Чернівецький державний університет
ім. Ю Федьковича

На правах рукопису

Блажієвський Андрій Миколайович

ПІДСУМОВУВАННЯ ПОЛІПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ (ФУР'Є, БЕССЕЛЯ)

01.01.02—Диференціальні рівняння

01.01.01—Математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці-1996

Чернівецький державний університет

ім. Ю.Федьковича

На правах рукопису

Блажієвський Андрій Миколайович

ПІДСУМОВУВАННЯ ПОЛІПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ГІБРИДНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ (ФУР'Є, БЕССЕЛЯ)

01.01.02-Диференціальні рівняння

01.01.01-Математичний аналіз

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Чернівці-1996

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі вищої математики Технологічного університету Поділля.

Наукові керівники – доктор технічних наук, професор Рудницький В.Б.
– доктор фізико-математичних наук, професор Ленюк М.П.

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук, професор Шеремета М.М.
– доктор фізико-математичних наук, професор Вірченко Н.О.

Провідна установа – Інститут математики НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "25" червня 1996 р. о 14⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 в Чернівецькому державному університеті ім. Ю.Федьковича за адресою: 274012, м.Чернівці, вул. Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Чернівецького державного університету ім. Ю. Федьковича за адресою: 274000, м.Чернівці, вул. Л. Українки, 23.

Автореферат розіслано "24" травня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А.М.Садов'як

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У наш вік бурхливого науково-технічного прогресу, інтенсивного розгортання будівництва та впровадження в практику економічно вигідних технологій, механізації всіх галузей промислового виробництва і сільскогосподарських робіт, а також домашнього побуту, виникає потреба в надійній експлуатації різного роду і різного рівня машинній техніці. Серед численних технічних задач, що виникають при конструюванні і розрахунку на міцність конструктивних елементів м шин, при проектуванні інженерних споруд, при дослідженні кінетики фізı чних і хіміко-технологічних процесів на першому місці стоїть задача вивчення температурних полів і напружень. Оскільки конструктивні елементи в результаті дії на них стрибкоподібного температурного поля (миттєвого теплового удару) працюють в стаціонарному режимі, то необхідно, в першу чергу, знати величину стаціонарного температурного навантаження. Особливо важливою ця задача в даний час стає у зв'язку з широким впровадженням композиційних матеріалів.

Практика показує, що навіть у найпростіших модельних температурних задачах величина, що характеризує стаціонарний стан, виражається у вигляді функціонального ряду, залежного від одного або багатьох параметрів, який може бути умовно збіжним навіть і тоді, коли зображає аналітичну функцію. Виникає природнє намагання замінити такий функціональний ряд його сумою, тобто підсумувати даний функціональний ряд і мати в подальшому справу з функцією, що особливо важливо при інженерних розрахунках. Цим проблемам і присв'ячена дана дисертаційна робота.

Мета роботи полягає у підсумуванні поліпараметричної групи функціональних рядів, залежних від багатьох параметрів. Загальні члени поліпараметричних функціональних рядів виражаються через тригонометричні функції, функції Бесселя та алгебраїчну функцію $f(\lambda,\chi)=\left(\lambda^2+\chi^2\right)^{-1}$.

<u>**Методика дослідження.**</u> При підсумовуванні поліпараметричних функціональних рядів використовувались елементи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені всіма можливими розміщеннями диференціальних операторів Фур'є $\mathbf{F}\equiv\frac{d^2}{dr^2}$ та Бесселя $\mathbf{B}_{\nu,\alpha}\equiv\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}, \nu\geq\alpha\geq-\frac{1}{2}$ на сегменті з одною й двома точками спряження.

<u>**Наукова новизна**</u> дисертаційної роботи полягає у підсумовуванні поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень, породжених диференціальними операторами Фур'є та Бесселя.

<u>**На захист виносяться такі положення:**</u>

1.Методика підсумовування і підсумовування поліпараметричних функціональних рядів, загальні члени яких виражаються через тригонометричні функції $\cos q_{jn}r, \sin q_{jn}r$, функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(q_{mn}r), N_{\nu,\alpha}(q_{mn}r)$ та алгебраїчну функцію $f(\lambda_n,\chi)$, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (Фур'є,Бесселя).

2.Методика підсумовування і підсумовування поліпараметричних функціональних рядів, загальні члени яких виражаються через тригонометричні функції $\cos q_{in}r$, $\sin q_{in}r$, $\cos q_{jn}r$, $\sin q_{jn}r$ $(i\neq j=1,2)$, функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(q_{mn}r)$ і $N_{\nu,\alpha}(q_{mn}r)$ та алгебраїчну функцію $f(\lambda_n,\chi)$, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (Фур'є, Фур'є, Бесселя).

