

Національна Академія Наук України
Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова

На правах рукопису

Міщенко
Олексій Володимирович

ЕФЕКТИ НЕТРИВІАЛЬНОЇ ТОПОЛОГІЇ В
ДЕЯКИХ КВАНТОВО-ПОЛЬОВИХ
СИСТЕМАХ

01.04.02 — Теоретична фізика

Автореферат дисертації
на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ—1996



00751962 (U)

В 35.185

- Робота виконана *в Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії Наук України*
- Наукові керівники: *член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Фомін Петро Іванович доктор фіз.-мат. наук Ситенко Юрій Олексійович*
- Офіційні опоненти: *доктор фіз.-мат. наук, професор Клімик Анатолій Улянович доктор фіз.-мат. наук Скрипник Володимир Іванович*
- Провідна організація: *Кафедра квантової макрофізики фізичного факультету Дніпропетровського університету*

Захист відбудеться „4” листопада 1996 р. о(б)
11 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.76.01 при Інституті теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова Національної Академії Наук України (252143, м. Київ-143, вул. Метрологічна, 14-б).

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України.

Автореферат розіслано „31” листопада 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради доктор фіз.-мат. наук

ЛННБ ім. В. Стефаніка АН України В.С. КУЗЬМИЧЕВ

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. В останні роки у фізиці елементарних частинок та у космології проявляється значний інтерес до питання про існування та властивості топологічно нетривіальних розв'язків вихрєвого типу (квантові вихрі або "струни") у теоріях поля зі спонтанно порушеними симетріями. У фізиці адронів цей напрямок стимулюється необхідністю співставити феноменологічно впроваджуваним дуальним струнам струноподібні збудження вакууму КХД, що містить кварк-антикваркові та глюонні конденсати. Ця задача у повному обсязі вельми складна і її рішення тому розбивається на ряд етапів. Зокрема, важливою виявляється проблема обґрунтування існування вихрєвих збуджень на основі ефективних лагранжіанів КХД.

У розвитку сучасної теоретичної та математичної фізики важливу роль відіграють теореми про індекс, що відображають зв'язок аналітичних властивостей диференційних операторів, заданих у перерізах векторних розшарувань над многовидами, з топологічними властивостями розшарованих просторів. Взагалі кажучи, застосування вказаних теорем обмежено випадками, коли базовий многовид розшарованого простору є або компактним замкненим або з межею. У другому випадку особливу актуальність набуває питання про вибір граничних умов для нульових мод, бо звичайні локальні граничні умови виявляються несумісними з нетривіальною топологією зовнішніх полів, і виникає необхідність введення граничних умов більш загального нелокального вигляду, наприклад, спектральних граничних умов, з використанням яких доводиться теорема про індекс для компактного многовиду з межею. Для квантової теорії поля актуальною є проблема вибору з множини спектральних граничних умов такої що еквівалент-

тна умові квадратичної інтегрованості на некомпактному розширенні вихідного базового компактного многовиду з межею. Питання про індекс можна поставити також у випадку некомпактного базового многовиду, для якого відома тільки теорема, застосовувана до многовидів непарної розмірності. В якості граничної умови у цьому випадку вибирається умова квадратичної інтегрованості нульових мод на многовиді.

У класичній фізиці повний опис електромагнітних ефектів здійснюється за допомогою напруженості електромагнітного поля, безпосередньо впливаючого на заряджені частинки. В 1959 р. Ааронов та Бом, використовуючи рівняння Шрьодінгера, розглянули розсіювання електрона у зовнішньому статичному магнітному полі, що створюється нескінченно довгим соленоїдом, та виявили ефект, не залежний від глибини проникнення електрона у область магнітних силових ліній. Тим самим було показано, що у квантовій механіці електромагнітне поле впливає на заряджені частинки навіть у тому випадку, якщо область, у якій локалізовано поле, не досяжна для частинки. Актуальним є питання про вплив викривлення простору на ефект Ааронова-Бома. Наприклад, спільне існування магнітної та гравітаційної трубок є досить типовим для моделей із спонтанним порушенням калібрувальних симетрій. В таких моделях виникають вакуумні структури у вигляді струн (наприклад, вихрі Абрикосова-Нільсена-Олесена), що характеризуються, з одного боку, величиною магнітного потоку, і, з іншого боку, величиною спонтанно порушеної симетрії конденсату. Цьому конденсату відповідає рівномірний розподіл маси вздовж вісі струни, що є джерелом гравітаційного поля, викривляючого простір.

