумовлене, зокрема, збільшенням потужності, швидкостей і прискорень машин та механізмів, забезпеченням їх надійності, економічності й довговічності, розширенням діапазону їхніх можливостей і призначень. Тому актуальною є подальша розробка теорії та методів дослідження динамічної поведінки вказаних систем, двобічних способів знаходження власних частот і критичних навантажень як функцій параметрів та одержання якісних висновків і розрахункових формул для оцінки впливу на коливання й стійкість досліджуваних систем різноманітних факторів /жорсткісних, масових і геометричних характеристик моделей, тертя, властивостей діючих консервативних і неконсервативних навантажень тощо /.

Проблемам динаміки й стійкості деформівних систем та їх застосуванням присвячені праці Амбарцумяна С.А., Бабакова І.М., Біргера І.А., Болотіна В.В., Василенка М.В., Власова В.З., Вольміра А.С., Горошка О.О., Горшкова А.Г., Григолюка Е.І., Григоренка Я.М., Гузя О.М., Конашенка С.Й., Лазаряна В.А., Леонова М.Я., Новічкова Ю.М., Пановка Я.Г., Писаренка Г.С., Рвачова В.Л., Ржаніцина О.Р., Савули Я.Г., Тимошенка С.П., Улітка А.Ф., Феодосьєва В.І., Філіппова А.П., Чернухи Ю.А., Швайка М.Ю. і багатьох інших вчених.

Загальноприйнятий підхід до вивчення коливань і стійкості механічних систем, який називають динамічним методом, полягає в дослідженні рухів даної системи біля незбуреного стану. При цьому висновки про її поведінку одержують найчастіше, аналізуючи лінеаризовані рівняння збуреного руху /метод малих коливань/. Застосовність такого підходу до систем зі скінченною кількістю ступенів вільності базується на відомих теоремах про стійкість за першим наближенням, або на використанні прямого методу Ляпунова. Для континуальних і континуально-дискретних пружних систем питання обгрунтування методу малих коливань, як і існування та єдиності розв"язків відповідних нелінійних задач, вивчені ще недостатньо. Стійкості розв"язків злічених систем диференціальних рівнянь присвячені праці Барбашина Е.А. та Персидського К.П., в яких узагальнено теореми прямого методу. Один із шляхів поширення класичної теорії на континуальні системи грунтується на побудові деяких функціоналів - аналогів функцій Ляпунова. Проте їх побудова є складною проблемою. Тому, а також з огляду на зазначені вище споріднені питання, необхідно розвивати теорію та методи, враховуючи специфіку завантажених пружних і не цілком пружних систем /залежність частот і критичних значень від параметрів, змінність їх розподілу, характер втрати стійкості, властивості діючих навантажень тощо/.

Аналіз лінеаризованих рівнянь збурених рухів зводиться до дослідження задач на власні значення та їх узагальнень. Грунтовно вивчена класична задача для лінійних операторів. Випадки, в яких задачі містять частотний параметр у вигляді нелінійних залежностей, і коли подібних параметрів декілька /нелінійні та багатопараметричні задачі на власні значення/, вивчені ще недостатньо.

Досліджуючи континуально-дискретні системи, суттєво мати характеристичний визначник відповідної багатопараметричної задачі. Із нього шляхом чисельного аналізу визначають частоти й форми коливань, критичні навантаження, вивчають вплив на них різних параметрів /так званий точний метод/. Однак такі випадки є винятковими, оскільки наявність характеристичних визначників обумовлена конструктивною побудовою загальних розв"язків відповідних диференціальних рівнянь. Крім цього, для вказаних систем така побудова і чисельне дослідження можуть бути складними, особливо в неконсервативних задачах теорії пружної стійкості. Тому тут часто застосовують наближені методи - Релея-Рітца, Бубнова-Гальоркіна, послідовних наближень, скінченних різниць та інші. На даний час значно розвинуто напіваналітичні методи дослідження і метод R - функцій. При використанні наближених методів часто залишається відкритим питання про досягнуту точність. Цю проблему можна розв"язати за умов, що метод є двобічним, тобто дає змогу обчислювати шукані значення з недостачею та з надлишком.

Щоб визначати декілька нижчих частот дискретних систем, а також континуальних, доцільно застосовувати відомі двосторонні оцінки. Для цього необхідно мати точні формули коефіцієнтів відповідних характеристичних многочленів або степеневих рядів - так званих спектральних функцій, які тотожні відомим знаменникам Фредгольма. Такі оцінки застосовувалися тільки до незавантажених консервативних систем зі сталим розподілом параметрів. Це пояснюється відсутністю ефективних способів знаходження вказаних коефіцієнтів у складніших випадках. Тому важливо розробити способи їх визначення для завантажених багатопараметричних систем, в тому числі неконсервативних, і поширити на ці системи метод двосторонніх оцінок.

Належить звернути увагу й на наступне. В задачах для неоднорідних систем доцільно застосовувати апарат узагальнених функцій. Розв"язки відповідних рівнянь з особливостями в коефіцієнтах типу δ - функції та її похідних можна будувати різними способами; актуальною є їх побудова в явному вигляді. Функції розподілу жорсткостей, мас і інших характеристик найчастіше вважалися конкретними. Тому в літературі майже відсутні достатньо загальні характеристичні рівняння. До вивчення вказаних систем не застосовувалися узагальнені критерії стійкості цілих функцій, що особливо доцільно робити в неконсервативних задачах для континуальних систем. Отже, проблема дальшої розробки загальної теорії та методів вивчення динамічної поведінки континуально-дискретних пружних систем є актуальною.

<u>Мета роботи</u>. Робота присвячена розвиткові якісної теорії та аналітичних методів дослідження задач про малі коливання й стійкість пружних систем з довільним допустимим розподілом жорсткостей, мас, консервативних і неконсервативних навантажень та інших характеристик на основі вивчення універсальних характеристичних визначників як цілих аналітичних функцій параметрів.

<u>Наукова новизна.</u> В дисертаційній роботі започатковано та розвинуто науковий напрямок в теорії коливань і стійкості континуально-дискретних пружних систем, що грунтується на застосуваннях функцій впливу й методу характеристичних рядів до побудови та дослідження універсальних частотних рівнянь. Наукову новизну визначають наступні питання, розглянуті в дисертаційній роботі.

Сформульовано й застосовано важливу властивість функції Коші $K(x,\alpha)$ звичайного диференціального рівняння $L[y]=0$: вона та її послідовні частинні похідні за параметром α завжди утворюють фундаментальну систему його розв"язків.

Розроблено якісно нові способи побудови загальних розв"язків таких рівнянь і універсальних характеристичних визначників, що відповідають малим коливанням і стійкості вказаних систем. Одержано зображення функцій $K(x,\alpha)$ як рядів Тейлора та рядів за параметрами. Проведено класифікацію універсальних характеристичних визначників крайових задач для рівнянь другого та четвертого порядків і вивчено їх структуру. Наведено якісні висновки про вплив на коливання скупчених мас, ділянок з малою та великою піддатливістю, характеристик пружних в"язей, зовнішнього тертя тощо. Узагальнено метод початкових параметрів на системи з довільно змінними характеристиками.

Розроблено основи методу характеристичних рядів, які, зокрема, включають :

- означення рядів, види та способи їх побудови;
- застосування до них як до цілих аналітичних функцій характеристичного показника узагальнених критеріїв Рауса-Гурвіца й аперіодичної стійкості та виведення загальних рівнянь для критичних навантажень при дивергенції і флатері ;
- узагальнення відомих оцінок для нижчих частот і ейлерових значень на випадок завантажених консервативних і неконсервативних систем;
- двосторонні оцінки для критичних значень флатера;
- дослідження ефекту дестабілізації та умов його відсутності;
- розв"язання задачі про область вірогідної стійкості ;
- одержання якісних висновків про вплив приєднаних мас і осциляторів, параметрів пружного закріплення, напрямку потоку, характеристик діючих навантажень на коливання і стійкість досліджуваних систем.

Наведено способи побудови та визначення умов застосовності розрахункових формул для основної частоти та критичних навантажень пружних і одного класу пружно-в"язких систем.

Запропоновано метод часткової дискретизації та побудови матриць впливу піддатливостей /жорсткостей/ в задачах коливань і стійкості пружних систем з довільно змінними параметрами.

Обгрунтовано динамічний метод дослідження одного класу континуальних пружних систем під дією консервативних і неконсервативних сил /теореми про існування та єдиність розв"язків нелінійної змішаної задачі і теореми про стійкість та нестійкість рівноважного стану за першим наближенням/.

<u>Методика дослідження.</u> В роботі запропоновано методи аналітичного дослідження коливань і стійкості пружних континуально-дискретних механічних систем, що залежать від багатьох параметрів. При цьому використано моделі та методи механіки деформівного твер-

дого тіла, а також відповідні результати теорії коливань і стійкості, звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь математичної фізики та теорії цілих аналітичних функцій.

Вірогідність результатів забезпечується фізичною коректністю досліджуваних моделей, математичною точністю в постановці та розв"язанні задач і підтверджується добрим узгодженням одержаних висновків з відомими в літературі теоретичними й експериментальними результатами.