3.Методика підсумовування і підсумовування поліпараметричних функціональних рядів, загальні члени яких виражаються через тригонометричні функції $\cos q_{mn}r$ і $\sin q_{mn}r$, функції Бесселя $J_{\nu_i,\alpha_i}(q_{in}r), N_{\nu_i,\alpha_i}(q_{in}r), J_{\nu_j,\alpha_j}(q_{jn}r), N_{\nu_j,\alpha_j}(q_{jn}r), i \neq j = 1,2$ та алгебраїчну функцію $f(\lambda_n, \chi)$, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (Фур'є, Бесселя, Бесселя).

4.Теореми обгрунтування формул підсумовування поліпараметричних функціональних рядів.

Практична цінність. Показано, що метод скінченних гібридних інтегральних перетворень з його логічною схемою застосування може бути поширений і на підсумовування поліпараметричних функціональних рядів, що зустрічаються у розв'язках статичних задач термопружності, стаціонарних задач гідромеханіки, задач електростатики та ін. для кусково-однорідних середовищ, що піддаються дії стрибкоподібних навантажень.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались на наукових семінарах кафедр вищої математики і прикладної механіки Технологічного університету Поділля, на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича, на науково-молодіжній конференції ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, КПІ, 1993р.), на науково-практичній конференції "Наукові основи сучасних прогресивних технологій" (м. Хмельницький, ТУП, 1994р.), на міжнародній конференції "Нелінійні граничні задачі математичної фізики та їх застосування" (м.Чернівці, ЧДУ, 1995р.), на науково-практичній конференції "Технологічний університет в системі реформування освітньої та наукової діяльності подільського регіону" (м.Хмельницький, ТУП, 1995р.).

В цілому матеріали кандидатської дисертації доповідались на республіканському семінарі "Сучасні проблеми математики" (м.Чернівці, ЧДУ, 1995р.), на науковому семінарі кафедри вищої математики

Технологічного університету Поділля "Основні проблеми математики і механіки" (м.Хмельницький, 1995р.), на науковому семінарі "Диференціальні рівняння та їх застосування" (м.Київ, Технічний національний університет "Політехнік", 1995р., проф. Вірченко Н.О.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 робіт, з яких [9], [10] у співавторстві. Науковому керівникові належить обговорення одержаних результатів.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків і списку цитованої літератури. Повний обсяг роботи складає 154 сторінки машинопису (текстовий редактор Microsoft Word 6.0 for Windows). Бібліографічний список містить 60 назв.

ЗМІСТ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У вступі до дисертації обгрунтовано актуальність теми, дано короткий огляд літератури за тематикою дисертації й зроблено опис одержаних результатів за розділами.

У сучасній довідковій літературі можна зустріти поліпараметричні функціональні ряди, загальні члени яких залежать від спеціальних функцій одного характеру (спецфункції, що є розв'язками одного й того ж диференціального рівняння Фур'є,Бесселя,Лежандра і т.д.). Такі функціональні ряди виникають, як правило, при вивченні стаціонарного режиму однорідних структур, які знаходяться під дією стрибкоподібного навантаження. Якщо ми маємо справу з неоднорідними (кусково-однорідними) середовищами, то вже при вивченні навіть найпростішого теплового процесу з'являються поліпараметричні функціональні ряди, загальні члени яких є суперпозиціями спеціальних функцій математичної фізики різного характеру (тригонометричні функції та функції Бесселя). Підсумовуванню відсутньої в математичній літературі поліпараметричної групи функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (СГІП) присв'ячені наступні три розділи дисертації.

Перший розділ, який складається з трьох параграфів, присв'ячений підсумовуванню поліпараметричних функціональних рядів методом СГІП Фур'є-Ганкеля 2-го роду (§1), Ганкеля 1-го роду-Фур'є (§2), Ганкеля 2-го роду-Фур'є (§3). Оскільки логічна схема підсумовування поліпараметричних функціональних рядів ідентична, то наведемо, як приклад, результати другого параграфа (розділ I).

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$\mathrm{I}_1 = \{r : r \in (0, R_1) \bigcup (R_1, R_2); R_2 < +\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя (для модифікованих циліндричних функцій) та Фур'є

$$\mathrm{L}_1[U_1] \equiv \left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha} - \omega_1^2\right) U_1(r) = -f_1(r), \omega_1 > 0, r \in (0, R_1),$$

$$\mathrm{L}_2[U_2] \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} - \omega_2^2\right) U_2(r) = -f_2(r), \omega_2 \geq 0, r \in (R_1, R_2) \qquad (1.1)$$

за крайовими умовами

$$\left.\frac{d}{dr}\left(\frac{U_1}{r^{\nu-\alpha}}\right)\right|_{r=0} = 0, \quad \left.\left(\alpha_{22}^2 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^2\right) U_2\right|_{r=R_2} = g_2 \qquad (1.2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) U_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) U_2\right]_{r=R_1} = 0, j = 1,2. \qquad (1.3)$$

Тут $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, c_{1k} c_{2k} > 0, \left(\alpha_{11}^0\right)^2 + \left(\beta_{11}^0\right)^2 \neq 0, \left(\alpha_{22}^2\right)^2 + \left(\beta_{22}^2\right)^2 \neq 0$.