Мета роботи. Метою роботи є:

- доведення існування та дослідження квантово-вихрових (струноподібних) розв'язків у лінійній сигма-моделі;
- знаходження граничної умови для компактної поверхні з межею, еквівалентної умові квадратичної інтегровності нульових мод діраківського оператора на некомпактному розширенні вихідної компактної поверхні з межею;
- обчислення аксіальної аномалії (індекса оператора Дірака у зовнішньому магнітному полі) на компактній поверхні з межею при довільних спектральних граничних умовах;
- знаходження числа нульових мод та індекса діраківського оператора на двовимірній некомпактній рімановій поверхні у зовнішньому магнітному полі;
- побудова квантової теорії розсіяння нерелятивістської частинки у полі космічної струни, що розглядається як суміщення магнітної та гравітаційної струн, з урахуванням ефектів, обумовлених внутрішньою структурою космічної струни.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає у тому, що в ній вперше:

- виходячи з фізичної умови електронейтральності вакуумного конденсату, що впливає з емпірично очевидного факту відсутності у фізичному вакуумі ефекту Мейснера, показано існування топологічно стабільних квантово-вихрових розв'язків у лінійній сигма-моделі з електронейтральним та ізотопічно неполяризованим конденсатами;
- для довільного компактного однозв'язного викривленого многовиду з межею запропоновано локальну граничну умову на нульові моди та доведена її еквівалентність умові квадратичної

інтегровності нульових мод на некомпактному розширенні вихідного багатовиду;

- обчислена аксіальна аномалія (індекс оператора Дірака у зовнішньому магнітному полі) для випадку довільного двовимірного компактного багатовиду з межею та при довільних спектральних граничних умовах на межі і визначені спектральні граничні умови, еквівалентні квадратичній інтегровності нульових мод на некомпактному розширенні; показано, що як спектральні граничні умови, так і повна аномалія залежать у цьому випадку від повної інтегральної кривизни поверхні з межею;
- одержані загальні вирази для чисел нульових мод позитивної та негативної киральностей та індексу діраківського оператора у зовнішньому магнітному полі на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні; показано, що індекс у просторі квадратично-інтегровних функцій на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні залежить від числа ручок на поверхні (g) та числа граничних компонент поверхні (N), а при $g > 0$ також і від взаємного розташування граничних компонент;
- обчислено індекс оператора Дірака у зовнішньому магнітному полі у просторі квадратично-інтегровних функцій, узгоджених із самоспряженістю діраківського оператора, для випадку конформно-скінченної орієнтованої поверхні;
- розвинена квантова теорія розсіяння нерелятивістської частинки у полі космічної струни, що розглядається як суміщення магнітної та гравітаційної струни; враховані ефекти, зумовлені скінченністю поперечних розмірів струни, при досить загальних припущеннях щодо розподілу магнітного поля та просторової кривизни усере-

дині струни; показано, що незважаючи на надзвичайно сильну далекодію, що не задовільняє навіть умовам Хьормандера, хвильові оператори та S -матриця можуть бути визначені; показано, що необхідно модифікувати визначення амплітуди розсіяння відносно випадку короткодіючої взаємодії;

- для випадку, коли струна оточена непроникним потенційним бар'єром, вирахована асимптотика амплітуди розсіяння при абсолютних значеннях хвильового вектору, прагнучих до нескінченності; показано, що при ненульових потоках кривизни та абсолютних значеннях хвильового вектору, прагнучих до нескінченності, переріз розсіяння залежить від магнітного потоку.

Наукова і практична цінність. Результати дисертації можуть бути використані при дослідженні зв'язку феноменологічно впроваджуваних дуальних струн з струноподібними збудженнями вакууму КХД, при дослідженні квантово-вихрєвого механізму формування релятивістських струменів у квазарах та галактиках. Результати обчислення аксіальної аномалії, індекса оператора Дірака та дослідження їх залежності від граничних умов можуть бути використані як у квантовій теорії поля при обчисленні конкретних ефектів і для подальшого розвитку непертурбативних методів, так і у математичній фізиці та при вивченні двовимірних моделей у теорії твердого тіла. Нарешті, розвинута теорія розсіяння нерелятивістської частинки у полі космічної струни може бути основою для подальших досліджень космічних струн у астрофізиці та нових нетривіальних проявлень ефекту Ааронова-Бома.

Апробація роботи та публікації. Основні результати дисертації доповідались на Міжнародній конференції "Проблеми фізики високих енергій та теорії поля" (Протвіно, 1988 р.); на Міжнародній конфе-

ренції "Сучасні проблеми квантової теорії поля, струн та квантової гравітації" (Київ, 1992 р.); на Міжнародній нараді "Адрони-93" (Новий Світ, 1993 р.); на Республіканському семінарі "Квантові симетрії та нескінченновимірна геометрія (Квантова геометрія)"; на наукових семінарах Інституту математики НАН України, кафедри квантової макрофізики фізичного факультету Дніпропетровського державного університету, Інституту теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України.