Теоретична і практична цінність. Наведені в роботі методи побудови розв"язків, характеристичних визначників, двосторонніх оцінок і розрахункових формул, що явно залежать від параметрів, дозволяють раціонально досліджувати їх вплив на малі коливання і стійкість континуально-дискретних пружних систем. Одержані розв"язки та запропоновані методи можна застосовувати також до вивчення аналогічних задач математичної фізики, геофізики, теплопровідності, до дослідження динамічної поведінки механічних систем, збурюваних параметрично імпульсами та ударами на скінченному проміжку часу тощо.

Метод характеристичних рядів застосовувався частково в кандидатських дисертаціях Балінського А.І., Байдака Д.А., Ісаєва Ю.І., Тація Р.М. і Гайвась Б.І. /в перших чотирьох автор був науковим керівником, в останній - науковим консультантом/, а також в інших працях. Результати застосування методу до розрахунку частот і критичних навантажень прямолінійних стержнів змінного поперечного перерізу стали основою відповідних методичних рекомендацій /МР 213-87/, виданих Держстандартом СРСР. Ці рекомендації розроблялися колективом співробітників Державного університету "Львівська політехніка" під керівництвом автора дисертаційної роботи згідно до Програми робіт по створенню комплексу міжгалузевих нормативно-технічних документів "Методи розрахунку і досліджень на міцність у машинобудуванні".

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на Всесоюзних, міжнародних і республіканських конференція та симпозіумах, а також на наукових семінарах з механіки деформівного твердого тіла під керівництвом професорів Григолюка Е.І., Горшкова А.Г., Новічкова Ю.М. / Москва /, Гузя О.М. /Київ/, Підстригача Я.С., Кіта Г.С., Мартиновича Т.Л., Русинка К.М. /Львів /.

Особистий внесок автора та публікації. В дисертаційній роботі викладені результати багаторічних досліджень автора /понад 25 років/, виконаних ним в Інституті прикладних проблем механіки і математики АН УРСР та на кафедрі теоретичної механіки Львівського політехнічного інституту.

За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 81 статтю та три методичні розробки. Основні теоретичні результати одержані та опубліковані автором самостійно. В інших публікаціях постановки задач належали авторові, дослідження та розрахунки - співавторам, а одержані розв"язки і висновки аналізувалися сумісно.

Структура й обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, шести розділів, висновків і списку літератури, що містить 203 найменування. Обсяг роботи - 365 сторінок машинописного тексту, в тому числі 47 рисунків і 17 таблиць /всі рисунки й таблиці - на окремих сторінках /.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми дисертаційної роботи, стисло аналізуються близькі за тематикою літературні джерела, коротко характеризуються розділи роботи та основні результати.

Розділ I. ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ НАЙПРОСТІШИХ КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ З ЗАСТОСУВАННЯМ ФУНКЦІЙ ВПЛИВУ

Розглядається задача про малі поздовжні коливання прямолінійного пружного стержня з розподіленими та зосередженими характеристиками, яка описується рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial u}{\partial x}\right)+g(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\mho(x,t), \quad a\leq x\leq b \qquad /1/$$

із заданими граничними /однорідними/ та початковими умовами. Тут $u=u(x,t)$ - поздовжне переміщення; $f=EF(x)$, $F(x)$, $g(x)$ - жорсткість стержня, площа його поперечного перерізу та функція розподілу вказаних характеристик; $\mho(x,t)$ - зовнішнє осьове навантаження. Функція розподілу мас /параметрів зовнішнього тертя, пружної основи тощо/ має вигляд

$$g(x)=m(x)+\sum_{i=1}^{K}M_i\,\delta(x-x_i), \qquad /2/$$

де $m(x)$ - маса одиниці довжини стержня; M_i - величина маси, зосередженої в точці x_i осі; $\delta(x)$ - дельта-функція Дірака;

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b .$$

Для вільних коливань / $v \equiv 0$ /, підставляючи в рівняння /I/ і в граничні умови добуток

$$u(x,t) = y(x) \exp \lambda t \; ; \quad \lambda = \sqrt{-1}\, \omega ,$$

одержуємо відповідну задачу на власні значення :

$$L[y] \equiv (f(x)y')' + \omega^2 g(x) y = 0 , \qquad /3/$$

$$(fy' - e_1 y)\Big|_{x=a} = 0 , \quad (fy' + e_2 y)\Big|_{x=b} = 0 .$$

Тут e_1 , e_2 - параметри закріплення кінців стержня; $g(x)$ - узагальнена функція, визначена формулою /2/. Функції $1/f(x)$ і $m(x)$ вважаються інтегровними та додатними.

Метою розділу є застосування функцій впливу до дослідження цієї задачі та ілюстрація можливостей і переваг такого підходу.

Спочатку розглядаємо стержень без скупчених мас. Одержано характеристичне рівняння задачі:

$$\left(e_1 e_2 K + e_1 f(b) K' - e_2 f(a) \dot{K} - f(a) f(b) \dot{K}'\right)\Big|_{\substack{x=b \\ \alpha=a}} = 0 . \qquad /4/$$

Тут $K(x,\alpha)$ - відома функція Коші /крапками позначено частинні похідні за параметром α /. Це рівняння є універсальним /функції розподілу жорсткості $f(x)$ і маси $m(x)$ можуть мати тут будь-яку допустиму форму, а параметри пружного закріплення $e_1 \geq 0$ та $e_2 \geq 0$ - довільні/. Розглянуто клас задач, для яких

$$f = f_0 / z'(x) \; ; \quad m = m_0 z'(x) \; ; \quad f_0 = f(a) \; ; \quad m_0 = m(a) . \qquad /5/$$

Проведено аналіз рівняння /4/ і окремих частотних рівнянь. З використанням відомих точних розв"язків записано низку формул для частот ω_n^2 і форм коливань $y_n(x)$ та показано, що вони суттєво залежать від розподілу мас і жорсткостей /наприклад, параметри функції $z(x)$ для ступінчастого консольного стержня можна підбирати так, щоб його найнижча частота необмежено зменшувалася або ставала щораз більшою/.

Далі досліджено стержень, що має зосереджені маси $M_i \neq 0$. Щоб побудувати характеристичний визначник задачі /3/ в цьому випадку, необхідно мати загальний розв"язок такого рівняння:

$$L[y]=\sum_{i=1}^{K}\alpha_i y(x_i)\delta(x-x_i) \qquad (\alpha_i=M_i\lambda^2) \qquad /6/$$

Нехай $\Psi=\Psi(x)$ - деякий розв"язок рівняння $L[y]=0$. Кожній такій функції Ψ відповідає розв"язок Q рівняння /6/, що визначається формулою

$$Q=\Psi+\sum_{i=1}^{K}\Psi_i\Phi_{xi}+\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j>i}^{K}\alpha_i\alpha_j\Psi_i K_{ji}\Phi_{xj}+$$

$$+\sum_{i=1}^{K-2}\sum_{j>i}^{K-1}\sum_{s>j}^{K}\alpha_i\alpha_j\alpha_s\Psi_i K_{ji}K_{sj}\Phi_{xs}+\ldots+ \qquad /7/$$

$$+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_K\Psi_1 K_{21}K_{32}\ldots K_{K,K-1}\Phi_{xK},$$

де $\Psi_i=\Psi(x_i)$, $\Phi_{xi}=\Phi(x,x_i)$,

$$K_{ji}=K(x_j,x_i)\ ;\quad \Phi(x,\alpha)\equiv K(x,\alpha)\Theta(x-\alpha)$$

/ Φ - фундаментальний розв"язок, Θ - функція Хевісайда/. Тому загальний розв"язок рівняння /6/ можна визначати формулою

$$y=C_0Q(x,\alpha)+C_1\dot{Q}(x,\alpha). \qquad /8/$$

Отже, щоб записати універсальне характеристичне рівняння задачі про вільні поздовжні коливання стержня з пружно закріпленими кінцями, який несе приєднані маси M_i / $i=\overline{1,K}$ /, потрібно в рівнянні /4/ замінити функцію $K(x,\alpha)$ відповідною функцією $Q(x,\alpha)$.

Досліджено окремі випадки наступних рівнянь

$$Q(b,a)=0,\ Q'(b,a)=0,\ -\dot{Q}(b,a)=0,\ -\dot{Q}'(b,a)=0 \qquad /9/$$

Вони відповідають таким умовам закріплення: затиснуті кінці, консоль з лівим і консоль з правим жорстким закріпленням, вільні кінці. Відзначено, що всі наведені характеристичні рівняння можна застосовувати в складніших задачах, для яких, наприклад,

$$\alpha_i=M_i\lambda^2+b_i\lambda+c_i \qquad (b_i\geqslant 0\ ,\ c_i\geqslant 0) \qquad /10/$$

/ b_i , c_i - коефіцієнти зовнішнього тертя і жорсткості наявної пружної в"язі/. Якщо враховується розподілене тертя та пружна основа з коефіцієнтами $b(x)$ і $c(x)$ відповідно, то

$$L[y] \equiv \left(f(x)y'\right)' - \left[m(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x)\right]y . \qquad /11/$$

Розглянуто також приклади, коли одержані частотні рівняння значно спрощуються /системи з невеликою кількістю зосереджених факторів, з малими розподіленими параметрами, з одним або двома ступенями вільності, ступінчасто-однорідні системи тощо/; проведено аналіз відповідних формул явного вигляду для декількох нижчих частот таких систем.