$\mathrm{B}_{\nu,\alpha} \equiv \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2\alpha+1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}, \nu \geq \alpha \geq -\dfrac{1}{2}, \mathrm{B}_{\nu,\alpha}$ – оператор Бесселя.

Обмежений на множині I_1 розв'язок крайової задачі (1.1)-(1.3) будується методом функцій Коші:

$$U_j\left(r,\overline{\omega}\right)=\int\limits_0^{R_1}H_{\nu,\alpha;j1}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)f_1(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho+\int\limits_{R_1}^{R_2}H_{\nu,\alpha;j2}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)f_2(\rho)d\rho+ \qquad (1.4)$$
$$+W_{\nu,\alpha;j2}\left(r,\overline{\omega}\right)g_2,\ j=1,2.$$

У формулах (1.4) беруть участь породжені неоднорідністю системи (1.1) явно виписані функції впливу $H_{(\nu,\alpha);jk}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)$:

$$H_{\nu,\alpha;11}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)=\frac{\omega_1^{2\alpha}}{\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)}\begin{cases}I_{\nu,\alpha}(\omega_1 r)\left[\Delta_2^2(\omega_2R_1,\omega_2R_2)\Phi^1_{\nu,\alpha;11}(\omega_1R_1,\omega_1\rho)-\right.\\ I_{\nu,\alpha}(\omega_1\rho)\left[\Delta_2^2(\omega_2R_1,\omega_2R_2)\Phi^1_{\nu,\alpha;11}(\omega_1R_1,\omega_1 r)-\right.\end{cases}$$
$$\begin{matrix}\left.-\Delta_1^2(\omega_2R_1,\omega_2R_2)\Phi^1_{\nu,\alpha;21}(\omega_1R_1,\omega_1\rho)\right],0<r<\rho<R_1\\ \left.-\Delta_1^2(\omega_2R_1,\omega_2R_2)\Phi^1_{\nu,\alpha;21}(\omega_1R_1,\omega_1 r)\right],0<\rho<r<R_1\end{matrix};$$

$$H_{\nu,\alpha;12}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)=c_{21}\frac{I_{\nu,\alpha}(\omega_1 r)}{\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)}F^2_{22}(\omega_2R_2,\omega_2\rho); \qquad (1.5)$$

$$H_{\nu,\alpha;21}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{I_{\nu,\alpha}(\omega_1\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)}F^2_{22}(\omega_2R_2,\omega_2 r);$$

$$H_{\nu,\alpha;22}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)=\frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)}\begin{cases}F^2_{22}(\omega_2R_2,\omega_2\rho)\left[\mathrm{U}^{11}_{\nu,\alpha;11}(\omega_1R_1)F^1_{22}(\omega_2R_1,\omega_2 r)-\right.\\ F^2_{22}(\omega_2R_2,\omega_2 r)\left[\mathrm{U}^{11}_{\nu,\alpha;11}(\omega_1R_1)F^1_{22}(\omega_2R_1,\omega_2\rho)-\right.\end{cases}$$
$$\begin{matrix}\left.-\mathrm{U}^{11}_{\nu,\alpha;21}(\omega_1R_1)F^1_{12}(\omega_2R_1,\omega_2 r)\right],R_1<r<\rho<R_2\\ \left.-\mathrm{U}^{11}_{\nu,\alpha;21}(\omega_1R_1)F^1_{12}(\omega_2R_1,\omega_2\rho)\right],R_1<\rho<r<R_2\end{matrix},$$

та породжені крайовою умовою (2) функції Гріна $W_{(\nu,\alpha);jk}\left(r,\overline{\omega}\right)$:

$$W_{\nu,\alpha;12}\left(r,\overline{\omega}\right)=\frac{I_{\nu,\alpha}(\omega_1 r)}{\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)}\Delta_1^2(\omega_2R_1,\omega_2R_2); \qquad (1.6)$$
$$W_{\nu,\alpha;22}\left(r,\overline{\omega}\right)=\frac{\mathrm{U}^{11}_{\nu,\alpha;11}(\omega_1R_1)F^1_{11}(\omega_2R_1,\omega_2 r)-\mathrm{U}^{11}_{\nu,\alpha;21}(\omega_1R_1)F^1_{12}(\omega_2R_1,\omega_2 r)}{\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)},$$

