

На правах рукописи

ЛЕСИНА МАРИЯ ЕФИМОВНА

ДВЕ ЗАДАЧИ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

01.02.01 – теоретическая механика.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк – 1996

116 39.391
Работа выполнена на кафедре высшей математики
Донецкого государственного технического университета.

Официальные оппоненты:

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00753881 (W)

профессор Дамин В.Г.:

- доктор физико-математических наук,
профессор Ильихин А.А.;
- доктор физико-математических наук,
профессор Лобас Л.Г.

Ведущая организация:

- Институт математики НАН Украины.

Защита диссертации состоится "18" сентября 1996 года в
14 часов на заседании Специализированного Совета Д.06.01.01 по
присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в
Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу:
340114, Донецк, ул.Р.Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
прикладной математики и механики НАН Украины.

Автореферат разослан "15" сентября 1996 г.

Ученый секретарь

Специализированного Совета
кандидат физ.- мат. наук

А. Меркац

Марковский А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Представление об абсолютно твердом теле широко используют при формировании математических моделей технических конструкций. В ряде случаев приходится учитывать и динамические эффекты, роль которых в транспортных, навигационных и т.п. устройствах становится определяющей. Предназначенная для задач техники прикладная механика предпочитает по возможности более простое описание явления. Обычно уже на этапе формирования математической модели (системы дифференциальных уравнений) она принимает упрощения, использующие специфику каждого конкретного объекта. Во многих случаях в технике интересуются установившимися процессами, условиями их сохранения, влиянием различного рода возмущений и возможностью управления ими. Для оценки влияния факторов, которыми пренебрегли в прикладной модели для ее упрощения, создают модель, сохраняющую этот фактор, используя общие положения и методы теоретической механики.

Но при таких обобщениях математической модели открывается возможность получать информацию и о тех движениях, которые не предполагалось изучать в первоначальной прикладной постановке задачи. Задача приобретает определенную самостоятельность, становится объектом исследования аналитической динамики (нередко без претензий на прикладную значимость получаемых результатов).

Ярким примером такой эволюции служат классические задачи динамики твердого тела. Зарождение этого раздела аналитической динамики можно отнести к 1749 году, когда Ж.Даламбер и Л.Эйлер почти одновременно обратились к задаче о прецессии и нутации оси Земли. Ж.Даламбер изучает конкретную задачу небесной механики и, создавая приближенную прикладную математическую модель, использует для упроще-

ния уравнений особенности этой задачи (осесимметричную форму рассматриваемого тела, малость эксцентриситета осевого сечения Земли, малость характерных размеров Земли по сравнению с расстоянием ее до притягивающих тел и т.п.) Л.Эйлер же эту задачу переводит в общую постановку проблемы движения твердого тела, создавая тем самым важнейший раздел аналитической динамики.

Таким образом, конкретная задача небесной механики приобрела большее значение, она стала отправным пунктом формирования общей теории движения твердых тел, направленной уже не только на разработку методов решения технических задач, но и задач, возникающих в самой аналитической динамике. Одна из них - задача о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, привлекла внимание многих исследователей, породив громадную литературу.

Неизменный интерес к уравнениям этой задачи в аналитической механике объясняется, видимо, тем, что наличие трех интегралов (интеграла энергии, компоненты момента количества движения, геометрического) и интегрирующего множителя (ненулевой константы) означает принципиальную возможность сведения задачи к квадратурам, как только будет найден дополнительный (четвертый) интеграл.

Распространенный метод его поиска можно назвать *полуобратным*, так как вместе с устанавливаемыми ограничениями значений параметров, характеризующих тот класс функций, которому, по предположению, должен принадлежать интеграл, одновременно появляются и условия, ограничивающие значения параметров самой системы уравнений, приспособляемой тем самым к искомому интегралу.