Розроблено способи одержання якісних висновків про вплив на власні частоти достатньо великих скупчених і розподілених мас, пружних опор, їх розташування, ділянок з великою та малою піддатливістю, характеристик зовнішнього тертя й пружних в"язей. Одержано умови кратності та близькості частот і способи забезпечення деяких інших властивостей частотних спектрів.

Проілюстровано одне з узагальнень методу початкових параметрів. Одержано співвідношення

$$y(x,\alpha) = N(\alpha)K - f(\alpha)y(\alpha)\dot{K} \; ; \; N(x,\alpha) = f(x)y'(x,\alpha) . \qquad /12/$$

Тут початковими параметрами є амплітудні значення осьового переміщення $y(\alpha)$ та поздовжнього зусилля $N(\alpha)$ в довільній точці $x=\alpha$. Наприклад, для ступінчастої консолі маємо задачу з двома рівняннями вигляду /3/

$$L_1[y] = 0 , \; a \leqslant x \leqslant c \; ; \; L_2[y] = 0 , \; c \leqslant x \leqslant b , \qquad /13/$$

і з граничними умовами та умовами спряження

$$y_1(a) = 0 , \qquad N_2(b) \equiv f_2(b)\,y_2'(b) = 0 \; ;$$
$$y_1(c) = y_2(c) , \quad N_1(c) = N_2(c) \qquad /14/$$

/індекс "1" відповідає лівій ділянці консолі, "2" - правій /. За допомогою співвідношень /12/-/14/ побудовано характеристичний визначник задачі:

$$\Delta \equiv f_1(c)K_1'(c,a)K_2'(b,c) - f_2(c)K_1(c,a)\dot{K}_2'(b,c) . \qquad /15/$$

Показано, що у випадках $c \to a$, $c \to b$, $K_i \equiv \varphi_i(x-\alpha)$ / i = 1, 2; ступінчаста консоль/ та $K_1 \equiv K_2$ із /15/ одержуємо відомі формули. Зроблено висновок про доцільність поширення методу функцій впливу на складніші задачі коливань і стійкості континуально-дискретних пружних систем.

Розділ 2. ЗОБРАЖЕННЯ ЗАГАЛЬНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЙ ВПЛИВУ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглянуто диференціальне рівняння

$$L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = v(x); \quad x \in [a,b] \qquad /16/$$

коефіцієнти і права частина якого - неперервні функції; $p_0(x) > 0$.

Функцією Коші $K(x,\alpha)$ рівняння /16/ називають залежний від параметра α $(a \le \alpha \le b)$ розв"язок відповідного однорідного рівняння $L[y]=0$, який задовольняє наступні умови для $x=\alpha$:

$$K(\alpha,\alpha) = K'(\alpha,\alpha) = \ldots = K^{(n-2)}(\alpha,\alpha) = 0; \quad K^{(n-1)}(\alpha,\alpha) = \frac{1}{p_0(\alpha)}. \qquad /17/$$

Встановлено, що загальний розв"язок рівняння $L[y]=0$ визначається формулою

$$y = A_0 K + A_1 \dot{K} + A_2 \ddot{K} + \ldots + A_{n-1} \overset{(n-1)}{\dot{K}} \quad (A_i = const). \qquad /18/$$

Функція K рівняння /16/ існує та є единою. Для рівнянь такого вигляду, коефіцієнти яких є на даному проміжку аналітичними /голоморфними/ функціями, а $p_0(x) \equiv 1$, розроблено загальний спосіб побудови функцій Коші як степеневих рядів Тейлора з коефіцієнтами, що явно залежать від $p_i(x)$ / $i = \overline{1,n}$ / та їх похідних.

Запропоновано також спосіб побудови функцій Коші як рядів за параметром для диференціального рівняння

$$L[y] - pM[y] = 0 \qquad /19/$$

/ p - деякий параметр; вираз $L[y]$ має вигляд /16/; $M[y]$ - лінійний вираз m -го порядку; $m < n$ /. Коефіцієнти диференціальних виразів L і M від p не залежать, є інтегровними функціями змінної x / $a \le x \le b$ / та цілими аналітичними функціями деяких інших параметрів. Зображуючи функцію Коші Q рівняння /19/ як ряд

$$Q(x,\alpha) = Q_0(x,\alpha) + pQ_1(x,\alpha) + p^2 Q_2(x,\alpha) + \ldots \qquad /20/$$

,

одержуємо для знаходження його коефіцієнтів такі співвідношення:

$$Q_r(x,\alpha)=\int_\alpha^x K(x,t)\,U_{r-1}(t,\alpha)\,dt\ ; \quad r=1,2,\ldots \qquad /21/$$

$$Q_0(x,\alpha)\equiv K(x,\alpha)\ ; \quad U_{r-1}(x,\alpha)=M\left[Q_{r-1}(x,\alpha)\right]$$

/$K(x,\alpha)$ - функція Коші рівняння $L[y]=0$; у випадку $M[y]\equiv f(x)y$ із /21/ одержуються відомі формули для визначення ітерованих ядер відповідного інтегрального рівняння Вольтера/.

Розроблені способи застосовано до рівнянь із сталими коефіцієнтами й до звідних рівнянь, а також до систем таких рівнянь. Відповідні функції Коші побудовано як ряди та в замкнутій формі /в часткових випадках одержані результати збігаються з відомими/. Досліджено матричні аналоги функцій Коші та їх зв"язок з нормальними фундаментальними матрицями вказаних систем. Запропоновано загальний спосіб побудови системи нормальних фундаментальних розв"язків для рівняння /16/ при $p_0(x)\equiv 1$.

Щоб досліджувати коливання та стійкість неоднорідних пружних систем з кусково-змінними характеристиками, можна застосовувати матричний метод початкових параметрів. Для цього розглядається система диференціальних рівнянь

$$L_i[y]\equiv y^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{n}P_{\nu i}(x)\,y^{(n-\nu)}=0 \qquad (i=\overline{0,m}) \qquad /22/$$

заданих у проміжках $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ $(x_0=a;\ x_{m+1}=b)$ і формулюється задача спряження, аналогічна до задачі /13/-/14/. З застосуванням загальних розв"язків рівнянь /22/

$$y_i(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{ki}\overset{(k)}{K_i} \qquad (i=\overline{0,m}) \qquad /23/$$

виведено формули

$$\left[y(x,\alpha)\right]=\left[W(K)\right]\left[C\right]\ ; \quad \left[y(x,\alpha)\right]=\left[Y(x,\alpha)\right]\left[y(\alpha,\alpha)\right]\ ; \qquad /24/$$

$$\left[Y(x,\alpha)\right]=\left[W(K(x,\alpha))\right]\left[W^{-1}(K(\alpha,\alpha))\right].$$

Тут $[W]$ - матриця, що відповідає визначникові Вронського загального розв"язку /23/ ; $[y]$ - матриця-стовпець функції y та її послідовних похідних за аргументом x до $n-1$ -ої включно ;

$[C]$ - відповідна матриця-стовпець /індекси K, i - наразі пропущені/; $[Y]$ - нормальна фундаментальна матриця.

Розроблено спосіб продовження функції $K_0(x,\alpha)$ на проміжок $[x_0, x_{m+1}]$. Виведено співвідношення, що пов"язують відповідні функції j -го проміжку з попередніми:

$$[K_j(x,x_j,\ldots,x_1,\alpha)] = A(x,x_j,\ldots,x_1)[K_0(x_1,\alpha)]; \qquad /25/$$

$$A(x,x_j,\ldots,x_1,\alpha) \equiv [Y(x,x_j)]_j [Y(x_j,x_{j-1})]_{j-1} \ldots [Y(x_2,x_1)]_1 \qquad /26/$$

Тут $[K_j]$ - матриця-стовпець функції K_j та її послідовних похідних за аргументом x /до $n-1$ -ої/; A - відповідна перехідна матриця; $[Y(x,x_j)]_j$ - нормальна фундаментальна матриця для проміжку $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Завдяки цьому сконструйовано розв"язок системи /22/, який задовольняє разом з похідними умови спряження /є неперервним і має неперервні похідні/ і залежить від довільних сталих першого проміжку C_{K0} / $K = 0, I, \ldots, n-1$ /. Для їх визначення служать, як і в задачі /I3/-/I4/, наявні граничні умови для $x_0 = a$ та $x_{m+1} = b$. Із співвідношень /25/-/26/ одержано тотожності, що використовуються, зокрема, для спрощення характеристичних визначників. Якщо, наприклад, $K_j(x,\alpha) \equiv K(x,\alpha)$ /$j = \overline{0, n-1}$ /, то для рівняння n -го порядку та m = I із /25/ маємо

$$K(x,\alpha) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} Y_i(x,x_1) K^{(i)}(x_1,\alpha). \qquad /27/$$

Показано, що цілком подібно конструюються негладкі та розривні розв"язки задачі спряження для системи рівнянь /22//з заданими розривами розв"язку та його похідних/. Якщо розглянути, наприклад, умову спряження

$$[y_1(x_1,x_1)] = \left(c_0^0 K_0, c_0^1 K_0', \ldots, c_0^{n-1} K_0^{(n-1)}\right)\Big|_{x=x_1}, \qquad /28/$$

де права частина - матриця-стовпець, а c_0^i - величини заданих розривів, то замість співвідношень /25/-/26/ для j = I матимемо формулу

$$[K_1(x,x_1,\alpha)] = [Y(x,x_1)]_1 [c_0 K_0(x_1,\alpha)]. \qquad /29/$$

Розглянуто приклади.