По темі дисертації опубліковано сім робіт, шість з яких опубліковані у вигляді статей, а одна видана препрінтом.

Об'єм роботи. Дисертація складається із 6 глав, з яких перша та шоста — Вступ і Заключення, відповідно, а у решті викладено оригінальний матеріал; трьох додатків та списку літератури. Об'єм дисертації — 146 сторінок машинописного тексту. Список літератури містить 102 найменування.

Зміст роботи

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, зроблено огляд проблематики, якій вона присвячена, визначено коло задач, що розглядаються у роботі та наведено її стислий зміст.

В першій главі показано існування квантово-вихрових розв'язків у лінійній сигма-моделі з електронейтральним та ізотопічно неполяризованим конденсатами.

В першому параграфі наведений $O(4)$ -симетричний лагранжіан лінійної σ -моделі:

$$L = (1/2) [(\partial_\mu \vec{\pi})^2 + (\partial_\mu \sigma)^2 + \mu^2 (\vec{\pi}^2 + \sigma^2)] - \frac{\lambda}{4} (\vec{\pi}^2 + \sigma^2)^2, \quad (1)$$

що формулюється у термінах 4-вектора $\pi_\mu(x) = (\vec{\pi}(x), \sigma(x))$. Далі на

основі фізичної умови електронейтральності вакуумного конденсату, що впливає з емпірично очевидного факту відсутності у фізичному вакуумі ефекту Мейснера:

$$\pm ieF_{\mu\nu} (\pi^1 \mp i\pi^2) = 0, \quad (2)$$

показано, що $\pi^1 = \pi^2 = 0$, тобто простір еквівалентних вакуумів S^3 лінійної σ -моделі редукується до простору електронейтральних вакуумів S^1 . Отже, оскільки перша гомотопічна група $\pi_1(S^1) = Z \neq I$ нетривіальна, у електронейтральному вакуумі можуть існувати стабільні вихрові збудження. На основі рівнянь руху для "макроскопічної хвильової функції" $\psi(x) = \sigma(x) + i\pi^3(x)$ доводиться, що шукані вихрові розв'язки $\psi(x) = b(r)e^{im\phi}$ (r, ϕ — циліндричні координати, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$) існують і характеризуються асимптотиками:

$$b(r) \rightarrow \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{m^2}{2(r\mu)^2} \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

$$b(r) \rightarrow \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} (\mu r)^{|m|}, \quad r \rightarrow 0. \quad (4)$$

Показано, що вихрові розв'язки розбиваються на гомотопічні класи, що характеризуються цілочисленим гомотопічним індексом $Q = m$.

У другому параграфі розглянута σ -модель з ізотопічно неполярною ізоспіновою частиною $\vec{\pi} = \vec{n} \phi(x)$, де \vec{n} — випадковий ізовектор з кореляторами $\langle n_i \rangle = 0$, $\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$. Тоді всі напрямки ізовектору рівноймовірні і умова симетричності конденсату виявляється топологічно еквівалентною умові електронейтральності конденсату, приводячи до існування топологічно стабільних вихрових збуджень. Завершує параграф дослідження знайдених вихрових розв'язків на стійкість відносно малих збурень.

У другій главі розглянуті нульові моди двовимірного діраківського оператора на компактній та некомпактній поверхнях у зовнішньому статичному магнітному полі. Для нульових мод на компактній

поверхні з межею запропонована нелокальна гранична умова, еквівалентна умові квадратичної інтегровності нульових мод на некомпактній поверхні. Потім розглянуте також питання про вплив граничних умов на повну аномалію у випадку двовимірного компактного многовиду з межею. Одержано вираз для внеска межі у суперсиметричну функцію розподілу та показано, що повна аномалія може залежати як від характеристичного класу Черна, так і від характеристичного класу Ейлера у цьому випадку.

В першому параграфі для оператора Дірака у зовнішньому магнітному полі

$$H = \frac{1}{i} \alpha^\mu(x) \left[\partial_\mu + \frac{i}{2} \omega_\mu(x) - iV_\mu(x) \right] = \begin{pmatrix} 0 & L_+ \\ L_- & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

сформульовано задачу знаходження нульових мод:

$$H\psi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Дано визначення індексу оператора Дірака:

$$\text{Index } L_- = \text{Dim Ker } L_- - \text{Dim Ker } L_+, \quad (7)$$

де $\text{Dim Ker } L_-$ та $\text{Dim Ker } L_+$ — числа лінійно незалежних відповідним чином нормованих розв'язків рівнянь

$$L_- \psi_+(x) = 0 \quad (8)$$

та

$$L_+ \psi_-(x) = 0 \quad (9)$$

відповідно. Показана актуальність питання про вибір граничних умов для нульових мод. Особливо підкреслена проблема відповідності граничних умов у випадку базового компактного многовиду з

межею та умови квадратичної інтегровності нульових мод на некомпактному розширенні такого многовиду.