Понятно, что любое обобщение задачи, при котором в уравнениях появляются дополнительные параметры, расширяет и возможности полуобратного метода. Так, введенные Н.Е.Жуковским в динамические уравнения Л.Эйлера гиростатические моменты λ_1 привели к существенным

обобщениям классических результатов, полученных ранее в задаче о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку. Такой же результат получен и при введении в уравнения Г.Кирхгофа задачи о движении тела в жидкости параметров, характеризующих циркуляционные течения.

Еще большие возможности открывает введение в систему неконкретизированных функций. Ж.Л.Лагранж ввел в уравнения Л.Эйлера неконкретизированную силовую функцию $U(v_1, v_2, v_3; v'_1, v'_2, v'_3; v''_1, v''_2, v''_3)$, и Д.Н.Горячев решал, по существу, полуобратную задачу конкретизации функции U , так чтобы предложенные Ж.Л.Лагранжем уравнения допускали интеграл, алгебраический по отношению к компонентам угловой скорости. В большинстве найденных Д.Н.Горячевым случаев уравнения не допускают интеграла площадей, и значит, полученного им интеграла недостаточно для доведения решения до квадратур (впрочем, он такую цель и не ставил).

А с сохранением роли четвертого интеграла уравнения Л.Эйлера обобщены введением в них трех неконкретизированных функций (Д.Гриоли, М.П.Харламов) $\Pi(v_1, v_2, v_3)$, $f(v_1, v_2, v_3)$, $F(v_1, v_2, v_3)$ так, что уравнения

$$\dot{G}_1 = \left[G_2 + Fv_2 + \frac{\partial f}{\partial v_2} \right] \omega_3 - \left[G_3 + Fv_3 + \frac{\partial f}{\partial v_3} \right] \omega_2 + v_2 \frac{\partial \Pi}{\partial v_3} - v_3 \frac{\partial \Pi}{\partial v_2} \quad (123)$$

вместе с кинематическими, сохраняя имевшийся у системы интегрирующий множитель, допускают три тех же интеграла. С неконкретизированными функциями Π , f , F , и искомому четвертому интегралу этих уравнений возвращена прежняя роль в построении квадратур. Именно полуобратным методом конкретизированы функции Π , f , F , обеспечивающие существование у системы линейного или квадратичного по компонентам угловой скорости четвертого интеграла. Необходимо, однако, отметить, что эти функции введены без соотнесения к реальным объектам и

без обсуждения возможности реализации взаимодействий, представимых такими зависимостями. Конкретизация их основана лишь на математическом требовании существования интеграла.

И задача Н.Е.Жуковского о гиростате, и задача Г.Кирхгофа о движении тела в жидкости, являясь задачами о движении системы тел, по структуре уравнений подобны задаче о движении одного твердого тела, но такие случаи исключительно редки.

Если тело несет закрепленный на его оси маховик, классическая задача получает естественное обобщение. Н.Е.Жуковский показал, что к такой же системе уравнений сводится задача о движении тела с полостью, заполненной жидкостью. В.Вольтерра посредством такой модели пытался объяснить некоторые аномалии в движении Земли. Обобщая случай Эйлера, Н.Е.Жуковский записал интегралы, обеспечивающие возможность сведения задачи к квадратурам, а В.Вольтерра выразил зависимость переменных задачи от времени посредством сигма-функций.

Задача о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку, как обобщение классической задачи о движении тяжелого твердого тела, появилась в публикациях Л.Н.Сретенского (1963) и П.В.Харламова (1964), где сообщалось и о некоторых случаях интегрируемости, обобщавших классические решения. В дальнейшем на эту задачу были распространены почти все результаты классической задачи. Найдены и новые решения, присущие только гиростату (вырождающиеся при нулевых значениях гиростатического момента). Эти результаты получены для гиростатического момента, неизменного в корпусе гиростата (Е.И.Харламова, Г.В.Мозалевская).

В случае переменного гиростатического момента требуются дополнительные соотношения, устанавливающие его зависимость от времени (хотя бы и опосредовано через другие переменные задачи, например, при использовании гиростатического момента для управления движением

корпуса (В.В.Крементуло, А.М.Ковалев)).