При цьому в алгебраїчній формі виписується умова розв'язності крайової задачі:

$$\Delta_{\nu,\alpha}(\overline{\omega}) \equiv \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\mathrm{U}_{\nu,\alpha;i1}^{11}(\omega_1 R_1)\Delta_{3-i}^{2}(\omega_2 R_1, \omega_2 R_2) \neq 0, \quad \overline{\omega} = \{\omega_1, \omega_2\}. \tag{1.7}$$

Тут застосовано позначення:

$I_{\nu,\alpha}(\omega r) = \dfrac{I_\nu(\omega r)}{(\omega r)^\alpha}$ і $K_{\nu,\alpha}(\omega r) = \dfrac{K_\nu(\omega r)}{(\omega r)^\alpha}$, де $I_\nu(x)$ та $K_\nu(x)$ - модифіковані функції Бесселя відповідно першого і другого роду порядку ν,

$$\mathrm{V}_{jm}^{k1}(\omega_s R_k) \equiv \left(\alpha_{jm}^{k}\frac{d}{dr} + \beta_{jm}^{k}\right)\mathrm{ch}(\omega_s r)\Big|_{r=R_k} = \alpha_{jm}^{k}\omega_s \mathrm{sh}(\omega_s R_k) + \beta_{jm}^{k}\mathrm{ch}(\omega_s R_k),$$

$$\mathrm{V}_{jm}^{k2}(\omega_s R_k) \equiv \left(\alpha_{jm}^{k}\frac{d}{dr} + \beta_{jm}^{k}\right)\frac{\mathrm{sh}(\omega_s r)}{\omega_s}\Big|_{r=R_k} = \alpha_{jm}^{k}\mathrm{ch}(\omega_s R_k) + \beta_{jm}^{k}\frac{\mathrm{sh}(\omega_s R_k)}{\omega_s},$$

$$\mathrm{U}_{jm}^{k1}(\omega_s R_k) \equiv \left(\alpha_{jm}^{k}\frac{d}{dr} + \beta_{jm}^{k}\right)I_{\nu,\alpha}(\omega_s r)\Big|_{r=R_k} = \left(\alpha_{jm}^{k}\frac{\nu-\alpha}{r} + \beta_{jm}^{k}\right)I_{\nu,\alpha}(\omega_s R_k) +$$

$$+\alpha_{jm}^{k}\omega_s^2 R_k I_{\nu+1,\alpha+1}(\omega_s R_k), \quad \mathrm{U}_{jm}^{k2}(\omega_s R_k) \equiv \left(\alpha_{jm}^{k}\frac{d}{dr} + \beta_{jm}^{k}\right)K_{\nu,\alpha}(\omega_s r)\Big|_{r=R_k} =$$

$$= \left(\alpha_{jm}^{k}\frac{\nu-\alpha}{r} + \beta_{jm}^{k}\right)K_{\nu,\alpha}(\omega_s R_k) - \alpha_{jm}^{k}\omega_s^2 R_k K_{\nu+1,\alpha+1}(\omega_s R_k),$$

$$\Phi_{\nu,\alpha;jm}^{k}(\omega_s R_k; \omega_s r) = \mathrm{U}_{\nu,\alpha;jm}^{k1}(\omega_s R_k)K_{\nu,\alpha}(\omega_s r) - \mathrm{U}_{\nu,\alpha;jm}^{k2}(\omega_s R_k)I_{\nu,\alpha}(\omega_s r),$$

$$F_{jm}^{k}(\omega_s R_k, \omega_s r) = \mathrm{V}_{jm}^{k2}(\omega_s R_k)\mathrm{ch}(\omega_s r) - \mathrm{V}_{jm}^{k1}(\omega_s R_k)\frac{\mathrm{sh}(\omega_s r)}{\omega_s},$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;j}(\omega_2 R_1, \omega_2 R_2) = \mathrm{U}_{\nu,\alpha;j2}^{11}(\omega_2 R_1)\mathrm{U}_{\nu,\alpha;22}^{22}(\omega_2 R_2) - \mathrm{U}_{\nu,\alpha;j2}^{12}(\omega_2 R_1)\mathrm{U}_{\nu,\alpha;22}^{21}(\omega_2 R_2),$$

$$\Delta_j^2(\omega_2 R_1, \omega_2 R_2) = \mathrm{V}_{j2}^{12}(\omega_2 R_1)\mathrm{V}_{22}^{21}(\omega_2 R_2) - \mathrm{V}_{j2}^{11}(\omega_2 R_1)\mathrm{V}_{22}^{22}(\omega_2 R_2),$$

$$\Delta_{k3}(\omega_3 R_2, \omega_3 R_3) = \mathrm{V}_{k2}^{21}(\omega_3 R_2)\mathrm{V}_{33}^{32}(\omega_3 R_3) - \mathrm{V}_{k2}^{22}(\omega_3 R_2)\mathrm{V}_{33}^{31}(\omega_3 R_3).$$

