

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ  
ЗАПОРІЗЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

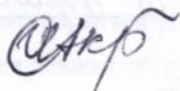
**СКРИПНИК ІРИНА АНАТОЛІВНА**

**ДВОВИМІРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ  
РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ  
У ПЛОСКОМУ ШАРІ**

01.02.04 – Механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук



ЗАПОРІЖЖЯ – 1996

АВ 34.998

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Запорізькій державній інженерній академії

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук,  
професор Пожуєв Володимир Іванович

Науковий консультант – кандидат фізико-математичних наук,  
доцент Шамровський Олександр  
Дмитрович

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук,  
професор Павленко Анатолій Васильович  
доктор технічних наук,  
професор Бешенков Сергій Миколайович

Провідна організація – Дніпропетровський державний  
університет  
Міністерство Освіти України

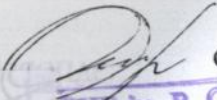
Захист відбудеться "20" червня 1996 р. о 14 год.

на засіданні спеціалізованої вченої ради К 08.04.02 при Запорізькому державному університеті за адресою: 330600, м. Запоріжжя, МСП-41, вул. Жуковського, 66.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Запорізького державного університету

Автореферат розісланий "18" травня 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради  
кандидат технічних наук, доцент

  
Сисоев Ю.О.  
ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00777012 (0)

АВ - 34.998

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність проблеми.** Перехідні хвильові процеси у тонкому шарі, які вивчаються за допомогою сумісного застосування методів асимптотичного та групового аналізу динамічних рівнянь теорії пружності на основі двовимірних моделей, є **предметом дослідження** дисертаційної роботи.

**Об'єктом**, в якому моделюються двовимірні нестационарні хвилі, є тонка пластина під дією раптово прикладеного навантаження.

Інтерес до проблем розповсюдження хвиль, спричинених навантаженням, що швидко змінюється, пояснюється важливими застосуваннями теорії розповсюдження хвиль в багатьох розділах технічних наук. Задача про розповсюдження пружних хвиль у плоскому шарі розв'язується вже досить тривалий час, але в колі цієї проблеми залишається ще достатня кількість невирішених питань. Задачі такого класу у постановці математичної теорії пружності настільки складні, що їх, як правило, вдається розв'язати лише приблизно.

Існує два основних засоби дослідження перехідних хвильових процесів в шарі. По-перше, можна розв'язувати ці задачі на основі тривимірних рівнянь теорії пружності. Такий підхід застосовано, наприклад, в роботах І.Н. Векуа, В.К. Кабулова, Г.І. Петрашеня, У.К. Нігула, Р. Розенфельда, Ю.Мікловіца. Він пов'язаний з подоланням дуже складних технічних проблем, що викликані, зокрема, внутрішнім багаторазовим відбиттям фронтів хвиль, що розповсюджуються, від меж шару. Тому цей підхід, що розкриває фізичний зміст проблеми, треба в першу чергу розглядати як засіб побудови нових моделей та аналізу точності існуючих.

По-друге, широко використовуються різноманітні спрощені двовимірні моделі. Але їх застосування не завжди обгрунтоване та не дає можливості отримання відповідей на багато важливих питань. Наприклад, класичні рівняння згину пластини, які розв'язували раніше А.І. Лур'є, Л.С. Гільман, Р.І. Мазінг, Ф.А. Соколов, П.В. Чернаков, дають нескінченну швидкість

розповсюдження збурення, що суперечить тривимірним рівнянням. Динамічні рівняння узагальненого плоского напруженого стану, що були розглянуті в роботах І.Т. Селезова, М.О. Кільчевського, Я.С. Уфлянда, дають скінченні швидкості розповсюдження хвиль, але не співпадаючі зі швидкостями, відповідаючими тривимірній теорії. Уточнені рівняння згину (Релей, С.П. Тимошенко, Я.С. Уфлянд, М.В. Дубінкін, Р.А. Андерсон) – які називають рівняннями типу Тимошенка – на відміну від класичних є рівняннями гіперболічного типу, але також дають невірні швидкості розповсюдження хвиль.

Найбільш розповсюджена ідея спрощення полягає у розкладанні тривимірного хвильового процесу на двовимірні хвилі, що відносяться до середньої поверхні та визначають деяке поле переміщень по товщині об'єкта. Не існує універсальних розрахункових моделей, які однаково добре можуть бути застосовані до визначення всіх напружених станів тривимірних тіл при всіх можливих зовнішніх навантаженнях. У залежності від методу, що застосовується, та порядку наближення отримана модель є найкращою в означеному сенсі.

Проблеми розповсюдження хвиль у багатошарових конструкціях розглядалися в роботах В.І. Пожуєва, С.М. Бешенкова. При розв'язанні динамічних задач про розповсюдження вільних хвиль в тришарових циліндричних оболонках В.І. Пожуєв запропонував уточнений підхід, заснований на динамічних рівняннях теорії пружності та гіпотезах Кірхгофа-Лява або Тимошенка. Розповсюдження вільних хвиль в пластинах на основі рівнянь Ляме і гіпотези Кірхгофа вивчав С.М. Бешенков.

Більшість результатів про перехідні хвильові процеси отримана методом інтегральних перетворень.

Один з найбільш ефективних та перспективних підходів для дослідження диференційних рівнянь – це асимптотичний аналіз, який дозволяє на основі певних більш точних рівнянь отримувати обгрунтовані спрощені рівняння. Великі заслуги в розробці та застосуванні асимптотичних методів в

теорії оболонок належать А.Л. Гольденвейзеру. Пізніше стосовно до теорії пластин та оболонок ці методи розвивали у своїх дослідженнях Л.І. Маневич, А.В. Павленко, О.Д. Шамровський, В.В. Лобода.

У випадку достатньо складних вихідних рівнянь асимптотичний аналіз часто базується на деяких інтуїтивних здогадках, що самі потребують обґрунтувань. У зв'язку з цим Л.І. Маневич та Л.В. Овсянніков запропонували поєднувати методи асимптотичного аналізу з методами теорії групових властивостей диференційних рівнянь.