Переменный гиросtatический момент формируется в многороторных гироскопических приборах. Кинетические моменты роторов значительно превышают таковые у остальных элементов прибора (кожухов, платформы и т.п.). В инженерной (Г.Аншютц-Кемпфе, И.Геккелер), а затем в уточненной прецессионной (В.Н.Косляков, А.Ю.Ишлинский, Д.Р.Меркин) теории гироскопа многими конструктивными несовершенствами гироскопа пренебрегают, но учет их влияния (проявляющийся, например, в эффектах, подобных уходу Магнуса) потребовал создания обобщенной математической модели. Полная система уравнений, учитывающая эти несовершенства, получена в диссертации, и существующая прикладная теория играет по отношению к ней роль системы первого приближения, на базе предложенной модели создан новый объект аналитической динамики.

Но появившийся на этом пути объект, полученный в аналитической динамике идеализацией конструкции двухроторной гиросферы (чувствительного элемента пространственного гироскопа) оказывается для упоминавшейся здесь задачи о гиростате дальнейшим ее обобщением на случай переменного гиросtatического момента, причем именно таким обобщением, при котором усложнение задачи не выводит ее за пределы доступности исследования, получения в ней результатов, подобных тем, какие были получены в предшествующей задаче.

Введение этой задачи в аналитическую динамику может быть обосновано как аргументами прикладной механики, так и аргументами механики теоретической.

В первую очередь необходимо отметить то чрезвычайно важное место, какое к настоящему времени в современной технике заняли навигационные приборы, использующие в качестве основного элемента гиросферу с гиросузлом. Пространственный гироскоп — одно из наиболее

значительных достижений техники, решающее задачу автономной навигации реакцией прибора на весьма малую величину угловой скорости вращения Земли $2\pi/24 \cdot 60 \cdot 60 \approx 0,00007$ рад/сек.

Теория прибора формировалась естественным в технике путем: от инженерной постановки с последующими по мере необходимости уточнениями ее, и в настоящее время достаточной для прикладной гироскопии является прецессионная теория, пренебрегающая по сравнению с динамической характеристикой роторов инерционными характеристиками остальных элементов конструкции. Не принимаются во внимание и большинство неизбежных конструктивных несовершенств. Такой подход проверяется соответствием получаемых в прецессионной теории расчетных величин с измеряемыми в наблюдениях.

С другой стороны, в аналитической динамике созданы эффективные методы рационального формирования математических моделей движения связанных твердых тел (каковыми и являются гиросистемы), построения решений систем уравнений, служащих этими моделями, визуализацией получаемых результатов средствами компьютерной графики, доставляющей в наглядной форме полную информацию обо всех особенностях движения тела. И в этом качестве математическая модель пространственного гироскопа представляет несомненный интерес для самой аналитической динамики, являясь естественным имеющим реальный физический смысл обобщением классических задач о движении тяжелого твердого тела и о движении гиростата.

Она в известном смысле обобщила классические задачи на случай переменного гиростатического момента, это обусловлено такой постановкой задачи о гиросфере, в которой ее геометрический центр (точка подвеса) остается неподвижным. Но отказ от этого ограничения значительно усложняет задачу, однако, она может быть упрощена другим путем, основываемся на том факте, что в реальном приборе динамичес-

кие характеристики быстро вращающихся роторов преобладают над динамическими характеристиками кожухов и корпуса. Поскольку оси кожухов гиросузла полагают принадлежащими одной плоскости, мыслят их в пересечении сочлененными идеальным сферическим шарниром, отнеся к нему и действие пружины.

Так появляется задача о движении двух тел с осесимметричным распределением масс, сочлененных идеальным сферическим шарниром. В обобщении этой задачи тела могут получить различающиеся инерционные характеристики, а положение их центров масс может быть освобождено от имеющегося у роторов гиросферы условия сохранения расстояния между ними.

Такая задача о движении по инерции двух динамически осесимметричных тел, сочлененных упругим сферическим шарниром, и рассмотрена во второй части диссертации.