У другому параграфі знайдено число нульових мод позитивної та негативної кіральностей для діраківського оператора на площині за умови квадратичної інтегровності нульових мод. Потім сформульовано нелокальну граничну умову для нульових мод діраківського оператора, еквівалентну умові квадратичної інтегровності, у випадку як диска, так і довільної однозв'язної компактної області з межею на площині.

Третій параграф присвячений узагальненню результатів другого параграфу на випадок довільного викривленого однозв'язного многовиду M^2 . Для цього випадку знайдено число квадратично інтегровних нульових мод оператора Дірака позитивної та негативної кіральностей. Потім для випадку довільного компактного многовиду G з межею ∂G , приналежного M^2 , запропоновано нелокальну граничну умову на нульові моди:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \epsilon_{\mu\nu} dx^\nu |\psi(x)|^{-2} \partial^\mu |\psi(x)|^2 < -2(1 - \Phi_K), \quad (10)$$

де Φ_K — повна інтегральна кривизна, та доведена її еквівалентність умові квадратичної інтегровності нульових мод на M^2 .

У четвертому параграфі визначено поняття аксіальної аномалії A_2 та показаний її зв'язок з індексом оператора Дірака:

$$\text{Index } L_- = A_2. \quad (11)$$

Сформульований метод аналізу суперсиметричної функції розподілу (СФР) $Z(t) = \text{Tr}(\beta \exp(-tH^2))$ для обчислення аксіальної аномалії:

$$Z(t) = A_2 + O(\sqrt{t}).$$

Показана необхідність самоспряженості діраківського оператора для існування СФР. Показано, що СФР у випадку викривленого компактного многовиду з межею X складається з суми двох доданків, один з яких відповідає внеску відкритої внутрішності X , а інший внеску напіввідкритого інфінітезимального околу межі. Оскільки внесок першого доданку у повну аномалію визначається характеристичним класом Черна, задача обчислення аномалії зводиться до знаходження другого доданку. Далі з умови самоспряженості оператора Дірака, заданого на компактному многовиді з межею, виводяться спектральні граничні умови. Ставиться задача знаходження таких спектральних граничних умов, які були б еквівалентні умові квадратичної інтегровності нульових мод діраківського оператора на некомпактному розширенні компактного многовиду з межею. Показано, що зв'язок спектральної граничної умови та умови квадратичної інтегровності здійснюється через другу фундаментальну форму межі. На закінчення параграфу приведено значення повної аномалії (індексу), відповідної зформульованим спектральним граничним умовам:

$$A_2 = \text{integ}_+ \left(\Phi - \frac{1}{2} + \alpha \right),$$

або

$$A_2 = \text{integ}_- \left(\Phi + \frac{1}{2} + \beta \right), \quad (13)$$

де α та β — параметри, що характеризують спектральну граничну умову і Φ — повний потік магнітного поля.

П'ятий параграф присвячений обчисленню ядер теплопровідності квадрату оператора Дірака близько межі при накладених на межі спектральних граничних умовах. Ядра теплопровідності вираховані для випадку довільної повної інтегральної кривизни Φ_K ($-\infty < \Phi_K < \infty$), що її має поверхня з межею.

В шостому параграфі на основі обчислень п'ятого параграфу одержані значення повної аномалії (індексу), раніше приведені без доведення у четвертому параграфі. Потім визначені спектральні граничні умови, еквівалентні квадратичній інтегровності нульових мод на некомпактному розширенні вихідної компактної поверхні з межею. Зокрема:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}(1 - \Phi_K) \text{ при } \Phi \geq \left|1 - \frac{1}{2}\Phi_K\right|, \\ \beta &= \frac{1}{2}(1 - \Phi_K) \text{ при } \Phi \leq -\left|1 - \frac{1}{2}\Phi_K\right|. \end{aligned} \quad (14)$$

Показано, що як спектральні граничні умови, так і повна аномалія залежать у цьому випадку від повної інтегральної кривизни поверхні з межею. Завершує параграф обчислення аномалії для випадку довільної компактної ріманової поверхні з межею.