Актуальним для прикладань є пошук таких класів частинних розв'язків, на яких вихідні диференційні рівняння істотно спрощуються. Цей процес спочатку виконувався або на підставі положень симетрії, або за допомогою теорії розмірностей. Разом з тим дослідники вже давно звертають увагу на групову природу проблеми, що розглядається. Широко вживається метод пошуку спрощених систем рівнянь, пов'язаний з асимптотичним аналізом вихідної системи. При цьому важливо визначити, що прийняти за критерій спрощення. Спрощена система рівнянь завжди постає такою, що допускає ширшу групу перетворень, ніж вихідна.

Метою асимптотичного аналізу Л.І. Маневичем було запропоновано вважати розширення групи перетворень, яку допускають диференційні рівняння, що призводить до появи нових інваріантно-групових розв'язків.

Описаний вище підхід було розвинуто в ряді робіт О.Д. Шамровського. При цьому з'ясувалось, що сумісне застосування методів асимптотичного аналізу та теорії груп дозволяє не тільки обґрунтовано будувати спрощені рівняння на базі заданих точних рівнянь, але й вказувати методи ефективного розв'язання рівнянь, що будуються.

**Мета дисертаційної роботи** полягає в наступному :

– побудувати нові варіанти двовимірних динамічних рівнянь для плоского шару, що дозволяють вивчати як симетричні, так і антисиметричні деформації шару та, на відміну від відомих рівнянь, завдають тривимірні швидкості розповсюдження фронтів хвиль;

– побудувати розв'язки знайдених рівнянь плоскої деформації та згнутої деформації тонкого шару і виконати порівняння з розв'язками раніше відомих рівнянь.

**Основними завданнями наукового дослідження є:**

– сумісне застосування методики асимптотичного та групового аналізу до тривимірних динамічних рівнянь теорії пружності;

– отримання двовимірних моделей тривимірних хвильових процесів у тонкому шарі та їх застосування для дослідження збуреної зони;

– вивчення картини напружено-деформованого стану поблизу хвильових фронтів, а також аналіз швидкостей їх розповсюдження.

**Загальна методологія дослідження** засновується на методах асимптотичного інтегрування динамічних рівнянь теорії пружності. Методика виводу уточнених двовимірних динамічних рівнянь для плоского шару, а також розв'язання на основі отриманих рівнянь задач про нестационарне випромінювання хвиль полягає в послідовному застосуванні теорії груп для обґрунтованого вибору найменшої можливої кількості параметрів асимптотичного інтегрування з метою проведення аналізу можливих випадків мінімального спрощення рівнянь, що розв'язуються, та побудові процедур послідовних наближень, які відповідають різноманітним значенням параметрів інтегрування.

**Наукова новина** роботи полягає у наступному:

– на основі поєднання асимптотичних та групових методів отримано два варіанти уточнених двовимірних динамічних рівнянь, перший з яких описує розповсюдження плоских хвиль в шарі, а другий – згинних хвиль;

– на відміну від відомих рівнянь, отримані рівняння обох видів описують розповсюдження усіх типів хвиль зі швидкостями, які відповідають тривимірним рівнянням теорії пружності;

– за допомогою тих же асимптотико-групових методів побудовано розв'язки знайдених рівнянь, що дозволило розв'язати низку задач про не-

стаціонарне випромінювання плоских та згинних хвиль в шарі при різноманітних видах граничних умов;

– проведено порівняльний аналіз побудованих розв'язків; при цьому відомі розв'язки не використані у готовому вигляді, а отримані знову шляхом застосування єдиної методики асимптотико-групового аналізу і є значно зручнішими для вживання та аналізу.

**Наукова та практична цінність.** На основі єдиної методології, заснованої на поєднанні методів теорії груп та асимптотичного аналізу, створювались як вивід нових варіантів двовимірних динамічних рівнянь плоскої та згинної деформації тонкого шару, так і їх розв'язок з детальним дослідженням якісних та кількісних характеристик напружено-деформованого стану. Перевага асимптотико-групового аналізу полягає в тому, що він дозволяє не тільки обґрунтовано будувати спрощені рівняння на базі заданих точних рівнянь, але й вказувати методи ефективного розв'язання рівнянь, що будуються. Крім того, ця методика гарантує обґрунтованість отриманих результатів. Уточнені рівняння дають можливість вивчати задачу про розповсюдження хвильових фронтів та отримувати усереднену по товщині картину напружено-деформованого стану за фронтами, причому значно точніше в порівнянні з тією, що дають відомі рівняння.

Розроблено обчислювальну схему та пакет прикладних програм для моделювання хвильових процесів у пластинах.

**Вірогідність результатів та висновків** забезпечується точністю математичних методів, які використовуються для аналізу, коректністю постановок задач, узгодженістю між отриманими та відомими результатами, а також результатами інших авторів.

**Апробація роботи.** Основні результати дисертаційної роботи докладались і дискутувались на 1-му Українсько-польському науковому семінарі з механіки матеріалів та конструкцій (1993 р., м. Дніпропетровськ) та на міжнародній науково-практичній конференції "Современные проблемы геометрического моделирования" (1995 р., м. Мелітополь). В цілому дисерта-

ція доповідалась на наукових семінарах кафедр: програмного забезпечення та математичного моделювання Запорізької державної інженерної академії й прикладної математики Запорізького державного університету (1996 р.).

**Публікації.** За результатами виконаних досліджень опубліковано 5 робіт, у яких відображено основний зміст дисертації.

**Структура й обсяг дисертації.** Робота складається із вступу, п'яти розділів та заключення, містить 140 сторінок, 36 малюнків, список використаної літератури (110 найменувань).

## ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** обґрунтовується актуальність проблеми, що є предметом дослідження, дається аналіз стану питання, виконано короткий огляд літератури, присвяченої дослідженню перехідних хвильових процесів у шарі, розв'язанню задач про розповсюдження хвиль, які викликані навантаженням, що швидко змінюється. Сформульована мета дисертації та основні наукові положення, які виносяться до захисту. Тут же викладено короткий зміст дисертації по розділам.