Побудуймо роз'язок крайової задачі (1.1)-(1.3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ганкеля 1-го роду-Фур'є:

$$\mathrm{H}_{\nu,\alpha;1n}[f(r)] = \int_0^{R_2} f(r)\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\sigma(r)dr \equiv f_n; \tag{1.8}$$

$$\mathbf{H}^{-1}_{\nu,\alpha;1n}[f_n]=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)}{\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2}=f(r), \|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2=\int_0^{R_2}\left[\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\right]^2\sigma(r)dr. \quad (1.9)$$

Тут $\sigma(r)=\sigma_1 r^{2\alpha+1}\Theta(r)\Theta(R_1-r)+\sigma_2\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)$- вагова функція, $\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)=\mathrm{V}_{\nu,\alpha;1}(r,\lambda_n)\Theta(r)\Theta(R_1-r)+\mathrm{V}_{\nu,\alpha;2}(r,\lambda_n)\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)$- спектральна функція, $\Theta(x)$-одинична функція Хевісайда; λ_n-корені, які утворюють дискретний спектр трансцендентного рівняння, породженого відповідною задачею Штурма-Ліувілля.

Одержаний розв'язок крайової задачі (1.1)-(1.3) має структуру:

$$U_j(r,\overline{\omega})=\int_0^{R_1}\mathcal{M}_{\nu,\alpha;j1}(r,\rho,\overline{\omega})f_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha+1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{M}_{\nu,\alpha;j2}(r,\rho,\overline{\omega})f_1(\rho)\sigma_2 d\rho+ \\ +\mathcal{N}_{\nu,\alpha;j2}(r,\overline{\omega})g_2,\ j=1,2. \quad (1.10)$$

Тут функції впливу й функції Гріна зображаються поліпараметричними функціональними рядами:

$$\mathcal{N}_{\nu,\alpha;j2}(r,\overline{\omega})=\sigma_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha;2}(R_2,\lambda_n)\mathrm{V}_{\nu,\alpha;1}(r,\lambda_n)}{\alpha_{22}^2(\lambda_n^2+\omega_2^2)\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2},\quad j=1,2; \quad (1.11)$$

$$\mathcal{M}_{\nu,\alpha;jk}(r,\rho,\overline{\omega})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)\mathrm{V}_{\nu,\alpha;k}(\rho,\lambda_n)}{(\lambda_n^2+\omega_2^2)\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2},\quad j,k=1,2; \quad (1.12)$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язки (1.4) і (1.10), одержуємо формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha;2}(R_2,\lambda_n)\mathrm{V}_{\nu,\alpha;1}(r,\lambda_n)}{\alpha_{22}^2(\lambda_n^2+\omega_2^2)\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2}=\frac{1}{\sigma_2}W_{\nu,\alpha;j2}(r,\overline{\omega}),\quad j=1,2; \quad (1.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)\mathrm{V}_{\nu,\alpha;k}(\rho,\lambda_n)}{(\lambda_n^2+\omega_2^2)\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2}=\frac{1}{\sigma_k}H_{\nu,\alpha;jk}(r,\rho,\overline{\omega});\quad j,k=1,2. \quad (1.14)$$

Теорема. *Якщо* $f(r) \equiv f_1(r)\Theta(r)\Theta(R_1 - r) + f_2(r)\Theta(r - R_1)\Theta(R_2 - r)$ *є двічі неперервно-диференційовною функцією на множині* I_1, *задовольняє однорідні крайові умови (1.2) та умови спряження (1.3) й виконується умова розв'язності (1.7), то справедливі формули (1.13)-(1.14) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів.*

Такого ж характеру результати одержані в кожному параграфі першого розділу. У тому випадку, коли $r \ge R_0 > 0$ додається ще одна група поліпараметричних функціональних рядів, породжених крайовою умовою в точці $r = R$.

Другий розділ присв'ячений підсумовуванню функціональних рядів методом СГІП Фур'є-Фур'є-Ганкеля 2-го роду (§1), Фур'є-Ганкеля 2-го роду-Фур'є (§2), Ганкеля 1-го роду-Фур'є-Фур'є (§3), Ганкеля 2-го роду-Фур'є-Фур'є (§4).

Для прикладу подамо результати другого параграфа.