В третій главі розглянуті нульові моди діраківського оператора на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні X у зовнішньому магнітному полі. Запропоновано узагальнення теореми Ааронова-Кашера на випадок топологічно-скінченної орієнтованої поверхні та одержано вираз для індексу у просторі квадратично інтегровних функцій. Обговорені обмеження на простір припустимих функцій, зумовлені вимогою самоспряженості діраківського оператора, та одержано вираз для індексу оператора Дірака у випадку конформно-скінченної орієнтованої поверхні.

В першому параграфі знайдені нульові моди оператора Дірака на довільній (компактній або некомпактній) рімановій поверхні. Показано, що число нульових мод позитивної та негативної кіральностей дорівнює розмірності нульової групи когомологій з коефіцієнтами у пучку мероморфних, з визначенням дивізором, функцій на поверхні. Дивізор визначається розподілом магнітного потоку та потоку кривизни через поверхню. Для випадку компактної замкненої поверхні

з використанням теореми Рімана-Роха відтворений відомий результат Атьї-Зінгера для індексу. Показано, що метод, який використовується, дозволяє одержати також співвідношення для числа нульових мод позитивної та негативної кіральностей окремо. Зокрема, для компактно замкненої ріманової поверхні:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} L_- &= \Phi & \text{при } \Phi > g - 1, \\ \dim \operatorname{Ker} L_+ &= -\Phi & \text{при } -\Phi > g - 1, \end{aligned} \quad (15)$$

де g — рід поверхні.

У другому параграфі на основі формалізму, розвинуеного у першому параграфі, одержані загальні вирази для чисел нульових мод позитивної та негативної кіральностей:

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker} L_- &= \dim H^0(X, \sigma_{D_{1/2} + D' - D_+}), \\ \dim \operatorname{Ker} L_+ &= \dim H^0(X, \sigma_{D_{1/2} - D' - D_-}), \end{aligned} \quad (16)$$

де $D_{1/2}$ — дивізор голоморфного $\frac{1}{2}$ -диференціала і введено дивізори

$$D_+(p) = \begin{cases} I(-\Phi^\alpha - 1/2\Phi_K^\alpha), & p = p_\alpha, \\ 0, & p \neq p_\alpha, \end{cases} \quad (17)$$

$$D_-(p) = \begin{cases} I(\Phi^\alpha - 1/2\Phi_K^\alpha), & p = p_\alpha, \\ 0, & p \neq p_\alpha, \end{cases} \quad (18)$$

а D' — дивізор з нульовим ступенем; $p = p_\alpha$ відповідає проколу, а $p \neq p_\alpha$ — будь-якій іншій точці поверхні, $I(s)$ — ціла частина числа s , Φ^α та Φ_K^α — значення магнітного потоку та інтегральної кривизни у проколах. Знайдено також індекс у просторі квадратично-інтегровних функцій на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні. Розглянуті деякі окремі випадки топологічно-скінченної поверхні, для яких вищенаведені співвідношення істотно спрощуються.

Показано, що індекс у просторі квадратично-інтегровних функцій на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні залежить від числа ручок на поверхні (g) та числа граничних компонент поверхні (N). Більш того, у випадку $g > 0$, внаслідок теореми Абеля, індекс, взагалі кажучи, залежить також від взаємного розташування граничних компонент.

У третьому параграфі розглянуті обмеження на простір припустимих функцій, зумовлені самоспряженістю діраківського оператора. Одержано вираз для індексу у просторі квадратично-інтегровних функцій, узгоджених із самоспряженістю діраківського оператора у випадку конформно-скінченної орієнтованої поверхні:

$$\text{Index } L_- = \sum_{\alpha=1}^N I \left(\Phi^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \right) - \tilde{N}, \quad (19)$$

де \tilde{N} — число проколів з $\Phi^{(\alpha)} = 1/2 + n_\alpha$ ($n_\alpha \in \mathbb{Z}$), в яких використовується гранична умова

$$\begin{aligned} \lim_{r_\alpha \rightarrow 0} r_\alpha^{1/2(1+\Phi_K^{(\alpha)})} \psi_\alpha^+ &= 0, \\ \lim_{r_\alpha \rightarrow 0} r_\alpha^{1/2(1+\Phi_K^{(\alpha)})} \psi_\alpha^- &= c_\alpha^- \exp[-in_\alpha \theta_\alpha + i\chi_\alpha^-(\theta_\alpha)], \end{aligned} \quad (20)$$

де фаза χ_α^- — це деяка періодична функція.