Спосіб розв"язування рівняння /6/ узагальнено на такий клас диференціальних рівнянь

$$L[y]-\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{ij}\left(y^{(j-1)}\delta(x-x_i)\right)^{(j-1)}=0. \qquad /30/$$

Тут $L[y]$ - диференціальний вираз /16/ з аналітичними коефіцієнтами; r_n - ціла частина числа $n/2$; α_{ij} - деякі параметри; x_i - задані точки, причому $a<x_1<x_2<\dots<x_\nu<b$. Встановлено формулу побудови загального розв"язку рівняння /30/:

$$y(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\frac{\partial}{\partial\alpha^k}\left(Q_\nu(x,x_\nu,x_{\nu-1},\dots,x_1,\alpha)\right), \qquad /31/$$

$$Q_q(x,x_q,x_{q-1},\dots,x_1,\alpha)=Q_{q-1}(x,x_{q-1},\dots,x_1,\alpha)+\sum_{j=1}^{r_n}\alpha_{qj}Q_{q-1}^{(j-1)}(x_q,x_{q-1},\dots,x_1,\alpha)\frac{\partial^{j-1}\Phi}{\partial\alpha^{j-1}}\bigg|_{\alpha=x_q} \qquad /32/$$

$$Q_0(x,\alpha)\equiv K(x,\alpha);\qquad q=1;2;\dots;\nu.$$

/для $n=2$ звідси одержується формула /7/ /. Наведено низку прикладів застосування даних співвідношень.

Розділ 3. ОСНОВИ МЕТОДУ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РЯДІВ

Розроблено аналітичний метод дослідження коливань і стійкості форм рівноваги континуально-дискретних пружних систем, що залежать від багатьох параметрів і на які діють консервативні та неконсервативні навантаження. Для таких систем характеристичні визначники відповідних крайових задач можна будувати як ряди за характеристичним показником λ, причому маємо два випадки зображення характеристичних рядів

$$R_1(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(p,a,b)\lambda^k, \qquad /33/$$

$$R_2(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}(p,a)\lambda^{2k}. \qquad /34/$$

Тут p, a, b - параметри, що характеризують відповідно прикладені навантаження, властивості системи /розподіл мас, жорсткостей, геометричні властивості і т.п./ та сили тертя, причому заради простоти p вважається одномірним і невід"ємним.

Випадок /34/ маємо, коли не враховується тертя, при квазістатичному підході до задач про флатер систем у надзвуковому потоці газу, в припущенні про ідеальну пружність матеріалу і т.д. Уточнення постановки задачі, навіть при врахуванні малих неідеальностей, веде до зображення /33/ характеристичного ряду. Зауважимо, що існують системи, яким відповідають ряди /33/ і без урахування неідеальностей /наприклад, консольні стержні, що несуть потік рідини/.

Характеристичні ряди є цілими аналітичними функціями характеристичного показника λ і параметрів p, a, b, тому до них можна застосовувати критерії стійкості цілих функцій. Спочатку використовується відомий критерій Гурвіца: всі корені рівняння $R_1(\lambda)=0$ мають від"ємні дійсні частини тоді й тільки тоді, коли задовольняються нерівності

$$A_0>0\ ,\quad \mathcal{D}_\mu>0\ ;\quad \mu=1,2,\ldots \qquad /35/$$

/ $\mathcal{D}_\mu$ - послідовність відповідних визначників, елементами яких є коефіцієнти ряду /33/ або нулі/.

В припущенні, що досліджувана форма рівноваги стійка асимптотично для деякого фіксованого значення параметра навантаження /наприклад, для $p=0$ /, даються означення величин p_0 і p_*, які відповідають дивергентному й коливному видам втрати стійкості. При цьому значення p_0 визначається як найменший корінь рівняння $A_0(p)=0$. Значення p_* визначається послідовністю найменших коренів рівнянь $\mathcal{D}_K(p)=0$, де $\mathcal{D}_K$ - відповідні визначники Гурвіца частинних сум ряду /33/ /питання про досягнену при цьому точність розв"язується нижче шляхом побудови двобічних оцінок для p_*/.

Встановлено, що для системи, якій відповідає ряд /33/, критичним навантаженням $p_{кр}$ є менша з величин p_0 і p_*. При цьому система втрачає стійкість за Ейлером /дивергенція/, якщо $p_0<p_*$, і шляхом автоколивань /флатер/, якщо $p_*<p_0$.

Для характеристичного ряду /34/ в роботі доведено узагальнений критерій аперіодичної стійкості: необхідною й достатньою умовою того, що ціла дійсна функція роду нуль

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \qquad (a_0>0) \qquad /36/$$

має всі корені від"ємні та прості, є виконання нерівностей

$$a_0>0\ ,\quad \tilde{\mathcal{D}}_\mu>0\ ;\quad \mu=1,2,\ldots\ , \qquad /37/$$

де $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$ - визначники, одержані з /35/ заміною

$$A_{2m-1} = \mu a_m , \quad A_{2m} = a_m \qquad /38/$$

/для скінченних значень μ ці умови співпадають з відомими/. Стійкість відповідних систем є можливою, якщо всі корені рівняння $R_2(\lambda^2)=0$ - прості та від"ємні /$\lambda_i^2(p)<0$ /; нестійкість наступає при $p=p_{кр}$, коли з"являються комплексно-спряжені корені або додатний корінь. З застосуванням співвідношень /37/ і /38/ встановлено наступне: якщо із збільшенням параметра p наступає нестійкість, то "критичне" його значення "$p_{кр}$" для системи, якій відповідає характеристичний ряд /34/, є менша з величин $\tilde{p}_0$ і $\tilde{p}_*$, що визначаються подібно, як у першому випадку /для ряду /33/ /.

Далі будуються двосторонні оцінки критичних навантажень p_* для автоколивної втрати стійкості. Показано, що найпростіші з них для характеристичного ряду /33/ визначаються нерівностями

$$p_2 < p_* < p_3' \qquad /39/$$

де p_2 і p_3' - найменші корені рівнянь

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad /40/$$

З використанням критерію оперіодичної стійкості побудовано двосторонні оцінки квазікритичних значень $\tilde{p}_*$. Найпростішу оцінку для $\tilde{p}_*$ одержимо із /39/ і /40/ заміною

$$A_0 \equiv B_0 ; \quad A_{2m-1} \equiv \mu B_{2m} ; \quad A_{2m} \equiv B_{2m} \quad (m=1,2,\dots) \qquad /41/$$

Зауважимо, що відповідні "вилки" для p_* та $\tilde{p}_*$, обчислені за даними оцінками, як правило, виявляються достатньо вузькими /$\sim 2\%$/.

Для визначення декількох перших частот і дивергентних значень як функцій параметрів запропоновано двосторонні оцінки, що будуються за коефіцієнтами $B_{2K}(p)$ характеристичного ряду /34/. Вперше такий метод був розроблений і застосований у працях Бернштейна С.А. і Керопяна К.К. до незавантажених коливних систем /$p=0$ / і до консервативних задач стійкості. Запропоновані оцінки та способи знаходження функцій $B_{2K}(p)$ значно розширюють межі застосовності вказаного відомого методу /на стійкі коливні системи під дією консервативних і неконсервативних навантажень/.

Розділ закінчується дослідженням питань дестабілізації. Виведено необхідні й достатні умови її відсутності, що узгоджуються з одержаними автором раніше достатніми умовами

$$A_{2k-1}A_1^{-1} = kA_{2k}A_2^{-1} \qquad (k=1,2,\dots) \qquad /42/$$

З використанням останніх співвідношень встановлено наступне: якщо в даній коливній системі параметри сил малого зовнішнього тертя пропорційні до відповідних параметрів розподілу мас /з одним і тим самим коефіцієнтом пропорційності/, то дестабілізація відсутня. Наведено приклади застосування одержаних умов.

Розділ 4. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ НА КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ ПРУЖНИХ СТЕРЖНІВ

Розроблено спосіб побудови характеристичного визначника загальної крайової задачі для рівняння /30/ четвертого порядку, до якої зводиться дослідження поперечних коливань і стійкості прямолінійних стержнів зі скупченими факторами. Встановлено, що тут досить визначати дев"ять основних функцій, як, наприклад,

$$\Delta(x,\alpha) \equiv Q\dot{Q}' - Q'\dot{Q} \qquad (Q=Q(x,\alpha)) \qquad /43/$$

де Q будується за формулами /3I/-/32/. При цьому

$$-\alpha_{i1} = \lambda^2 M_i + \lambda \varepsilon_{i1} + c_{i1}; \quad \alpha_{i2} = \lambda^2 J_i + \lambda \varepsilon_{i2} + c_{i2}. \qquad /44/$$

Тут M_i, J_i, ε_{ij}, c_{ij} /$i = \overline{1,m}$; j = I, 2 / - характеристики зосереджених факторів у точці x_i /маса, центральний момент інерції та коефіцієнти зовнішнього тертя й пружних опор/. Зокрема, одержано рівняння

$$\Delta=0, \quad \Delta'=0, \quad \dot{\Delta}=0, \quad \dot{\Delta}'=0 \qquad \begin{pmatrix} \alpha=a \\ x=b \end{pmatrix} \qquad /45/$$

Вони відповідають жорсткому закріпленню кінців стержня; "лівому"- жорстко защемленому, "правому"- шарнірно закріпленому; третє - навпаки; останнє - шарнірно закріпленим кінцям.