В **першому розділі** описано методи сумісного вживання асимптотичного та групового аналізу для розв'язання задачі про дію раптово прикладеного самозрівноваженого антиплоского навантаження на границю пружного напівпростору, який первісно знаходиться у спокої. Розповсюдження нестационарної хвилі при цьому описується рівняннями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = 0 ; T = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad (1)$$

перше з яких є рівнянням Клейна-Гордона.

Дане рівняння розв'язується за допомогою сумісного застосування методів асимптотичного та групового аналізу.

Окремі члени рівняння Клейна-Гордона можуть мати, у залежності від вигляду розв'язку, неоднакову вагу, причому в одних умовах будуть переважати одні члени, а в інших інші. Оцінки відносних ваг цих членів вико-

нувались за допомогою перетворень розтягнень, яким підлягають функція та аргументи, що розшуковуються

$$x^* = \delta^{\beta_1} x, \quad t^* = \delta^{\beta_2} t, \quad u^* = \delta^{\beta_3} u \quad (2)$$

(тут  $\delta < 1$  – формально введений малий параметр).

При цьому вимагається, щоб в результаті перетворень (2) стали справедливими співвідношення

$$\partial_{x^*} \sim 1, \quad \partial_{t^*} \sim 1, \quad u^* \sim 1. \quad (3)$$

Використання положень теорії груп дозволило обґрунтовано вибрати найменшу можливу кількість параметрів асимптотичного інтегрування та вказати їх означення.

Проведено аналіз всіх можливих випадків мінімального спрощення рівняння Клейна-Гордона та відповідних значень параметрів. У підсумку виявлено залежність поміж спрощенням рівняння, яке досягається відкиданням його другорядних членів, та розширенням групи перетворень розтягнень, що допускається рівнянням.

Побудовано три процедури послідовних наближень, для чого функції, які розшуковуються, представляються у вигляді рядів

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} T_k, \quad (4)$$

що дозволяє після виконання перетворень розтягнень отримати інваріантну нескінченну рекурентну систему рівнянь.

Для першого ітераційного процесу, який відповідає випадку швидкого змінення розшукуваної функції по  $x$  і  $t$  та перебільшенню першого і другого членів вихідного рівняння над третім, інваріантами перетворень розтягнень, що використовуються, є ( $\gamma$  – будь-яке число)

$$\dot{J} = \frac{t}{x}; \quad \dot{J}_k = x^{2\gamma+2-2k} u_k, \quad (k=1, 2, \dots), \quad (5)$$

а інваріантні розв'язки шукаються у вигляді

$$\dot{J}_k = \dot{J}_k(J); \quad u_k = x^{2\gamma+2-2k} \dot{J}_k\left(\frac{t}{x}\right), \quad (k=1, 2, \dots). \quad (6)$$

Рекурентна система диференційних рівнянь для пошуку  $u_k$  має вигляд

$$\partial_x^2 u_k - \partial_t^2 u_k = u_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (7)$$

(при  $k=1$   $u_{k-1}=0$ ).

Підстановка (6) в (7) призводить до звичайних диференціальних рівнянь відносно інваріантів, розв'язок яких у загальному вигляді наступний

$$u_k = \sum_{i=1}^k u_{k,i} x^{k-i} (t-x)^{-2\gamma+k+i-2}, \quad (k=1, 2, \dots). \quad (8)$$

Для визначення коефіцієнтів  $u_{k,k}$  використовується той факт, що на границі  $x=0$  задано зусилля у вигляді

$$P = f(t) = P_0 \cos \omega t. \quad (9)$$

Теоретично ряди (8) здатні описати розв'язок у межах всієї збуреної зони  $0 \leq x \leq t$ . Однак їх практичне застосування пов'язане або з порівняно невеликими значеннями  $t$ , коли ці ряди здатні представити розв'язок у всій зоні  $0 \leq x \leq t$ , або при великих значеннях  $t$ , з описом тільки прифронтвої зони  $x \cong t$ , оскільки при збільшенні відстані від фронту  $t-x$  та зростанні  $x$  збільшується похибка, пов'язана з обчисленням степеневих рядів.

Розв'язок у вигляді (8), визначений при  $x < t$ , дає рівність нулю при  $x > t$ ; він справедливий при невеликих відстанях від фронту, а саме у прифронтвої зоні. Він може бути значно покращений та записаний у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (t-x)^{2i+m-1} \sum_{j=1}^i w_{i,j} \Lambda_{i+j+m-1} \left( \sqrt{2x(t-x)} \right). \quad (10)$$

Тут використано слідує позначення для Лямбда-функцій

$$\Lambda_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(z/2)^\nu} J_\nu(z),$$

де  $\Gamma$  - Гама-функція ( $\Gamma(\nu+1) = \nu!$  при  $\nu \in \mathbb{Z}$ ),  $J_\nu$  - функція Беселя дійсного аргументу.

Розв'язок (10) добре описує прифронтвову зону, що швидко змінюється, включаючи розрив на фронті. Він має істотні переваги в порівнянні з розв'язком (8). Зокрема, за допомогою розв'язку (10) можна отримати замкнені асимптотичні вирази для функцій напружень й переміщень, справед-

ліві при  $t \rightarrow \infty$  и  $x \rightarrow t$ . При  $m=0$  буде (це відповідає в тому числі й навантаженню вигляду (9) )

$$T = \Lambda_0 \left( \sqrt{2x(t-x)} \right); \quad u = -(t-x) \Lambda_1 \left( \sqrt{2x(t-x)} \right). \quad (11)$$

Важливо відмітити, що розв'язок у прифронтовій зоні залежить тільки від поведінки навантаження в початковий момент часу й не залежить від того, як змінюється навантаження у подальшому.