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$\mathrm{I}_2 = \{r: r \in (R_0, R_1) \bigcup (R_1, R_2) \bigcup (R_2, R_3); R_0 \ge 0, R_3 < +\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Фур'є та Бесселя (для модифікованих циліндричних функцій)

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_1[U_1] &\equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} - \omega_1^2\right)U_1(r) = -f_1(r), \omega_1 \ge 0, r \in (R_0, R_1), \\ \mathrm{L}_2[U_2] &\equiv \left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha} - \omega_2^2\right)U_2(r) = -f_2(r), \omega_2 > 0, r \in (R_1, R_2), \qquad (2.1) \\ \mathrm{L}_3[U_3] &\equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} - \omega_3^2\right)U_3(r) = -f_3(r), \omega_3 \ge 0, r \in (R_2, R_3) \end{aligned}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)U_1\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left(\alpha_{33}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{33}^3\right)U_3\Big|_{r=R_3} = g_3 \qquad (2.2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)U_{k}-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)U_{k+1}\right]_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2. \quad (2.3)$$

Обмежений на множині I_2 розв'язок крайової задачі (2.1)-(2.3) будується методом функцій Коші:

$$U_j\left(r,\overline{\omega}\right)=\int_{R_0}^{R_1}H_{\nu,\alpha;j1}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)f_1(\rho)d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{\nu,\alpha;j2}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)f_2(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{R_3}H_{\nu,\alpha;j3}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)f_3(\rho)d\rho+W_{\nu,\alpha;j0}\left(r,\overline{\omega}\right)g_0+W_{\nu,\alpha;j3}\left(r,\overline{\omega}\right)g_3,\ j=\overline{1,3}. \quad (2.4)$$

У формулах (2.4) беруть участь породжені неоднорідністю системи (2.1) явно виписані функції впливу $H_{(\nu,\alpha);jk}\left(r,\rho,\overline{\omega}\right)$ та породжені крайовою умовою (2.2) функції Гріна $W_{(\nu,\alpha);jk}\left(r,\overline{\omega}\right)$.

При цьому в алгебраїчній формі виписується умова розв'язності крайової задачі:

$$\Delta_{\nu,\alpha}\left(\overline{\omega}\right)\equiv\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\,\Delta_{0i}(\omega_1R_0,\omega_1R_1)\mathrm{A}^2_{\nu,\alpha;3-i}\left(\overline{\omega}\right)\neq0,\quad \overline{\omega}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}. \quad (2.5)$$

Тут застосовано позначення:

$$\Delta_{0k}(\omega_1R_0,\omega_1R_1)=\mathrm{V}_{11}^{01}(\omega_1R_0)\mathrm{V}_{k1}^{12}(\omega_1R_1)-\mathrm{V}_{11}^{02}(\omega_1R_0)\mathrm{V}_{k1}^{11}(\omega_1R_1),$$
$$\mathrm{A}^2_{\nu,\alpha;j}\left(\overline{\omega}\right)=\Delta_{\nu,\alpha;j1}(\omega_2R_1,\omega_2R_2)\Delta_{23}(\omega_3R_2,\omega_3R_3)-$$
$$-\Delta_{\nu,\alpha;j2}(\omega_2R_1,\omega_2R_2)\Delta_{13}(\omega_3R_2,\omega_3R_3).$$

Побудуймо роз'язок крайової задачі (2.1)-(2.3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Ганкеля 2-го роду-Фур'є:

$$\mathrm{H}_{\nu,\alpha;2n}[f(r)]=\int_{R_0}^{R_3}f(r)\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\sigma(r)dr\equiv f_n; \quad (2.6)$$

$$\mathrm{H}^{-1}_{\nu,\alpha;2n}[f_n]=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\frac{\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)}{\left\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\right\|^2}\equiv f(r),\left\|\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\right\|^2=\int_{R_0}^{R_3}\left[\mathrm{V}_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\right]^2\sigma(r)dr. \quad (2.7)$$

Тут

$$\sigma(r)=\sigma_1\Theta(r-R_0)\Theta(R_1-r)+\sigma_2 r^{2\alpha+1}\Theta(r-R_1)\Theta(R_2-r)+\sigma_3\Theta(r-R_2)\Theta(R_3-r)$$

- вагова функція, $V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)=\sum_{k=1}^{3}V_{\nu,\alpha;k}(r,\lambda_n)\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)$- спектральна функція, λ_n-корені, які утворюють дискретний спектр трансцендентного рівняння, породженого відповідною задачею Штурма-Ліувілля.