Четверта глава присвячена дослідженню ефекту Ааронова-Бома у викривленому просторі. Розвинена квантова теорія розсіяння нерелятивістської частинки у полі космічної струни, що розглядається як суміщення магнітної та гравітаційної струн. Враховані ефекти, зумовлені скінченністю поперечних розмірів струни, при досить загальних припущеннях щодо розподілу магнітного поля та просторової кривизни усередині струни. Показано, що у певній області кутів диференціальний переріз розсіяння при всіх значеннях абсолютної величини хвильового вектору падаючої частинки залежить істотним чином від величини магнітного потоку струни.

Перший параграф носить вступний характер та містить основні поняття теорії розсіяння та постановку задачі. Наведено гамільтоніан нерелятивістської частинки

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r^2 f} [(r\partial_r)^2 + (\partial_\phi - i\frac{e}{\hbar c} V + \frac{1}{2} i\sigma W)^2] + \sigma \frac{e}{\hbar c} B - \frac{1}{2} K \right\}, \quad (21)$$

у полі космічної струни, що характеризується метрикою

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + f(X, Y)(dX^2 + dY^2), \quad (22)$$

та магнітним полем $B(x, y) = 0$ при $r > r_B$ на поверхні $z = const$. Розглядається випадок аксіально-симетричних напруженості магнітного поля та гаусової кривизни. Даний короткий огляд сучасного стану різних моделей космічних струн та вихрів. Особливу увагу приділено проблемі далекодіючих збурень у теорії розсіяння (по Л. Хьормандеру) та питанню визначення хвильових операторів у цьому випадку.

У другому параграфі визначені S -матриця та амплітуда розсіяння у випадку сингулярної космічної струни (тобто у випадку конічного простору з гаусовою кривизною $K = 2\pi\Phi_K(r/r_0)^{2\Phi_K}\delta(x)\delta(y)$ і магнітним полем $B = 2\pi(\hbar c/e)\Phi(r/r_0)^{2\Phi_K}\delta(x)\delta(y)$ на поверхні $z = const$; тут r_0 — параметр розмірності довжини):

$$(S - I')(k, \phi; k', \phi') = \delta(k - k') \left(\frac{i}{2\pi k} \right)^{1/2} f(k, \phi - \phi'), \quad (23)$$

де модифікований одиничний оператор I' характеризується сингулярним ядром

$$I'(k, \phi; k', \phi') = \frac{\delta(k - k')}{\sqrt{kk'}} \frac{1}{2} \{ \Delta(\phi - \phi' + \beta\pi) \exp[-i\mu(1 + \beta)\pi] + \Delta(\phi - \phi' - \beta\pi) \exp[i\mu(1 + \beta)\pi] \}, \quad (24)$$

$$f(k, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \left\{ \frac{\exp[i\mu(\phi + \beta\pi) - i\mu(1 + \beta)\pi]}{1 - \exp[-i(\phi + \beta\pi)]} \right\}$$

$$\frac{\exp[i\nu(\phi - \beta\pi) + i\mu(1 + \beta)\pi]}{1 - \exp[-i(\phi - \beta\pi)]} \}, \quad (25)$$

$$\mu = \Phi - \frac{1}{2}\sigma\Phi_K, \quad \nu = \text{integ.}(\Phi - \frac{1}{2}\sigma\Phi_K), \quad \beta = \Phi_K(1 - \Phi_K)^{-1}. \quad (26)$$

Показано, що незважаючи на надзвичайно сильну далекодію, що не задовольняє навіть умовам Хьормандера, хвильові оператори та S -матриця можуть бути визначені. Обговорене питання про можливість отримання несингулярної амплітуди розсіяння у цьому випадку та показано, що необхідно модифікувати її визначення відносно випадку короткодіючої взаємодії, а саме замінити одиничний оператор I на I' у визначенні амплітуди розсіяння через S -матрицю.

У третьому параграфі враховуються ефекти гравітаційної структури струни, коли гаусова кривизна на поверхні $z = \text{const}$ має вигляд

$$K = 2\pi\Phi_K^0 f^{-1}(x, y)\delta(x)\delta(y) + K'(x, y), \quad (27)$$

$K'(x, y)$ — інтегровна неперервна майже всюди функція. Використаний метод рівняння Ліппмана-Швінгера для знаходження S -матриці. Показано, що S -матриця та амплітуда розсіяння у цьому випадку розбиваються на суму двох доданків, один з яких відповідає розсіянню на сингулярній струні, а інший відповідає розсіянню на короткодіючому збуренні, що представляє відхилення гравітаційної структури від сингулярної струни. Як і очікувалось, другий доданок не містить сингулярностей. На закінчення параграфу проведені обчислення для конкретного прикладу гравітаційної структури типу квіткового горщика.