Другий ітераційний процес відповідає випадку повільного змінення розшукуваної функції по  $t$  й перевазі першого та третього членів над другим. Рекурентна система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\partial_x^2 u_k - u_k = \partial_t^2 u_{k-1}, \quad (k=1, 2, \dots). \quad (12)$$

Для навантаження типу (9) відповідний розв'язок має вигляд для зусиль:

$$T = \begin{cases} -U\beta \cos \omega t \cdot e^{-\beta x}, & \omega < 1 \\ (Ax + P) \cos t & \omega = 1 \\ -U\beta \cos(\omega t - \beta x), & \omega > 1 \end{cases} \quad (13)$$

де  $\beta = \sqrt{1 - \omega^2}$  при  $\omega < 1$ ,  $\beta = \sqrt{\omega^2 - 1}$  при  $\omega > 1$ ,  $U = -P_0 / \beta$ .

Він описує стан напівпростору поблизу навантаженої границі  $x=0$  після віддалення від неї прифронтової зони. Його можна розглядати як асимптотичний розв'язок при  $t \rightarrow \infty$  й  $x \rightarrow 0$ .

Для вивчення перехідного режиму, що виникає при не дуже віддаленому від границі фронті хвилі, розглядається третій ітераційний процес. Інваріантний розв'язок  $u_k$  при цьому є функція змінної  $t$ , а  $x$  служить параметром (що відповідає випадку повільного змінювання розшукуваної функції по  $x$ ). Цей розв'язок може задовольняти тільки початковим умовам; він описує вільні коливання, визвані початковим збуренням; для опису форм коливань у всій збуреній зоні від границі до фронту використовується розкладання в ряд Фур'є зі змінним інтервалом розкладання, а рекурентна система має вигляд

$$\partial_t^2 u_k + u_k = \partial_x^2 u_{k-1}, \quad (k=1, 2, \dots). \quad (14)$$

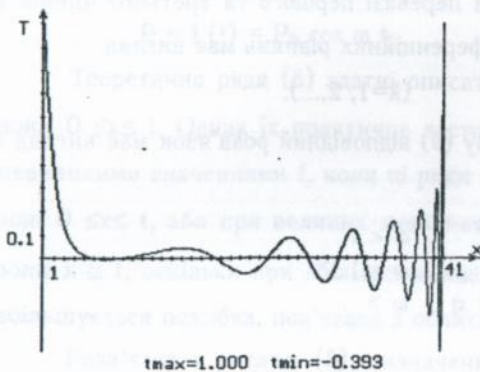
Відповідний загальний розв'язок для навантаження (9) наступний

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} (u_{mc} \cos \alpha t + u_{ms} \sin \alpha t) \cos \gamma x \quad (15)$$

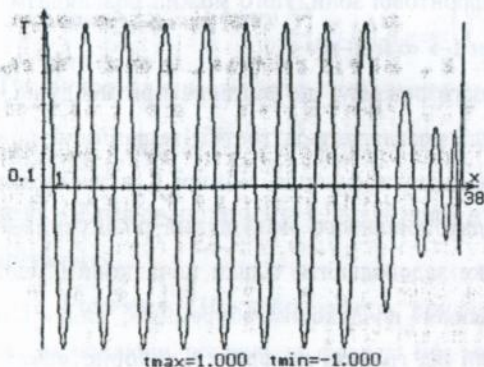
$$T = - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma (u_{mc} \cos \alpha t + u_{ms} \sin \alpha t) \sin \gamma x,$$

де  $\gamma = m\pi / l$ ;  $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2}$ .

Складаючи розв'язки (13) та (15) (окремо для  $\omega < 1$ ,  $\omega > 1$  і  $\omega = 1$ ),



Мал.1. Прифронтва, пригранична й проміжна зони для зусилля  $T(x,t)$ ;  $\omega=0$



Мал.2. Прифронтва, пригранична й проміжна зони для зусилля  $T(x,t)$ ;  $\omega=2$

можна задовольнити й граничним умовам вигляду (9) й нульовим початковим умовам, отримуючи можливість описати зони, віддалені від фронту, де ефективність розв'язку (10) спадає.

На малюнках показані відповідні картини розповсюдження нестационарного хвильового процесу, що ілюструють отримані результати. Тут відображено графіки функції  $T(x, t)$ , яка описує прифронтву, приграничну та проміжну зони при різноманітних значеннях частоти. При  $\omega < 1$  (мал. 1) виділяється швидкоосцилююча прифронтва зона, яка затухає з віддаленням від фронту, й локалізована пригранична зона, що плавно змінюється, поміж якими з часом встановлюється незбурена зона. У цьому випадку самозрівноважене антиплоске на-

вантаження локалізоване поблизу границі при будь-яких значеннях  $t$ , а в прифронтовій зоні при зростанні часу збільшується частота осциляцій. При  $\omega > 1$  розв'язок набуває характеру біжучої хвилі, що випромінюється навантаженою границею. Прифронтна зона при цьому залишається такою ж, як і у випадку  $\omega < 1$ ; при віддаленні від фронту можна бачити перехід швидкоосцилюючого хвильового процесу у стаціонарну хвилю (мал. 2).

У другому розділі основну увагу приділено виводу уточнених динамічних рівнянь плоскої деформації тонкого шару. При цьому застосовується методика асимптотичного інтегрування, запропонована раніше О.Д. Шамровським та вже використана у першому розділі при розв'язанні рівняння Клейна-Гордона.