Якщо зосереджена та рознесена маси прикріплені до стержня пружно, то параметри /44/ замінюються такими:

$$-\tilde{\alpha}_{i1} = \tilde{M}_i \lambda^2 \frac{\tilde{\varepsilon}_{i1}\lambda + \tilde{c}_{i1}}{\tilde{M}_i\lambda^2 + \tilde{\varepsilon}_{i1}\lambda + \tilde{c}_{i1}}; \qquad /46/$$

$$\widetilde{\alpha}_{i2}=\widetilde{\jmath}_i\lambda^2\frac{\widetilde{\varepsilon}_{i2}\lambda+\widetilde{c}_{i2}}{\widetilde{\jmath}_i\lambda^2+\widetilde{\varepsilon}_{i2}\lambda+\widetilde{c}_{i2}},$$

де $\widetilde{c}_{ij}$ та $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$ - відповідні коефіцієнти жорсткості й тертя. У випадках наявності в точці x_i обох мас / M_i та $\widetilde{M}_i$ / потрібно ввести сумарний параметр

$$\alpha_{i1}+\widetilde{\alpha}_{i1} \qquad (\alpha_{i2}+\widetilde{\alpha}_{i2}) \qquad /47/$$

Наведено низку формул для власних частот безмасових стержнів змінного поперечного перерізу зі скупченими масами.

Розроблено різні способи послідовного визначення коефіцієнтів відповідних характеристичних рядів /33/ і /34/. Досліджено вплив параметрів на основну частоту коливань конічних консолей із скупченою масою на вільному кінці ; встановлено істотну її залежність від відношення розподіленої та зосередженої мас, від параметра "конусності" та законів зміни поперечного перерізу. Одержані числові значення добре узгоджуються з окремими відомими результатами, а також з даними експериментів, проведених Ярошевичем Є. /Бялостоцька політехніка/.

Розв"язано задачу про коливання пружно закріпленої консолі з урахуванням її власної ваги. Наведено результати про вплив параметрів на основну частоту конічної консолі при дії консервативної / G / та стежної / H / сил. Побудовано області стійкості в площині параметрів (η, p) / η - параметр неконсервативності, p - параметр навантаження/ для різних значень піддатливості закріплення та величини конусності. Вивчено залежність критичної сили від жорсткості затиснення для плоскої форми згину пружної консолі-смуги. В усіх випадках встановлено, що динамічна поведінка та стійкість розглянутих систем суттєво залежить від вказаних параметрів.

Визначено перші чотири коефіцієнти характеристичного ряду /34/ для задачі про стійкість рухомого стержня під дією стежної сили й одержано оцінки $108,20 < p_* < 109,68$. Вони добре узгоджуються з відомими значеннями та ілюструють переваги даного методу.

Сформульовано задачу про область вірогідної стійкості в площині параметрів (η, p) для неконсервативних континуально-дискретних систем /тобто область, у якій асимптотична стійкість стану рівноваги зберігається для будь-яких допустимих значень усіх інших характеристик системи/. Спочатку вивчено задачу для систем з двома ступенями вільності. Показано, що прямолінійна форма рівноваги стержня може ставати нестійкою й у випадках його розтягу, причому для $H > G$ і $\eta > 1$ втрата стійкості є дивергентною, а для $H < G$ і $\eta < 0$ - флатерною. Далі з застосуванням характеристичного ряду /33/ і двосторонніх оцінок запропоновано спосіб побудови областей вірогідної стійкості в загальному випадку.

Розглянуто також задачі про флатер лінійних пружно-в"язких систем, матеріал яких підлягає законові

$$\gamma_m \overset{(m)}{\sigma} + \ldots + \gamma_1 \dot{\sigma} + \sigma = E\left(\varepsilon + \mu_1 \dot{\varepsilon} + \ldots + \mu_n \overset{(n)}{\varepsilon}\right) \quad (n \geq m) \qquad /48/$$

Встановлено обмеження на параметри γ_i , μ_j моделі, що забезпечують відсутність самозбудження коливань в таких системах /для випадку $m = n = 1$ одержані обмеження співпадають з відомими/. Показано можливість побудови наближених формул для визначення критичних значень флатера в розглянутих задачах.

<u>Розділ 5</u>. ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДВО- І ТРИВИМІРНИХ МОДЕЛЕЙ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Розглянуто питання про зображення характеристичних визначників як рядів за одним із параметрів коливної системи або за деякою їх сукупністю /питання про те, який чи які з них при цьому доцільно вибрати, диктується часто фізичним змістом задачі/. Якщо таким параметром є характеристичний показник λ , то одержимо характеристичні ряди вигляду /33/ або /34/.

В дослідженнях малих коливань і стійкості пружних систем виникає часто загальна задача на власні значення для рівняння

$$y^{IV} - \tilde{\alpha} y''' - \beta y'' - \gamma y' - \delta y = 0 \ . \qquad /49/$$

Його коефіцієнти вважаються цілими функціями характеристичного показника λ та інших параметрів. Для випадку відсутності зосереджених факторів з використанням функції $K(x,\alpha) \equiv \varphi(x-\alpha)$ виведено зображення відповідних дев"яти основних функцій вказаної задачі.

Шляхом якісного аналізу відповідних характеристичних рядів одержано висновки про вплив різних параметрів на частоти власних коливань завантажених систем, критичні навантаження, характер втрати стійкості та ін. Так, наприклад, для задач про панельний флатер пружно закріплених прямокутних пластинок, тришарових колових циліндричних оболонок з пружно защемленими краями і т.п., коли в рівнянні /49/

$$\tilde{\alpha} = 0 \ , \quad \beta = a_1 N_x + a_2 \ , \quad \gamma = \pm a_3 u \ , \quad \delta = a_4 \omega^2 - q \qquad /50/$$

встановлено наступне: напрям потоку / $\gamma<0$ або $\gamma>0$ / при будь-яких значеннях всіх інших параметрів не впливає на частоти коливань і критичні навантаження, що відповідають дивергенції або флатеру; дивергентна втрата стійкості є неможливою для розтягуючих зусиль / $N_x>0$ /, а також для стискуючих, якщо $\beta\geqslant 0$, $q\geqslant 0$; при визначенні критичних значень параметрів, що відповідають автоколивній втраті стійкості, можна приймати $q=0$, зокрема, критична швидкість флатера не залежить від зусилля N_x /перпендикулярного до потоку/ або зусилля N_s /в коловому напрямку/.

Розглянуто також деякі крайові задачі, характеристичні ряди яких мають вигляд /33/. Наприклад, для задач про стійкість пружно защемленого консольного стержня, стиснутого / $\beta<0$ / слідкуючою силою, що запізнюється в часі на деяку величину $\Delta>0$, встановлено: дивергентна втрата стійкості тут неможлива; прямолінійна форма рівноваги нестійка для якзавгодно малої сили; цей же висновок одержано для розтягуючої сили / $\beta>0$ /, що слідкує за поворотом вільного кінця з деяким випередженням $\Delta<0$.

Зауважимо, що деякі з одержаних висновків співпадають з окремими відомими результатами, встановленими чисельними методами.

Досліджено стійкість плоскої форми рівноваги пружно защемленої вздовж одного із країв прямокутної пластинки, завантаженої на протилежному краю стежним навантаженням інтенсивності H; два інші краї - шарнірно закріплені. Виявлено істотну залежність нижчих частот і критичних значень, а також характеру втрати стійкості від відношення сторін і вказаних вище параметрів.

Метод характеристичних рядів застосовано до дослідження коливань і стійкості пружних пластинок довільної форми. Розглянуто відповідну двовимірну крайову задачу

$$\Delta^2\tilde{u}+p\Delta\tilde{u}-\delta\tilde{u}=0, \qquad \tilde{u}\Big|_{\Gamma}=0, \quad \Delta\tilde{u}\Big|_{\Gamma}=0. \tag{51}$$

Тут $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; p, δ - безрозмірні параметри навантаження і частоти; Γ - границя однозв"язної області G, що відповідає формі пластинки. В припущенні, що аналітична в одиничному крузі функція $w=f(z)$ $\quad (w(0)=0\ ;\ |w'(0)|>0)$

відображує конформно цей круг на область G, розглянуто задачу на власні значення

$$\Delta u + \mu^2 |w'|^2 u = 0 \ , \quad u\Big|_{\rho=1} = 0 \ ;$$
$$\delta = \mu^2(\mu^2 - p) \ ; \quad \rho = |z| \ . \qquad /52/$$

Будуючи обмежений розв"язок рівняння /52/ у вигляді ряду

$$u = u_0 + \mu^2 u_1 + \mu^4 u_2 + \ldots ,$$

для визначення його коефіцієнтів одержуємо систему рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial z \, \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} |w'|^2 u_{k-1} \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

/ $u_i = 0$ при $i < 0$ /. Завдяки цьому побудовано рівняння

$$C_{nn}(\mu^2) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \ , \quad S_{nn}(\mu^2) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \ ,$$

ліві частини яких є характеристичними рядами вигляду /34/ і зображують у сукупності "характеристичний визначник" задач /51/ і /52/.