Частный случай этой задачи изучался Н.П.Степаненко. Основными переменными она выбирала углы Эйлера-Крылова, что в развернутой записи привело к трудно обозримой системе уравнений, но их автору все же удалось на основе этих уравнений вычислить приближенными методами (включая осреднение) уход простейшего стационарного движения для случая двух одинаковых тел.

Цель работы. Постановка и исследование двух задач аналитической динамики системы твердых тел, возникающих при математическом моделировании конкретных объектов современной техники.

Методы исследования. Наличие в этих объектах различных конструкций упругого звена приводит к определенному произволу в назначении его основной характеристики, что обеспечило возможность широкого применения полуобратного метода, использующего этот произвол. Метод инвариантных соотношений обеспечил построение набора точных решений. Алгебраическая структура уравнений определила и направле-

ние поисков инвариантных соотношений в классе многочленов на основе конструктивного метода построения точных решений с такими инвариантными соотношениями.

Возможность последующего использования методов компьютерной графики для построения полных решений обеспечена полученными в каждом решении уравнениями подвижных и неподвижных годографов или аксоидов.

Научная новизна. Полученные в работе математические модели объектов учитывают их возможные конструктивные несовершенства, в том числе и те, которыми в инженерных постановках пренебрегают. В прецизионных навигационных приборах влияние таких несовершенств может быть оценено при использовании предлагаемых математических моделей методами теории возмущений. Пренебрегаемые прецессионной теорией факторы сохранены в более общей (усложненной) математической модели, например, с целью учета возможности их долговременного влияния на показания прибора.

Апробация работы. Основные результаты регулярно докладывались на семинарах отделов прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики Национальной Академии наук Украины (руководители: чл.-корр. НАНУ П.В.Харламов, чл.-корр. НАНУ А.Я.Савченко), на Третьем республиканском совещании по проблемам динамики твердого тела (Донецк, 1981), на Всесоюзной конференции "Проблемы нелинейных колебаний механических систем" (Київ, 1978).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 20 статьях и монографии "О математической модели гиросферы".

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения и двух частей (ч. I - главы 1-4, ч. II - главы 5-14). Список цитированной литературы содержит 130 названий. Общий объем работы 266 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Содержание диссертации. Введение в аналитическую динамику задачи о гиросфере, нахождение случаев интегрируемости и построение полных решений составляет содержание первой части работы, состоящей из четырех глав.

В *п е р в о й* главе обсуждена уже сформированная в прикладной гироскопии (В.Н.Косляков, А.Ю.Ишлинский) система уравнений движения гиросферы

$$\begin{aligned}A\dot{p} &= [(B - C)q + \lambda \cos \varepsilon]r, & C\dot{r} &= [(A - B)q - \lambda \cos \varepsilon]p, \\(Bq + \lambda \cos \varepsilon) \dot{} &= (C - A)rp, \\2J\ddot{\varepsilon} + \lambda q \sin \varepsilon + c \sin \varepsilon \cos \varepsilon &= 0.\end{aligned}$$

Понижен порядок системы, она сведена к одному уравнению второго порядка.

Построены два точных решения, в которых компонента q угловой скорости корпуса гиросферы сохраняет свое начальное значение q_0 . В этих решениях зависимость переменных задачи от времени представлена посредством эллиптических функций Якоби.

Во *в т о р о й* главе эта задача существенно обобщена. Существующее разнообразие конструкций упругого элемента гиросферы, которые обычно рассматриваются лишь при малых деформациях, в аналитической механике естественно моделировать и для немалых деформаций, вводя в математическую модель зависимость потенциальной энергии Π от деформации $u = \cos \varepsilon$ в общем виде, что приводит к появлению в последнем уравнении неконкретизированной функции $\Pi = \Pi(u)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [J\dot{x}^2(u) + \Pi(u)] &= \lambda q(u), \\ \dot{u} &= -x(u)\sqrt{1 - u^2}.\end{aligned}$$