Спочатку, засновуючись на динамічних рівняннях просторової теорії пружності

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0; \quad E \frac{\partial u_x}{\partial x} = \sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0; \quad E \frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \sigma_{xy}; \quad G \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \sigma_{xz}; \quad x \leftrightarrow y,$$

виводяться відомі рівняння узагальненого плоского напруженого стану пластини, які завдають швидкості розповсюдження поздовжніх хвиль, що не відповідають тривимірним рівнянням теорії пружності. У наступному параграфі ці рівняння уточнюються. Для цього використовуються перетворення розтягнень вигляду

$$x^* = \delta^{a_1} x; \quad y^* = \delta^{a_2} y; \quad z^* = z; \quad u_x^* = \delta^{a_3} u_x; \quad u_y^* = \delta^{a_4} u_y \quad (17)$$

$$u_z^* = \delta^{a_5} u_z; \quad \sigma_{xx}^* = \delta^{a_6} \sigma_{xx}; \quad \sigma_{yy}^* = \delta^{a_7} \sigma_{yy}; \quad \sigma_{zz}^* = \delta^{a_8} \sigma_{zz}$$

$$\sigma_{xy}^* = \delta^{a_9} \sigma_{xy}; \quad \sigma_{xz}^* = \delta^{a_{10}} \sigma_{xz}; \quad \sigma_{yz}^* = \sigma_{yz}; \quad t^* = \delta^{a_{11}} t,$$

які призводять до співвідношень

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \sim \frac{\partial}{\partial z^*} \sim \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{\partial}{\partial t^*} \sim E \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \sim E \frac{\partial u_z^*}{\partial z^*} \sim \sigma_{xx}^* \sim \sigma_{zz}^* \sim \sigma_{xy}^* \sim \sigma_{xz}^* \quad (18)$$

Завдяки останнім, вага кожного члена будь-якого з перетворених рівнянь (16) повністю оцінюється коефіцієнтом, який з'являється в результаті перетворень (17), у вигляді деякої степені  $\delta$  ( $\delta < 1$ ).

Для отримання рекурентних рівнянь шукані функції представляються у вигляді рядів, аналогічних (4). Обираються наступні значення параметрів асимптотичного інтегрування  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.5$ ,  $\alpha_3=1$ ,  $\alpha_4=1$ ,  $\alpha_5=0.5$ ,  $\alpha_6=0.5$ ,  $\alpha_7=0.5$ ,  $\alpha_8=0.5$ ,  $\alpha_9=0.5$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=0.5$  (до набору  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ , який у статичному випадку призводить до рівнянь узагальненого плоского напруженого стану з урахуванням стиску, тут додається значення параметру  $\alpha_{11}$ , що задовольняє критерію мінімального спрощення вихідних рівнянь); значення параметрів є найменшими, що дозволяють виконувати розщеплення по цілих степенях  $\delta$ .

Утримуючи усі рівняння першого наближення й одне рівняння з другого наближення, їх розв'язки шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^1 &= \sigma_{zz1,1}; u_x^1 = u_{x1,1}; u_y^1 = u_{y1,1}; \sigma_{xx}^1 = \sigma_{xx1,1}; \sigma_{yy}^1 = \sigma_{yy1,1} \\ \sigma_{xy}^1 &= \sigma_{xy1,1}; \sigma_{xz}^1 = z \sigma_{xz1,1}; \sigma_{yz}^1 = z \sigma_{yz1,1}; u_z^1 = z u_{z1,1}; \sigma_{zz}^2 = z^2 \sigma_{zz2,1} \end{aligned} \quad (19)$$

Останні рівняння з урахуванням граничних умов на лицьових поверхнях після введення наступних позначень й безрозмірних змінних

$$b = (1 + \nu)(1 - 2\nu) / (1 - \nu); a_p^2 = E / \rho b; a_s^2 = (1 - 2\nu) / 2(1 - \nu) \quad (20)$$

$$a_1^2 = (1 - 2\nu) / (1 - \nu)^2; c = \nu / (1 - \nu); d = 1/2(1 - \nu)$$

$$x_1 = 2hx; y_1 = 2hy; t_1 = 2ht/a_p; u_{x1,1} = 2hv_x; u_{y1,1} = 2hv_y; u_{z1,1} = w_1$$

$$\sigma_{xx1,1} = E T_x / b; \sigma_{yy1,1} = E T_y / b; \sigma_{xy1,1} = ES / b; \sigma_{zz1,1} = EK / b$$

приймають вигляд

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = 0; \quad b \frac{\partial v_x}{\partial x} = T_x - \nu (T_y + K) \quad (21)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0; \quad b \frac{\partial v_y}{\partial y} = T_y - \nu (T_x + K)$$

$$S = a_s^2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad b w_1 = K - v (T_x + T_y); \quad 8K + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0$$

Вони є рівняннями узагальненого плоского напруженого стану з урахуванням стиску по товщині. Останні є уточненими у тому значенні, що описують розповсюдження фронтів поздовжніх та поперечних хвиль з тривимірними швидкостями і дають усереднену по товщині картину напружено-деформованого стану за фронтами.

Третій розділ присвячено розв'язанню задач про розповсюдження плоских пружних хвиль у тонкому шарі. Проводиться асимптотико-груповий аналіз отриманих динамічних рівнянь, що дозволяє побудувати їх розв'язки.

Розглянуто три процедури послідовних наближень, що відповідають різноманітним значенням параметрів асимптотичного інтегрування, які призводять до мінімального спрощення отриманих у другому розділі рівнянь. Це випадки відповідно швидкої двовимірної хвилі, повільної двовимірної хвилі та вільних коливань по товщині пластини.

Більш детально розглянуто випадок швидкої двовимірної хвилі. Розв'язується задача про розповсюдження одновимірної поздовжньої нестационарної хвилі продвж осі  $x$  у шарі під дією раптово прикладеного навантаження. Рекурентні рівняння, що описують цей процес, мають вигляд

$$\frac{\partial^2 v_{xi}}{\partial x^2} + c \frac{\partial w_{1i-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_{xi}}{\partial t^2} = 0 \quad (22)$$

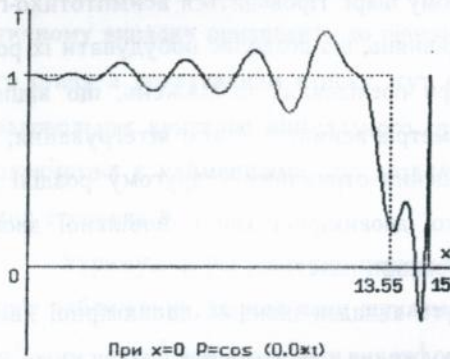
$$8 w_{1i-1} + 8 \frac{\partial v_{xi}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_{1i}}{\partial t^2} = 0; \quad T_{xi} = \frac{\partial v_{xi}}{\partial x} + c w_{1i-1}$$