Четвертий параграф присвячений розгляду ефектів магнітної структури струни, тобто ефектів скінченності поперечних розмірів області магнітного потоку r_B . Показано, що при малих значеннях абсолютної величини хвильового вектору ефекти як гравітаційної, так і магнітної

тної структури стають неістотними. У випадку ж, коли розміри області магнітного потоку набагато перевищують розміри області викривлення простору, ефекти гравітаційної структури, схованої глибоко всередині магнітної структури, виявляються неістотними для велими широкої області значень хвильового вектору. Проведені обчислення для випадку, коли струна оточена непроникним потенційним бар'єром. Для цього випадку вирахована асимптотика амплітуди розсіяння при абсолютних значеннях хвильового вектору, що прагнуть до нескінченності (точніше, $k(\rho_B + \xi) \gg 1$):

$$f(k, \phi) = -e^{2ik\xi} \sqrt{\frac{\rho_B + \xi}{2}} (1 - \Phi_K) \sum_l \sqrt{\cos \left[\frac{1 - \Phi_K}{2} (\phi - \pi + 2l\pi) \right]} \times \\ \times \exp \left\{ i \left(\Phi - \frac{1}{2} \sigma \Phi_K \right) (\phi - \pi + 2l\pi) - 2ik(\rho_B + \xi) \cos \left[\frac{1 - \Phi_K}{2} (\phi - \pi + 2l\pi) \right] \right\} + \sqrt{\rho_B + \xi} O \left\{ [k(\rho_B + \xi)]^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad \phi \neq (\pm\beta\pi) \pmod{2\pi}, \quad (28)$$

де сума береться по цілим l , що задовольняють умові

$$-\frac{\phi}{2\pi} - \frac{1}{2}\beta < l < -\frac{\phi}{2\pi} + 1 + \frac{1}{2}\beta, \quad (29)$$

і $\xi + \rho_B = \frac{r_B}{1 - \Phi_K} (r_B/r_0)^{-\Phi_K}$. При ненульових потоках кривизни та абсолютних значеннях хвильового вектору, що прагнуть до нескінченності, переріз розсіяння залежить від магнітного потоку.

П'ятий параграф присвячений обговоренню результатів. Обговорено, зокрема, періодичність перерізу розсіяння по магнітному потоку та той факт, що при ненульових потоках кривизни та абсолютних значеннях хвильового вектору, що прагнуть до нескінченності, переріз розсіяння залежить від магнітного потоку.

В Заключенні сформульовані основні результати дисертаційної роботи. **В додатку А** здійснюється перетворення зсуву полів сигма-моделі на константу. **В додатку В** вираховані перетворення Лапласа

ядер теплопровідності. Додаток В присвячено обчисленню резольвенти гамільтоніана нерелятивістської частинки у полі сингулярної космічної струни.

Основні результати роботи, що виносять- ся на захист

1. На основі фізичної умови електронейтральності вакуумного конденсату, що впливає з емпірично очевидного факту відсутності у фізичному вакуумі ефекту Мейснера, показано, що простір еквівалентних вакуумів σ -моделі S^3 редукується до простору електронейтральних вакуумів S^1 . Доведено існування топологічно стабільних квантово-вихрових розв'язків у лінійної сигма-моделі з електронейтральним та ізотопічно неполяризованим конденсатами.
2. Знайдено число квадратично інтегровних нульових мод позитивної та негативної киральностей для оператора Дірака, заданого на довільному однозв'язному викривленому некомпактному многовиді M^2 у зовнішньому статичному магнітному полі. Для випадку довільного компактного многовиду з межею, приналежного M^2 , запропоновано нелокальну граничну умову на нульові моди та доведена її еквівалентність умові квадратичної інтегровності нульових мод на M^2 .
3. Вирахована аксіальна аномалія (індекс оператора Дірака у зовнішньому магнітному полі) для випадку довільного двовимірного компактного многовиду з межею та при довільних спектральних граничних умовах на межі. Показано, що зв'язок спектральної

граничної умови та умови квадратичної інтегровності на некомпактному розширенні вихідного многовиду з межею здійснюється через другу фундаментальну форму межі. Визначені спектральні граничні умови, еквівалентні квадратичній інтегровності нульових мод на некомпактному розширенні. Показано, що як спектральні граничні умови, так і повна аномалія залежать у цьому випадку від повної інтегральної кривизни поверхні з межею.