Одержаний розв'язок крайової задачі (2.1)-(2.3) має структуру:

$$\begin{gathered}U_j(r,\overline{\omega})=\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{M}_{\nu,\alpha;j1}(r,\rho,\overline{\omega})f_1(\rho)\sigma_1 d\rho+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{M}_{\nu,\alpha;j2}(r,\rho,\overline{\omega})f_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha+1}d\rho+\\+\int_{R_2}^{R_3}\mathcal{M}_{\nu,\alpha;j3}(r,\rho,\overline{\omega})f_3(\rho)\sigma_3 d\rho+\mathcal{N}_{\nu,\alpha;j0}(r,\overline{\omega})g_0+\mathcal{N}_{\nu,\alpha;j3}(r,\overline{\omega})g_3,\ j=\overline{1,3}.\end{gathered}\tag{2.8}$$

Тут функції впливу й функції Гріна зображаються поліпараметричними функціональними рядами:

$$\mathcal{N}_{\nu,\alpha;j0}(r,\overline{\omega})=-\sigma_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;1}(R_0,\lambda_n)V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)}{\alpha_{11}^0(\lambda_n^2+\omega_3^2)\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2},\ j=\overline{1,3};\tag{2.9}$$

$$\mathcal{N}_{\nu,\alpha;j2}(r,\overline{\omega})=\sigma_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;3}(R_3,\lambda_n)V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)}{\alpha_{33}^3(\lambda_n^2+\omega_3^2)\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2},\ j=\overline{1,3};\tag{2.10}$$

$$\mathcal{M}_{\nu,\alpha;jk}(r,\rho,\overline{\omega})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)V_{\nu,\alpha;k}(\rho,\lambda_n)}{(\lambda_n^2+\omega_3^2)\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2},\ \ j,k=\overline{1,3}.\tag{2.11}$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язки (2.4) і (2.8), одержуємо формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;1}(R_0,\lambda_n)V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)}{\alpha_{11}^0(\lambda_n^2+\omega_3^2)\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2}=-\frac{1}{\sigma_1}W_{\nu,\alpha;j0}(r,\overline{\omega}),\ j=\overline{1,3};\tag{2.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_{\nu,\alpha;3}(R_3,\lambda_n)V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n)}{\alpha_{33}^3(\lambda_n^2+\omega_3^2)\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\|^2}=W_{\nu,\alpha;j3}(r,\overline{\omega}),\quad j=\overline{1,3};\tag{2.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{\nu,\alpha;j}(r,\lambda_n) V_{\nu,\alpha;k}(\rho,\lambda_n)}{\left(\lambda_n^2+\omega_3^2\right)\left\|V_{\nu,\alpha}(r,\lambda_n)\right\|^2} = \frac{1}{\sigma_k} H_{\nu,\alpha;jk}(r,\rho,\overline{\omega}); \quad j,k=\overline{1,3}. \qquad (2.14)$$

Теорема. *Якщо* $f(r) \equiv \sum_{k=1}^{3} f_k(r)\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)$ *є двічі неперервно-диференційовною функцією на множині* I_2, *задовольняє однорідні крайові умови (2.2) та умови спряження (2.3) й виконується умова розв'язності (2.5), то справедливі формули (2.12)-(2.14) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів.*

Такого ж характеру результати одержані в кожному параграфі другого розділу.

Структура третього розділу повторює структуру другого розділу із заміною диференціального оператора Фур'є $\mathbf{F}$ на диференціальний оператор Бессселя $\mathbf{B}_{\nu,\alpha}$. Тут підсумовано поліпараметричні функціональні ряди методом СГІП Фур'є-Ганкеля 2-го роду-Ганкеля 2-го роду (§1), Ганкеля 1-го роду-Фур'є-Ганкеля 2-го роду (§2), Ганкеля 2-го роду-Фур'є-Ганкеля 2-го роду (§3), Ганкеля 1-го роду-Ганкеля 2-го роду-Фур'є (§4), Ганкеля 2-го роду-Ганкеля 2-го роду-Фур'є (§5).

У всіх параграфах дисертаційної роботи явно виписано алгебраїчну умову збіжності досліджуваних функціональних рядів. Зауважимо, що загальні члени поліпараметричних функціональних рядів виражаються через алгебраїчну функцію $f(\lambda,\chi)=\left(\lambda^2+\chi^2\right)^{-1}$.. Запропонована методика дає можливість замінити функцію $f(\lambda,\chi)$ на $f_n(\lambda,\chi)=\left(\lambda^2+\chi^2\right)^{-n}, n\in\mathbf{N}$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Підсумовано поліпараметричну групу функціональних рядів, загальні члени яких виражаються через тригонометричні функції

$\cos q_{jn}r$, $\sin q_{jn}r$, функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(q_{mn}r), N_{\nu,\alpha}(q_{mn}r)$ та алгебраїчну функцію $f(\lambda_n,\chi)$, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (Фур'є,Бесселя).

2. Підсумовано поліпараметричну групу функціональних рядів, загальні члени яких виражаються через тригонометричні функції $\cos q_{in}r$, $\sin q_{in}r$, $\cos q_{jn}r$, $\sin q_{jn}r$ $(i \neq j = 1,2)$, функції Бесселя $J_{\nu,\alpha}(q_{mn}r)$ і $N_{\nu,\alpha}(q_{mn}r)$ та алгебраїчну функцію $f(\lambda_n,\chi)$, методом скінченного гібридного і тегрального перетворення (Фур'є, Фур'є, Бесселя).