Застосовується методика, викладена у першому розділі, згідно з якою розв'язок рівнянь (22) розшукується у вигляді рядів однорідних функцій

$$v_x = \sum_{i=1}^{\infty} v_{xi}; \quad T_x = \sum_{i=1}^{\infty} T_{xi}; \quad w_1 = \sum_{i=1}^{\infty} w_{1i}; \quad v_{xi} = \sum_{j=1}^i v_{xij} x^{i-j} (t-x)^{m+i+j-1} \quad (23)$$

$$T_{xi} = \sum_{j=1}^i T_{xij} x^{i-j} (t-x)^{m+i+j-2}; \quad w_{1i} = \sum_{j=1}^i w_{1ij} x^{i-j} (t-x)^{m+i+j}$$

Цей розв'язок, у принципі, є точним розв'язком задачі, що задовольняє всім граничним й нульовим початковим умовам. Однак, в силу тих же особливостей, які були детально описані на прикладі рівняння Клейна-Гордона, він придатний тільки для опису прифронтових зон. Зони, віддалені від фронту, описують класичні рівняння. При цьому важливо відмітити, що на основі єдиної методології, заснованої на поєднанні методів теорії груп та асимптотичного аналізу, виконувались як вивід уточнених динамічних рівнянь, так і їх розв'язання. Ця методика також гарантує обгрунтованість отриманих результатів.



Мал.3 Якісна картина розповсюдження поздовжньої хвилі

На мал. 3 представлено графік розповсюдження хвильового процесу при постійному навантаженні і значенні коефіцієнту Пуасона  $\nu=0,3$ . Класичні рівняння, згідно з якими хвильові фронти розповсюджуються зі швидкістю  $a_1$  (це квазіфронт, він зображений на графіку пунктирною лінією), дозволяють отримати тільки наближену картину напружено-деформованого стану. На-

справді поздовжні хвилі мають швидкість розповсюдження  $a_p$ . Поблизу справжнього фронту, зображеного суцільною лінією, виділяється швидкоосцилююча зона, що є характерною особливістю хвильового процесу. При зростанні часу осциляції стають більш частими, причому їх характер залежить тільки від поведінки навантаження у початковий момент часу та не залежить від подальшої поведінки навантаження. У районі квазіфронту осциляції послабляються, й спостерігається швидке, але не стрибкоподібне зростання напружень, після чого уточнений розв'язок асимптотично наближується до класичного.

Таким чином, виведені уточнені двовимірні рівняння дають в цілому правильну якісну картину розповсюдження тривимірного перехідного процесу із збереженням такої важливої характеристики, як швидкість розповсюдження фронту. У той же час добре видно й область застосування класичних рівнянь узагальненого плоского напруженого стану.

У четвертому розділі виводяться динамічні рівняння згинної деформації тонкого шару. У першому параграфі за допомогою асимптотичного інтегрування тривимірних рівнянь теорії пружності (16) отримано класичні динамічні рівняння вигину пластини, які не дозволяють вивчити задачу про розповсюдження хвильових фронтів. Далі, дотримуючись тієї ж методики, виводяться уточнені рівняння згину тонкого шару.

Виконуючи перетворення (17), що призводять до співвідношень (18), представляючи шукані функції у вигляді рядів типу (4) та обираючи значення параметрів асимптотичного інтегрування  $\alpha_1=0.5$ ,  $\alpha_2=0.5$ ,  $\alpha_3=0$ ,  $\alpha_4=0$ ,  $\alpha_5=0.5$ ,  $\alpha_6=-0.5$ ,  $\alpha_7=-0.5$ ,  $\alpha_8=-0.5$ ,  $\alpha_9=-0.5$ ,  $\alpha_{10}=0$ ,  $\alpha_{11}=0.5$ , (у статичному випадку вони відповідають спрощеному варіанту рівнянь, що описує напружено-деформований стан згину з урахуванням стиску), отримуємо рекурентну систему рівнянь для пошуку невідомих функцій. Утримуючи, як і раніше, усі рівняння першого наближення та частину рівнянь другого наближення, їх розв'язки шукаємо у вигляді

$$\sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz1,1}; \sigma_{yz}^1 = \sigma_{yz1,1}; u_z^1 = u_{z1,1}; \sigma_{zz}^1 = z_1 \sigma_{zz1,1}; u_x^1 = z_1 u_{x1,1} \quad (24)$$

$$u_y^1 = z_1 u_{y1,1}; \sigma_{xx}^1 = z_1 \sigma_{xx1,1}; \sigma_{yy}^1 = z_1 \sigma_{yy1,1}; \sigma_{xy}^1 = z_1 \sigma_{xy1,1}$$

$$\sigma_{xz}^2 = z_1^2 \sigma_{xz2,1}; \sigma_{yz}^2 = z_1^2 \sigma_{yz2,1}; u_z^2 = z_1^2 u_{z2,1}; \sigma_{zz}^2 = z_1^3 \sigma_{zz2,1}$$

Підставляючи (24) в останні рівняння та приводячи змінні до безрозмірного вигляду (тут використані також позначення (20))

$$\sigma_{xz1,1} = G\beta_x; \sigma_{yz1,1} = G\beta_y; u_{z1,1} = 2hw; u_{x1,1} = \varphi_x \quad (25)$$

$$u_{y1,1} = \varphi_y; \sigma_{xx1,1} = \frac{E}{2hb} M_x; \sigma_{yy1,1} = \frac{E}{2hb} M_y; \sigma_{xy1,1} = \frac{E}{2hb} H$$

$$\sigma_{zz1,1} = \frac{E}{2hb} N; u_{z2,1} = \frac{2}{h} w_2$$

де  $\varphi_x, \varphi_y$  – кути повороту нормалі;  $w$  – прогин пластини;  $\beta_x, \beta_y$  – кути зсуву;  $M_x, M_y$  – згинаючі моменти;  $H$  – крутний момент; величини  $w_2$  і  $N$  відображають змінення деформації та напруження по товщині пластини;

$$Q_x, Q_y \text{ – безрозмірні перерізуючі сили, } Q_x = \beta_x; Q_y = \beta_y,$$