Дану схему проілюстровано на задачі, для якої

$$w = Rz(1 + \beta z) \ ; \quad R > 0 \ , \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2} \qquad /53/$$

Показано, що критичні значення $P_{кр}$ зменшуються із збільшенням β до 30%, а основні частоти за "радіальною", "симетричною" і "антисиметричною" формами - до 30%, 25% і 44% відповідно.

Питанням розвитку методу характеристичних рядів стосовно до аналогічних задач для інших умов закріплення присвячена кандидатська дисертація Тацій Р.М.

Далі досліджується динамічна поведінка плоскої панелі, яка обтікається з одного боку надзвуковим газовим потоком, а з протилежного - має зосереджені та пружно прикріплені маси /осцилятори/. Побудовано характеристичні рівняння задачі вигляду /45/. Встановлено, що безмасова панель з приєднаним осцилятором і зосередженою пружно підкріпленою масою /в точці $x = x_0$ / є завжди стійкою асимптотично в надзвуковому потоці. Якщо відношення маси осцилятора / m_1 / до розподіленої маси панелі / $\rho h a$ / $\mu \leqslant 1$, то втрата стійкості обумовлена злиттям першої та другої частот. Квазікритичне значення γ^* швидкості потоку зі збільшенням μ необмежено зростає. При цьому залежність $\gamma^*(\mu)$ може бути монотонною або немонотонною /на це впливає величина безрозмірної координати осцилятора ξ_1 /. Проілюстровано характер зміни частот $\omega_1^2(\gamma)$ і $\omega_2^2(\gamma)$ для різних значень безрозмірної власної частоти ω_0 осцилятора.

Для достатньо великих ω_0 критичні значення швидкості потоку γ^* є близькими до відповідних критичних значень панелі зі скупченою масою, а для малих ω_0 взаємозв"язок системи панель-осцилятор стає слабким. Встановлено, що функції $\gamma^*(\omega_0^2)$ можуть мати значний мінімум /для $\eta_1 = 0,5$/, незначний /$\eta_1 = 0,4$/, або взагалі його не мати /$\eta_1 = 0,3$/. Але в усіх випадках ці функції мають істотний максимум у проміжку $35 < \omega_0^2 < 50$. Отже, вибираючи відповідно параметри системи, можна її значно стабілізувати.

Подібно досліджено прямокутну панель / закріплену шарнірно вздовж країв, паралельних до потоку, і пружно защемлену на інших краях / з осцилятором на відрізку $x = x_0$. Одержано висновки : дивергентна втрата стійкості тут неможлива; зміна напрямку обтікання на протилежний / $\pm\gamma$ / не впливає на частоти й критичні значення; у випадках, коли $\mu \to \infty$, критичні значення швидкості потоку необмежено зростають.

Виведено рівняння малих радіальних коливань ізотропної кулі

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)\upsilon'\right)' - 4\mu'\upsilon r^{-3} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \left(\upsilon' = \frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) \qquad /54/$$

де

$$f(r) = r^{-2}\left(\lambda(r) + 2\mu(r)\right); \quad \upsilon(r,t) = r^2 u(r,t);$$

/λ, μ - параметри Ляме/, $\rho = \rho(r)$ - питома маса, $u(r,t)$ - радіальне переміщення, r - радіальна змінна /$0 \leqslant r \leqslant R$; R - радіус кулі/. Розглянуто відповідну крайову задачу для суцільної кулі

$$\left(f(r)y'\right)' + \left[\omega^2\rho(r)r^{-2} - 4\mu'(r)r^{-3}\right]y = 0,$$

$$\lim_{r \to 0} y(r)r^{-2} < \infty; \quad f(R)y'(R) + ey(R) = 0; \quad e = -\frac{4\mu(R)}{R^3} \qquad /55/$$

/ звідси, враховуючи знак похідної $\mu'(R)$ /, можна одержувати якісні висновки про частотний спектр/.

Побудовано характеристичний ряд задачі для однорідної кулі. Встановлено суттєву залежність хвильових чисел від коефіцієнта Пуасона ν /зокрема, всі частоти необмежено збільшуються, коли $\nu \to 0,5$/. Подібні рівняння та висновки одержано для задач про радіальні коливання довгих циліндрів. Виведено також загальні співвідношення вигляду /54/-/55/ для ортотропних моделей і відзначено, що до них метод характеристичних рядів застосовується аналогічно.

Розділ 6. СПОСІБ ЧАСТКОВОЇ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ТА ПРОБЛЕМА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ МАЛИХ КОЛИВАНЬ

Під час вивчення малих коливань консервативних механічних систем зі скінченною кількістю ступенів вільності доцільно використовувати диференціальні рівняння руху в зусиллях або в переміщеннях, будуючи відповідні матриці впливу жорсткостей і піддатливостей. Такі системи найчастіше є розрахунковими моделями об"єктів зі сталим розподілом параметрів, які одержують з них шляхом дискретизації. Цей спосіб узагальнюється з застосуванням функцій впливу на задачі про коливання та стійкість неоднорідних пружних систем.

Записано диференціальні рівняння руху в зусиллях або в переміщеннях

$$A\frac{d^2q}{dt^2}+Cq=F(t)\ ;\quad q=\beta\left(F(t)-A\frac{d^2q}{dt^2}\right)\ , \qquad /56/$$

де A – інерційна матриця; q – матриця-стовпець узагальнених координат; C та β – матриці жорсткості та піддатливості системи /$\beta = C^{-1}$/. Ці рівняння описують малі коливання системи, якщо досліджуваний стан рівноваги є стійким. Матриці β /C/ є симетричними для незавантажених систем або у випадках дії консервативних навантажень; при наявності неконсервативних параметричних навантажень – несиметричними.

Проілюстровано побудову матриці піддатливості β для рівняння вигляду /6/, застосованого до задачі про крутні коливання консольного вала, який несе тонкі диски в точках x_i /$i=\overline{1,K}$/. Якщо знехтувати масою вала проти маси дисків, то

$$\beta_{ij}=K_{ia}=\int_a^{x_i}\frac{ds}{f(s)}\quad (i\leqslant j)\ ;\quad \beta_{ji}=\beta_{ij} \qquad /57/$$

/ $f(x)=GJ_K(x)$ – крутна жорсткість вала/. Цілком подібно будуються рівняння руху з урахуванням сил тертя та пружних зв"язків.

Складаючи рівняння /56/, можна враховувати й розподілену масу, дописуючи до моментів інерції дисків J_i величини I_i

$$I_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\rho(x)J(x)\,dx\quad (i=\overline{1,K+1})\ ;\quad x_0=a\ ,\ x_{K+1}=b \qquad /58/$$

/ $\rho(x)$ та $J(x)$ – густина матеріалу вала та полярний момент інерції його поперечного перерізу/. Інший спосіб її врахування - введення додаткових дисків з моментами інерції /58/, зосереджених у деяких проміжних точках $\tilde{x}_i$ /$x_{i-1} < \tilde{x}_i < x_i$ /. Важливо, що й коли нема дисків / $\gamma_i = 0$ /, можна визначати величини /58/, тобто застосовувати часткову дискретизацію /жорсткість вала не дискретизується/. Вибираючи відповідним чином точки x_i , можна одержувати з потрібною точністю двобічні наближення до частот /вперше в задачі для однорідної струни це показав Дж.П.Ден-Гартог /.

Метод часткової дискретизації проілюстровано на задачі про вільні поперечні коливання пружних консолей змінної жорсткості $f(x)$. Коефіцієнти впливу визначено формулою / $\beta_{ji} = \beta_{ij}$ /

$$\beta_{ij} = \int_0^{x_i} \frac{1}{f(s)} (x_i - s)(x_j - s)\,ds \quad (i \leq j) \qquad /59/$$

Обчислення проведено для конічної консолі круглого поперечного перерізу. Розглянуто три варіанти обчислення коефіцієнтов впливу /точна формула, чисельне обчислення інтегралів /59/, точні формули для відповідної консолі ступінчасто-сталого перерізу/. Показано, що метод приводить при цьому до майже однакових середніх значень двобічних оцінок основної частоти, починаючи з $n = 10$ /n - кількість зосереджених мас; вони незначно відрізняються від відомого точного значення / $\sim$ 1% /. Подібний результат одержано для задачі про стійкість пружної консолі під дією власної ваги, де дискретизується розподілене навантаження.

Визначено коефіцієнти β_{ij} та наведено приклади їх застосування для круглих пластинок сталої товщини /осесиметричні коливання $n = 0$/. Побудовано також функції впливу для неосесиметричних задач /n = 1; 2, 3,.../. Завдяки цьому неважко визначати елементи матриць β в складніших випадках /довільні n , пружно закріплені краї, наявність змінної розподіленої маси та пружної основи, задачі для кільцевих пластинок, для пологих сферичних оболонок тощо/. Встановлено застосовність методу до задач про коливання круглих пластинок та циліндричних оболонок, товщини яких змінюються за степеневими законами, а також до деяких задач для конічних оболонок.