3. Підс мовано поліпараметричну групу функціональних рядів, загальні члени яких виражаються через тригонометричні функції $\cos q_{mn}r$ і $\sin q_{mn}r$, функції Бесселя $J_{\nu_i,\alpha_i}(q_{in}r), N_{\nu_i,\alpha_i}(q_{in}r), J_{\nu_j,\alpha_j}(q_{jn}r), N_{\nu_j,\alpha_j}(q_{jn}r)$, $i \neq j = 1,2$ та алгебраїчну функцію $f(\lambda_n,\chi)$, методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (Фур'є, Бесселя, Бесселя).

4. Сформульовано теореми, які обгрунтовують підсумовування поліпараметричних функціональних рядів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНО В НАСТУПНИХ РОБОТАХ:

1.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 2-го роду-Фур'є-Фур'є // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1993. –Вип. 2.– С. 20-34.

2.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Ханкеля 2-го роду-Ханкеля 2-го роду// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 3.– С. 22-36.

3.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Фур'є-Ханкеля 2-го роду // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. –Вип. 5.– С. 36-46.

4.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 2-го-Фур'є роду // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. –Вип. 6.– С. 3-13.

5.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 2-го роду // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. –Вип. 7.– С. 16-21.

6.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 1-го роду-Фур'є // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики АН України, 1995. –Вип. 8.– С. 17-25.

7.Блажієвський А.М. Сумування функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Бесселя,Фур'є) // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. –Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С. 28.

8.Блажієвський А.М. Підсумовування функціональних рядів, породжених одним класом стаціонарних задач математичної фізики неоднорідних структур // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения : Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – С. 28-30.

9.Блажієвський А.М.,Рудницький В.Б. Сумування функціональних рядів методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 1-го роду з одною точкою спряження // Наукові основи сучасних прогресивних технологій: Тези доповідей науково-практичної конференції – Хмельницький: Технологічний університет Поділля, 1994. – С.79.

10.Блажієвський А.М., Рудницький В.Б. Розв'язування одного класу крайових задач методом скінченних гібридних інтегральних перетворень (Фур'є,Бесселя) // Науково-практична конференція "Технологічний університет в системі реформування освітньої та наукової діяльності подільського регіону": Тези доповідей. Том 1. – Хмельницький: Технологічний університет Поділля, 1995.– С. 188.

Blazhievsky Andrew M. Summation of polyparametrical functional series by the method of finite hybrid integral transforms. Manuscript. Thesis for a degree of Doctor of Philosophy (Ph.D.) in Physics and Mathematics, specialities 01.01.01 – Mathematical Analysis, 01.01.02 – Differential Equations. Chernivtsy State University, Chernivtsy, 1996.

The sums of polyparametrical group of functional series are obtained by the method of finite hybrid integral transforms, generated by a combination of differential Fourier and Bessel operators. Ten scientific research papers were submitted for a Ph.D.

Блажиевский А.Н. Суммирование полипараметрических функциональных рядов методом конечных гибридных интегральных преобразований. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.01 – математический анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Черновицкий государственный университет, Черновцы, 1996.

Методом конечных гибридных интегральных преобразований, порожденных сочетанием дифференциальных операторов Фурье и Бесселя, получены суммы полипараметрической группы функциональных рядов. На защиту выносится 10 научных работ.

Ключові слова:

крайова задача, точки спряження, умови спряження, поліпараметрична група функціональних рядів, скінченні гібридні інтегральні перетворення, функції впливу, функції Гріна, функції Коші, умова необмеженої розв'язності.

[illegible] of functional series by the method of hybrid integral transforms. [illegible] 01.01.01 – Mathematical Analysis, 01.01.02 – Differential Equations, Chernivtsi National University, Chernivtsi, [illegible].

The sums of [illegible] are obtained by the method of [illegible] hybrid integral transforms generated by a combination of differential Fourier and Bessel operators. [illegible] submitted for a Ph.D.

[illegible] А.И. Суммирование полипараметрических функциональных рядов методом [illegible] гибридных интегральных преобразований. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальностям 01.01.01 – математический анализ, 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Черновицкий [illegible] университет, Черновцы, [illegible].

Методом [illegible] гибридных интегральных преобразований [illegible] операторами Фурье и Бесселя [illegible] функциональных рядов. На защиту [illegible] 10 научных работ.

Ключові слова:

[illegible] функціональних рядів [illegible] гібридних інтегральних перетворень [illegible]

Підписано до друку 2. 04. 96 р.
Формат 60х84|16. Папір друкарський.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 1.0
Обл.-вид. арк. 1.0. Тираж 100 прим.
ХМД. Зам. 823.