з урахуванням граничних умов на лицьових поверхнях отримаємо рівняння згину тонкого шару з урахуванням зсуву та інерції обертання у вигляді

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - 8a_s^2 Q_x - \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} = 0; \quad 2N + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (26)$$

$$x \leftrightarrow y; \quad a_s^2 \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) + N - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad H = a_s^2 \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

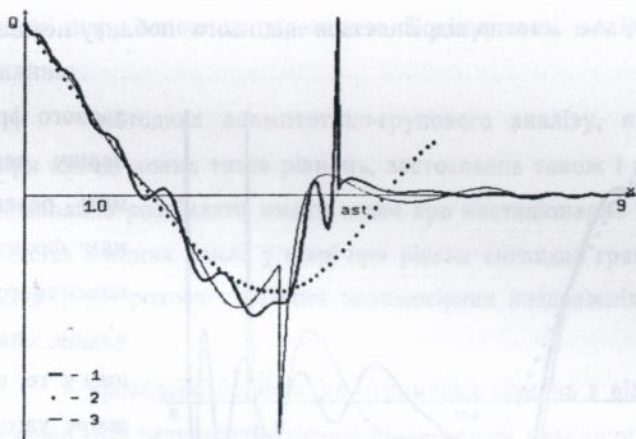
$$8bw = N - \nu(M_x + M_y); \quad \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = Q_x; \quad b \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = M_x - \nu(M_y + N)$$

Ці рівняння дають можливість вивчити розповсюдження хвильових фронтів й отримати усереднену по товщині картину напружено-деформованого стану пластини за фронтами. На відміну від класичних рівнянь вони враховують інерцію обертання нормалі (це відображають у перших двох рівняннях доданки  $\partial^2 \varphi_x / \partial t^2, \partial^2 \varphi_y / \partial t^2$ ) та зсуви  $\beta_x, \beta_y$ , що викликані перерізуючими силами. У цьому дані рівняння подібні рівнянням типу Тимошенка, однак, на відміну від останніх, описують розповсюдження фронтів згинних хвиль зі швидкістю, що дорівнює швидкості фронту поздовжніх тривимірних хвиль, а розповсюдження крутильних та зсувних хвиль зі швидкістю, що дорівнює швидкості фронту поперечних тривимірних хвиль.

У **п'ятому розділі**, присвяченому розв'язанню задач про згин тонкого шару, розглядаються рівняння одновимірних згинних та поперечних хвиль, для розв'язання яких використовується описана й застосована вище методика. Окремо розв'язуються задачі про дію раптово прикладеного згинаючого моменту та раптово прикладеної перерізуючої сили.

Проводиться порівняння отриманих рівнянь згину пластини з відомими. Для цього спочатку побудовано автоматичний розв'язок класичних рівнянь шляхом застосування єдиної методики асимптотико-групового аналізу.

Використання методів теорії груп для розв'язання динамічної задачі про циліндричний згин під дією раптово прикладеного навантаження дозволило динамічні рівняння у частинних похідних звести до звичайних диференційних рівнянь відносно інваріантів й



Мал.4 Графіки перерізуючої сили, що відповідають різноманітним розв'язкам; 1—уточнений розв'язок; 2—класичний розв'язок; 3—розв'язок згідно з теорією типу Тимошенка

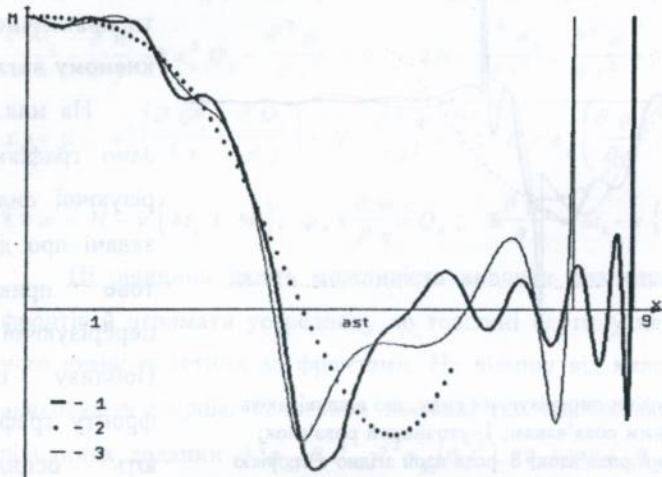
отримати результати практично у замкненому вигляді.

На мал.4 показано графіки перерізуючої сили  $Q$  у задачі про дію раптово прикладеної перерізуючої сили. Поблизу першого фронту графіки мають осцилюючий характер. Головним

фронтом є другий фронт, на якому перерізуюча сила має розрив, що дорівнює її значенню на границі. При цьому спостерігається досить істотний розбіг з результатами, отриманими згідно з теорією типу Тимошенка. Розв'язок згідно з цією теорією дає сильний провал перед другим фронтом у від'ємну зону; тому відповідний пік також має напрям у від'ємний бік, що не відповідає сутності задачі. Уточнена теорія дає природний напрям розриву на другому фронті у той бік, у який діє прикладене на границі навантаження. Інтегрально обидва розв'язки достатньо близькі. Класичний розв'язок для зусиль добре узгоджується з двома описаними вище розв'язками тільки у зонах, що повільно змінюються у часі.

На мал. 5 представлено графіки згинаючого моменту  $M$  у задачі про дію раптово прикладеного згинаючого моменту. Тут головним є перший фронт, на якому згинаючий момент має розрив, що дорівнює його значенню

на границі. У прифронтівій зоні графіки мають швидкоосцилюючий характер, причому, при зростанні часу осциляції стають більш частими. Поблизу другого фронту це явище не спостерігається. Як і у попередній задачі, розв'язок згідно з теорією типу Тимошенка інтегрально близький до уточненого розв'язку, але істотно відрізняється від нього поблизу першого хви-



Мал.5 Графіки згинаючого моменту, що відповідають різноманітним розв'язкам; 1- уточнений розв'язок; 2-класичний розв'язок; 3-розв'язок згідно з теорією типу Тимошенка

льового фронту, у першу чергу самим розташуванням фронту. Для класичного розв'язку характерним є те, що воно добре узгоджується з отриманим новим розв'язком тільки у зоні, що повільно змінюється.