Досліджено радіальні коливання неоднорідних куль. Для задачі /55/, в якій

$$\rho(r) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \delta(r - r_i), \qquad \mu'(r) = \sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu_{i-1}) \delta(r - r_i), \qquad /60/$$

побудовано частотне рівняння в явному вигляді. Проаналізовано найпростіший випадок / $n = 1$/. Наведено приклади співвідношень, що дозволяють оцінювати вплив на основну частоту параметрів неоднорідності /модулів об"ємного стиску внутрішнього та зовнішнього шарів, розташування та величини маси M_1, розподіленої рівномірно на поверхні $r = r_1$ /. Побудовано частотні рівняння для порожнистих куль. Наведено низку якісних висновків. Зокрема, якщо кульовий шар, поверхні якого $r = a$ та $r = R$ - вільні / $a \leq r \leq R$ / має достатньо велику масу M_1, розподілену рівномірно на поверхні $r = r_1$, то його найменша частота ω_1^2 є близькою до нуля, а всі інші - близькими до частот двох кульових шарів: перший з них має вільну зовнішню поверхню та закріплену внутрішню, другий - вільну внутрішню й закріплену зовнішню.

Одержано також формули коефіцієнтів β_{ij} для суцільної неоднорідної кулі. Для дальшого дослідження вільних та вимушених коливань і знаходження амплітудних значень переміщень та напружень можна застосовувати відомі методи / С.П.Тимошенко /.

Остання частина розділу присвячена одному із способів обгрунтування динамічного методу дослідження континуальних пружних систем. Розглядається деяка система, на яку діють задані навантаження $p_1, p_2, \dots, p_k$. Вони можуть мати консервативні та неконсервативні складові, що змінюються монотонно в певній області. Система вважається такою, що в цій області існує деякий стан її рівноваги /незбурена форма/, наприклад для $p_i = 0$ / $i = 1, 2, \dots, k$ /.

Нехай дослідження збурених форм руху даної системи /малих коливань її біля незбуреної форми рівноваги/ зведено до змішаної задачі вигляду

$$L[u(x,t)] + q(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) = F\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t}\right);$$

$$U_{i0}[u(x,t)]\Big|_{x=0} = 0\,; \quad U_{i1}[u(x,t)]\Big|_{x=1} = 0, \quad (i = \overline{1,n}) \qquad /61/$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)\,; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

де L - лінійний диференціальний вираз порядку $2n$ за змінною x; $u(x,t)$ - відхилення системи від рівноважного стану / $u \equiv 0$ /; функція $q(x)$, що характеризує розподіл маси, додатна; стала

θ /коефіцієнт розподіленого тертя/ - невід"ємна; F - деяка неперервна функція, що залежить нелінійно від своїх аргументів і зникає для $u \equiv 0$; U_{i0} , U_{i1} - лінійні однорідні форми щодо u та її похідних за аргументом x до порядку $2n-1$ включно; $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - деякі задані функції. Вважається, що збурення $u(x,t)$ належать до множини $\mathcal{U}$ - дійсних, неперервних за сукупністю аргументів функцій, які задовольняють крайові умови задачі /61/, мають неперервні похідні до порядку $2n$ за змінною x і до другого порядку за часом $t \in [0,T]$ з нормою

$$\|u\| = \left(\int_0^1 q(x)\, |u(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Близькість збурених рухів $u(x,t)$ до незбуреного $u \equiv 0$ /для якого $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ / характеризується нормою $u(x,t)$ та її похідної за змінною t . Розглядається відповідна крайова задача

$$L[y(x)] - \omega^2 q(x) y(x) = 0 \qquad /62/$$

$$U_{i0}[y(x)]\Big|_{x=0} = 0 \; ; \quad U_{i1}[y(x)]\Big|_{x=1} = 0 \quad (i = \overline{1,n})$$

Її характеристичний визначник позначено як $\Delta(\omega^2, p)$ $/p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)/$. Всі корені рівняння $\Delta = 0$ для $p = 0$ є додатними з єдиною точкою скупчення на безмежності /частоти власних коливань відповідної незавантаженої пружної системи/; вони вважаються простими. Ці властивості коренів, завдяки їх аналітичній залежності від параметрів, будуть зберігатися і для $p \neq 0$ до деяких значень p^* /критичних/. Тому існує мінімальна область Q така, що для $p \in Q$ виконуються нерівності

$$0 < \omega_1^2(p) < \omega_2^2(p) < \ldots < \omega_n^2(p) < \ldots \qquad /63/$$

Суттєве порушення цих співвідношень при переході параметра p через ґраницю області Q полягає в тому, що : I^0/ будь-які два сусідні корені характеристичного визначника задачі /62/, що зливаються на границі області Q $/p = p^*/$, стають комплексно-спряженими $\alpha^2(p) \pm i\beta(p)$ для деякої достатньо близької до границі зовнішньої точки p області Q /автоколивний вид втрати стійкості/; 2^0/ корінь $\omega_1^2(p)$, який перетворюється на нуль для $p = p^*$, стає від"ємним /дивергентна втрата стійкості/.

Вважається, що нелінійна функція F і початкові збурення

$\varphi(x)$ та $\psi(x)$ задачі /61/ задовольняють умови:

а/ $\|F_1 - F_2\| \leqslant G(t)\|u_1 - u_2\|^{1+q}$, $\forall u_1, u_2 \in U$

де $F_i = F(u_i)$, $i = 1, 2$; $G(t)$ - деяка неперервна додатна функція, характеристичне число якої $\gamma < -\beta$, $q > 0$ - деяка стала;

б/ функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ можна зобразити регулярно збіжними рядами за власними функціями $y_n(x)$ задачі /62/; коефіцієнти цих рядів належать до деякої компактної множини простору l_2; регулярно збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \varphi_n y_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \psi_n y_n(x)$$

де

$$\varphi_n = (\varphi, z_n), \quad \psi_n = (\psi, z_n); \quad \{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

послідовність власних функцій спряженої до /62/ задачі.

Встановлена теорема: нехай нелінійна функція F і початкові збурення $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задачі /61/ задовольняють умови а/ та б/, а параметр навантаження p належить до області Q або є достатньо близькою до її границі зовнішньою точкою; тоді існує єдиний розв"язок $u(x,t) \in U$ задачі, що зображується як ряд за власними функціями задачі /62/

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) y_n(x), \qquad /64/$$

причому

$$m\|u\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|^2 \leqslant M\|u\|^2$$

де m і M - деякі сталі, що не залежать від функції $u(x,t)$. Ця теорема доведена Байдаком Д.А. в його кандидатській дисертації.

Далі розглядається стійкість розв"язків задачі /61/. При цьому встановлено наступні теореми:

А/ Якщо параметр навантаження $p \in Q$, коефіцієнт тертя $\beta > 0$ і виконуються умови а/ та б/ для нелінійної функції F і початкових збурень $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то нульовий розв"язок задачі /61/ стійкий асимптотично.

Б/ Якщо p достатньо близька до границі області Q зовнішня точка, виконуються умови а/ та б/, коефіцієнт тертя $\beta > 0$, а у випадках 1^0/, крім того $2\beta < P/\alpha$, то нульовий розв"язок задачі /61/ - нестійкий.

Відзначено, що такі ж питання розглядалися й для деяких двовимірних систем /зокрема, для задачі про коливання й стійкість прямокутної ортотропної пластинки в надзвуковому потоці газу/; доведено аналогічні теореми, що обгрунтовують застосовність динамічного методу до розглянутого класу систем. Для розвитку подібних досліджень і їх поширення на континуально-дискретні пружні системи може виявитися доцільним застосування способу часткової дискретизації.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Розроблено метод характеристичних рядів якісного дослідження малих коливань і стійкості континуально-дискретних пружних систем з довільними допустимими законами розподілу характеристик, що дозволяє вивчати залежність від параметрів частот коливань таких систем і критичних значень навантажень для дивергенції та флатера :

- поняття характеристичних рядів, їх види та способи побудови;
- узагальнення двосторонніх оцінок для нижчих частот і ейлерових значень на системи, завантажені консервативними та неконсервативними силами;
- застосування до аналізу характеристичних рядів критеріїв стійкості цілих аналітичних функцій;
- узагальнення критерію аперіодичної стійкості на цілі функції;
- виведення двосторонніх оцінок критичних значень навантажень для автоколивної втрати стійкості ;
- способи одержання якісних висновків про вплив параметрів на частотні спектри, критичні значення та характер втрати стійкості ;
- дослідження ефекту дестабілізації й виведення необхідних і достатніх та апріорних умов її відсутності.

Встановлено фундаментальну властивість функції Коші, що дозволило розробити якісно нові способи побудови загальних розв"язків для лінійних диференціальних рівнянь і систем /як рядів Тейлора та рядів за параметрами/, а також для одного класу рівнянь з особливостями в коефіцієнтах типу імпульсних функцій. На цій основі запропоновано способи одержання універсальних характеристичних визначників та характеристичних рядів у задачах з відокремлюваними змінними про коливання і стійкість пружних систем. Узагальнено метод початкових параметрів на пружні системи з довільно змінними допустимими характеристиками. Запропоновано загальні способи побудови нормальних фундаментальних матриць та відповідних перехідних матриць.

Виведено універсальні характеристичні визначники крайових задач для рівнянь другого та четвертого порядків, вивчено їх структуру та побудовано відповідні характеристичні ряди. Сформульовано та розв"язано задачу про знаходження в просторі параметрів областей вірогідної стійкості континуально-дискретних пружних систем під дією неконсервативних навантажень. Запропоновано способи побудови та визначення меж застосовності розрахункових формул для нижчих частот і критичних значень дивергенції і флатера.