4. Одержані загальні вирази для чисел нульових мод позитивної та негативної кіральностей діраківського оператора, заданого у зовнішньому $U(1)$ калібрувальному полі, а також індексу у просторі квадратично-інтегровних функцій на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні. Показано, що індекс у просторі квадратично-інтегровних функцій на топологічно-скінченній орієнтованій поверхні залежить від числа ручок на поверхні (g) та числа граничних компонент поверхні (N), а при $g > 0$ також і від взаємного розташування граничних компонент.
5. Одержано вираз для індексу у просторі квадратично-інтегровних функцій, узгоджених із самоспряженістю діраківського оператора, у випадку конформно-скінченної орієнтованої поверхні.
6. Розвинена квантова теорія розсіяння нерелятивістської частинки у полі космічної струни, що розглядається як суміщення магнітної та гравітаційної струн. Враховані ефекти, зумовлені скінченністю поперечних розмірів струни, при досить загальних припущеннях щодо розподілу магнітного поля та просторової кривизни усередині струни. Визначені хвильові оператори, S -матриця та амплітуда розсіяння у випадку сингулярної космічної струни, тобто у випадку кінчного простору. Показано, що незважаючи на надзвичайно сильну далекодію, що не задовольняє навіть умовам

Хьормандера, хвильові оператори та S -матриця можуть бути визначені. Показано, що необхідно модифікувати визначення амплітуди розсіяння відносно випадку короткодіючої взаємодії.

7. Для випадку, коли струна оточена непроникним потенційним бар'єром, вирахована асимптотика амплітуди розсіяння при абсолютних значеннях хвильового вектору, прагнучих до нескінченності. Показано, що при ненульових потоках кривизни та абсолютних значеннях хвильового вектору, прагнучих до нескінченності, переріз розсіяння залежить від магнітного потоку.

Матеріали дисертації опубліковано в таких роботах:

1. *А.В.Мищенко, П.И.Фомин.* Квантованные вихри в киральном конденсате КХД // Проблемы физики высоких энергий и теории поля. -М.:Наука, 1989. С. 219-224.
2. *Мищенко А.В., Ситенко Ю.А.* Нелокальное граничное условие и нулевые моды дираковского оператора на двумерной поверхности в магнитном поле // УФЖ. 1991. Т.36, № 12. С.1865-1876.
3. *Мищенко А.В., Ситенко Ю.А.* Аксиальная аномалия для двумерного компактного многообразия с краем // Ядерная Физика. 1991. Т.54, Вып.4(10). С.1158-1182.
4. *A.V.Mishchenko and Yu.A.Sitenko.* Spectral boundary conditions and index theorem for two-dimensional compact manifold with boundary // Annals of Physics (N.Y.). 1992. Vol.218, № 2. P.199-232.
5. *Мищенко А.В., Ситенко Ю.А.* Нулевые моды двумерного дираковского оператора на некомпактной римановой поверхности во

внешнем магнитном поле // Ядерная Физика. 1993. Т.56, Вып.1. С.230-242.

6. Ю.А. Ситенко, А.В. Мищенко. Эффект Ааронова-Бома в искривленном пространстве и космические струны // ЖЭТФ. 1995. Т.108, Вып.5(11). С.1516-1553.

7. А.В.Мищенко, П.И.Фомин. Изотопически симметричные вихри в сигма-модели // Препринт ИТФ-87-135Р.

Mishchenko A.V. The effects of nontrivial topology in some quantum-field systems.

The thesis for degree of candidate of physical and mathematical sciences on speciality 01.04.02 — theoretical physics, Institute for Theoretical Physics NAS of Ukraine, Kiev, 1996.

Seven scientific works are defended, which contain a theoretical study of the effects of nontrivial topology in quantum-field systems. The existence of quantum-vortex solutions in the linear sigma-model with electroneutral and isotopically non-polarized condensates is shown. A quantum theory is developed for the scattering of a nonrelativistic particle in the field of a cosmic string regarded as a combination of magnetic and gravitational strings.

Мищенко А.В. Эффекты нетривиальной топологии в некоторых квантово-полевых системах.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика, Институт теоретической физики НАН Украины, Киев, 1996.

Защищается 7 научных работ, которые содержат теоретическое исследование эффектов нетривиальной топологии в квантово-полевых системах.

Показано существование квантово-вихревых решений в линейной сигма-модели с электронейтральным и изотопически неполяризованным конденсатами. Развита квантовая теория рассеяния нерелятивистской частицы в поле космической струны, рассматриваемой как совмещение магнитной и гравитационной струн.

Ключові слова:

Вихрі, індекс, ріманові поверхні, космічні струни, ефект Ааронова-Бома.

436826

Міщенко Олексій Володимирович

Ефекти нетривіальної топології в деяких квантово-польових системах. (Автореферат дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук.)

Зам.- 56

Формат 60 × 90/16

Обл.-вид.арк.- 1

Підписано до друку 23.04.96 р.

Тираж 100 прим.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України.