У заключенні сформульовані ос-

новні результати дисертації, які полягають у наступному.

– на основі сумісного застосування теорії групових властивостей диференційних рівнянь та методів асимптотичного аналізу до тривимірних рівнянь теорії пружності побудовано два варіанти уточнених двовимірних динамічних рівнянь для плоского шару: перший варіант описує розповсюдження плоских хвиль у шарі та є уточненням відомих рівнянь узагальненого плоского напруженого стану; другий описує розповсюдження згинних хвиль у шарі та є уточненням відомих рівнянь теорії пластин типу Тимошенка;

– запропоновані рівняння в обох виглядах, на відміну від відомих рівнянь, описують розповсюдження усіх типів хвиль з тими ж швидкостями, що й тривимірні рівняння теорії пружності; у той же час вони є типовими двовимірними рівняннями та відповідають тим же законам розподілу по товщині шару основних переміщень й напружень, що й відомі двовимірні рівняння;

– методика асимптотико-групового аналізу, яка використовувалась при виводі нових типів рівнянь, застосована також і для їх розв'язання, що дозволило розв'язати низку задач про нестационарне випромінювання плоских та згинних хвиль у шарі при різних виглядах граничних умов, зокрема, задачі про розповсюдження одновимірних поздовжніх, поперечних та згинних хвиль;

– проведено порівняння отриманих рівнянь з відомими; при цьому показано, що результати, отримані на основі класичних рівнянь, моделюють зони, що повільно змінюються, для знов отриманих розв'язків;

– у рамках єдиного підходу й розв'язки класичних задач побудовані заново за допомогою асимптотико-групового аналізу; це виявилось значно зручніше, ніж використання відомих розв'язків, знайдених за допомогою інтегральних перетворень, оскільки дозволило отримати результати практично у замкненому вигляді;

– проведено порівняння знов отриманих рівнянь з рівняннями згину пластини типу Тимошенка; доведено асимптотичну протирічність рівнянь типу Тимошенка; показано, що вони дають приблизно правильно тільки інтегральні результати, але невірні описують картину поблизу хвильових фронтів.

**Конкретний особистий внесок** автора у розробку результатів, що опубліковані у нижче перелічених роботах.

На основі сумісного застосування методів асимптотичного і групового аналізу розв'язано задачу про дію раптово прикладеного самозрівноважено-

го антиплоского навантаження на границю пружного напівпростору й смуги. Розроблено алгоритм чисельної реалізації отриманих розв'язків [1,2].

Шляхом застосування методик асимптотичного інтегрування виведено уточнені динамічні рівняння плоскої деформації та згинної деформації тонкого шару, що дозволяють вивчати розповсюдження фронтів поздовжніх, поперечних та згинних хвиль з тривимірними швидкостями [3,4].

На основі отриманих уточнених рівнянь плоскої деформації розв'язано задачу про розповсюдження одновимірної нестационарної поздовжньої хвилі у шарі [3].

Розроблено обчислювальну схему й пакет прикладних програм для моделювання хвильових процесів у пластинах [5].

Основні положення дисертації відображено у наступних публікаціях:

1. Пожувев В.И., Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Распространение антиплоской самоуравновешенной упругой волны от границы полупространства. Изв. РАН. МТТ, 1996, № 2, с. 124-133.

2. Скрыпник И.А. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости для случая антиплоских волн. /Theoretical Foundation in Civil Engineering. Тез. докл. междунар. конф. Dnepropetrovsk. Warsaw, 1993, с. 44-49.

3. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Двумерное моделирование трёхмерных продольных волн в плоском слое. Сб.: Математическое моделирование физико-механических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995, 43-50.

4. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Двумерное моделирование трёхмерных поперечных и изгибных волн в плоском слое. Сб.: Математическое моделирование физико-механических полей и интенсификация промышленного производства. Запорожье, 1995, с. 51-56.

5. Скрыпник И.А., Шамровский А.Д. Графическое моделирование волновых процессов в пластинах и оболочках. Современные проблемы геометрического моделирования. /Тез. докл. межд. н.-практ. конф. Мелитополь, 1995, с. 164.

Summary

Skrypnik I.A. Two-dimensional modelling of processes spreading three-dimensional elastic waves in the flat layer. Dissertation is manuscript. Dissertation on the degree of candidate of physical-mathematical sciences on speciality 01.02.04-mechanics of deformable solid body, Zaporozhye state university, Zaporozhye, 1996.

Five scientific works are defended, which have included theoretical research transitional wave processes in the flat layer, realized by combined application methods asymptotic and grouped analysis dynamic equations of space elasticity theory. The two-dimensional models had been obtained that make possible to research the problems of front wave spreading and to obtain averaged by depth picture of strained and deformed state after front passing.

Аннотация

Скрыпник И.А. Двумерное моделирование процессов распространения трехмерных упругих волн в плоском слое. Диссертацией является рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, Запорожский государственный университет, Запорожье, 1996.

Защищается 5 научных работ, которые содержат теоретические исследования переходных волновых процессов в плоском слое, осуществляемые на основе совместного применения методов асимптотического и группового анализа динамических уравнений пространственной теории упругости. Получены двумерные модели, позволяющие изучить задачи о распространении волновых фронтов и получить усредненную по толщине картину напряженно-деформированного состояния за фронтами.

Ключові слова: самозрівноважене навантаження, асимптотико-груповий аналіз, інваріантний розв'язок, плоский шар, швидкість розповсюдження фронту, пружні хвилі, збурена зона.

Стор

1117601

Ав. 34.998

**Ав 34.998**

---

Підписано до друку 17.05.96 р.

**Заказ № 173. Тираж 100 прим. Обсяг 1,0 ум.др.арк.**

Запоріжжя, ЗДІА, просп. Леніна, 226.