Розроблено метод часткової дискретизації дослідження задач коливань і стійкості континуально-дискретних пружних систем, що грунтується на побудові матриць впливу піддатливостей /жорсткостей/, елементи яких є функціоналами від функцій розподілу характеристик системи /її жорсткості, навантажень, параметрів Ляме та ін./.

Обгрунтовано метод малих коливань дослідження класу континуальних пружних систем, що втрачають стійкість шляхом дивергенції або флатера. Встановлено теореми існування та єдиності розв"язків відповідних нелінійних задач і теореми про /не/стійкість за першим наближенням.

Вказані методи й способи застосовано до вивчення впливу параметрів на динамічну поведінку консервативних і неконсервативних пружних систем, до визначення для них областей стійкості в просторі параметрів та розв"язання інших прикладних задач. На цій основі розроблено також відповідні методичні рекомендації /серед них МР 213-87, видані Держстандартом СРСР/.

Сукупність отриманих результатів можна трактувати як науковий напрямок в теорії коливань і стійкості континуально-дискретних пружних систем з довільним допустимим розподілом параметрів.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Зорий Л.М. К устойчивости равновесия неконсервативных систем // Вопросы механики реального твердого тела.- 1964.- Вып.3.- Киев: Наукова думка.- С. 113-119.
2. Зорій Л.М. До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами // Доп. АН УРСР.- Сер.А.- 1968.- № 11.- С. 992-995.
3. Зорій Л.М. Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач для систем з розподіленими параметрами // Доп. АН УРСР.- Сер.А .- 1968.- № 12.- С. 1072-1075.
4. Зорий Л.М. Об условиях отсутствия дестабилизации в системах с распределенными параметрами // Прикл. механика.- 1969.- Т.5.- Вып. 9.- С. 98-102.

5. Балінський А.І. і Зорій Л.М. Про одне представлення загального розв"язку системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР.- Сер.А.- 1971.- № 3.- С. 195-197.
6. Балинский А.И., Зорий Л.М. К исследованию зависимости низких частот деформируемых систем от параметров // Физ.-хим. механика материалов.- 1971.- № 3.- С. 99-100.
7. Зорий Л.М., Чернуха Ю.А. Влияние опорных закреплений на динамическую устойчивость упругого стержня // Прикл. механика.- 1971.- Т. 7.- Вып. 2.- С. 134-136.
8. Парасюк Э.М., Зорий Л.М. К вопросу о размножении обыкновенных дифференциальных уравнений // Украинский математ. журнал.- 1971.- № 6.- С. 804-807.
9. Зорий Л.М., Ли Гюн-ы. Устойчивость консольного стержня с резервуаром при действии следящей и консервативной сил // Сопротивление материалов и теория сооружений.- Киев: Будівельник, 1971.- Вып. 14.- С. 103-106.
10. Зорий Л.М., Теребушко И.И. О влиянии осевых сил на поперечные колебания упругих стержней // Вестник Львов. политехн. ин-та.- 1971.- № 63.- С. 135-139.
11. Байдак Д.А. і Зорій Л.М. Про дослідження коливань і стійкості стержнів змінної жорсткості методом двосторонніх оцінок // Доп. АН УРСР.- Сер.А.- 1972.- № 6.- С. 548-551.
12. Зорий Л.М. К развитию приближенных способов определения критических нагрузок упругих систем // IУ Всесоюзн. конф. по пробл. устойчивости в строит. мех. - Тез. докл.- Харьков.- 1972.- С. 19-20.
13. Зорій Л.М. і Ісаєв Ю.І. Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флатері // Доп. АН УРСР.- Сер.А.- 1973.- № 6.- С. 529-531.
14. Бердник Я.С. і Зорій Л.М. Один спосіб якісного дослідження коливань і стійкості систем з розподіленими параметрами // Доп. АН УРСР.- Сер.А.- № 7.- 1973.- С. 621-623.
15. Подстригач Я.С., Байдак Д.А., Зорий Л.М. К обоснованию динамического метода исследования упругих систем // Докл. АН СССР.- 1974.- Т.214.- № 5.- С. 1049-1051.
16. Зорій Л.М. і Тацій Р.М. До дослідження коливань і стійкості пружних пластинок довільної форми // Доп. АН УРСР.- Сер. А.- 1974.- № 2.- С. 154-157.

17. Байдак Д.А., Зорий Л.М. Один способ обоснования динамического метода исследования упругих систем // Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1975.- Вып. I.- С. 89-98.

18. Байдак Д.А., Зорий Л.М. Обоснование динамического метода исследования некоторых двумерных систем // Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1977.- Вып. 5.- С. 93-96.

19. Зорий Л.М. К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем // Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1978.- Вып. 7.- С. 16-20.

20. Зорий Л.М. Об одном фундаментальном свойстве функций влияния// Докл. АН УССР.- Сер. А.- 1978.- № 9.- С. 806-808.

21. Зорий Л.М. К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем // Докл. АН УССР.- Сер. А.- 1978.- № II.- С. 991-994.

22. Зорий Л.М. О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР.- Сер. А.- 1979.- № 5.- С. 351-355.

23. Зорий Л.М. Новый метод построения общих решений линейных дифференциальных уравнений и динамическое поведение сложных упругих систем // Препринт Ин-та прикл. матем. им. М.В.Келдыша АН СССР.- 1981.- № Т-09961.- С. 82-84.

24. Зорий Л.М. Об универсальных характеристических уравнениях в задачах колебаний и устойчивости упругих систем // Известия АН СССР.- Механика твердого тела.- 1982.- № 6.- С. 155-162.

25. Зорий Л.М. Развитие метода начальных параметров и динамическое поведение упругих систем // I Всесоюзн. конф. "Механика неоднородных структур": Тез.докл.- Киев, 1983.- Наукова думка.- С. 88.

26. Антонюк Я.П., Зорий Л.М., Попов Б.А. Исследование методом характеристических рядов устойчивости равновесной формы упругих систем // Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1983.- Вып.17.- С. 87-90.

27. Ярошевич Є., Зорій Л. Про застосування методу характеристичних рядів до аналізу згинальних коливань стержня з врахуванням власної ваги // Наукові зошити Бялостоцької політехніки /ПНР/, 1983.- № 40.- С. 89-98 /польською мовою/.

28. Ярошевич Є., Зорій Л. Згинальні коливання консольної балки змінного перерізу // Розправи інженерські, 1985.- Т. 33.- Вип. 4.- С. 537-547 /польською мовою/.

29. Зорий Л.М. Метод частичной дискретизации в задачах динамики упругих систем с переменным распределением параметров // Всесоюзная конф. "Новые подходы к решению диф. уравнений": Тез. докл.- М.: I987.- С. 49-50.
30. Зорий Л.М. О новых применениях фундаментальных решений при изучении неоднородных структур // П Всесоюзн. конф. "Механика неоднородных структур": Тез. докл.- Львов, I987.- С. II2-II3.
3I. Зорий Л.М. /руководитель темы/, Байдак Д.А., Старовойтенко Ж.В., Куриленков В.И., Сорокатый Н.И. /Львовский политехнический ин-т/. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и малых колебаний прямолинейных стержней переменного сечения. Расчеты и испытания на прочность. Методические рекомендации МР № 2I3-87.- М.: Госстандарт СССР.- Всесоюзный научно-исслед. ин-т по нормализации в машиностроении /ВНИИНМАШ/, I987.- 43 с.
32. Зорий Л. Фундаментальные решения и методы исследования деформируемых систем // XIII Международный колоквиум "Модели в проектировании и конструировании машин", Гливице, ПНР, I989.- С. 277-284.
33. Зорий Л. Метод частичной дискретизации в задачах устойчивости и колебаний упругих тел // УП симпозиум по динамике конструкций.- "Механика".- № I8 /Жещув, ПНР/.- I989.- С. 77-80.
34. Зорий Л.М. Задачи динамики упругих систем и метод частичной дискретизации // Междунар. конф. "Гибкая автоматизация" '90.- Братислава, I990.- С. I46-I47.
35. Зорий Л.М. Метод частичной дискретизации в задачах колебаний и устойчивости упругих систем // Ш Всесоюзн. конф. "Механика неоднородных структур": Тез.докл. - Львов, I99I.- С. I3I.
36. Зорий Л.М., Сорокатый Н.И. О стабилизирующем влиянии геометрических и жесткостных параметров на флаттер панелей с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке // Известия Российской АН. Механика твердого тела.- I992.- № I.- С. I44-I52.
37. Зорій Л. Фундаментальні розв"язки та розвиток методів дослідження механічних систем // I міжнар. симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доп.- I993.- С. 73-74.
38. Ярошевич Е., Зорий Л. Изгибные колебания и устойчивость балок с переменными параметрами // Прикл. механика.- I994.- Т. 30.- № 9.- С. 75-8I.

39. Зорій Л., Сорокатий М. Метод функцій впливу в неконсервативних задачах теорії пружної стійкості // II міжнар. симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тез. доп.- 1995. - С. 40.

40. Зорий Л.М. Применение фундаментальных решений в задачах статики и динамики упругих систем с переменным распределением параметров /Методич. указания/.- Львов, 1988.- ЛПИ.- 35 с.

Папір офсетний. Друк офсетний. № зам. 96/5- Тираж 100 прим.
Друкарня Тзов "Простір М"