Структура полученной системы уравнений указала класс функций, в котором следует искать инвариантное соотношение, обеспечивающее существование точного решения. Это полиномиальная зависимость компоненты q угловой скорости корпуса гиросферы от деформации u упругого элемента. При этом конкретизируется и зависимость $\Pi(u)$. Она оказывается рациональной функцией. Естественное для потенциальной энергии требование ограниченности и гладкости связывает определенными условиями и параметры конструкции гиросферы. Таким путем, в дополнение к общему решению, в котором при любой принимаемой зависимости $\Pi[q(u)]$ построен ряд точных решений, где характеристика упругого элемента дана многочленом от u . В каждом из найденных решений получены и уравнения подвижного и неподвижного годографов угловой скорости корпуса гиросферы, что дает возможность строить полные решения средствами компьютерной графики.

Найдено одиннадцать таких решений (в их число не включены относительно просто обнаруживаемые безнутационные движения, равномерные вращения и маятниковые движения). Приведем в качестве примера одно из них:

$$p^2(u) = 9 \frac{(B-C)B}{(A-C)A} n^2 (1 - u^2)(u + \mu)^2,$$

$$q(u) = \frac{3}{2} n \left[2u^2 + \frac{3B+C}{C} \mu u - 1 \right],$$

$$r^2(u) = r_0^2 + \frac{9Bn^2}{(A-C)C} \left\{ -2\mu(B-A)(u - u_0) + \left[(4\mu^2 - 1)(B-A) + 3\mu^2 \frac{C-B}{C} A \right] (u^2 - u_0^2) + 2\mu \left[2B - \frac{B+C}{C} A \right] (u^3 - u_0^3) + (B-A)(u^4 - u_0^4) \right\},$$

$$t(u) = -2 \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}} \int_{u_0}^u \frac{du}{r(u)\sqrt{1-u^2}}.$$

Оно найдено при достаточно общей нелинейной характеристике упругого элемента

$$П(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4$$

при ограничениях, накладываемых на параметры конструкции

$$9\mathcal{J}n^2(A-B)(B-C) - 4ACc_4 = 0,$$

$$9\mathcal{J}n^2\mu(B-C) \left[\frac{B+C}{C} A - 2B \right] + 2AC(\lambda n - c_3) = 0,$$

$$9\mathcal{J}n^2 \left[3\mu \frac{B-C}{C} A + (4\mu^2 - 1)(A-B) \right] + 3\mu\lambda n(3B+C)A - 4ACc_2 = 0,$$

$$9\mathcal{J}n^2(B-C)(B-A) - 3\lambda nA - 2ACc_1 = 0,$$

$$9B(B-C)\mu\lambda + 2\lambda C = 0.$$

Общность этого решения определяют оставшиеся независимыми параметры $A, B, C, \mathcal{J}, n, u_0, r_0$.

Некоторые из найденных решений характеризуются и достаточно высокой степенью инвариантного соотношения. Так, например, найдено решение в котором компоненты угловой скорости корпуса гиросферы связаны полиномиальным инвариантным соотношением восьмой степени

$$A^6 p^6 q^2 - 16n^2 [a^2 A^2 p^2 - (4-a^2) C^2 r^2] [(a^2 - 3\lambda_* - 3) A^2 p^2 - (4-a^2) C^2 r^2]^2 = 0.$$

Для построения полного решения в этом случае получены уравнения годографов подвижного

$$p^2(u) = 16n^2 \frac{C^2}{A^2} (4 - a^2) (1 - u^2)^2,$$

$$q(u) = 4n\mu(-3\lambda_* - 3 + u^2),$$

$$r^2(u) = 16n^2 (1 - u^2)^2 (a^2 - u^2),$$

и неподвижного

$$\omega_\zeta(u) = n(8 + 9\lambda_* + 3\lambda_* u^4),$$

$$\omega_\rho^2(u) = 9n^2 \lambda_*^2 (1 - u^2)^2 \left[\frac{4 + 8a^2}{4 - a^2} - (1 + u^2)^2 \right],$$

$$\dot{\alpha} = 8n + 16n \frac{C-A}{A} \frac{(4 - a^2)(a^2 - u^2)(1 + u^2)}{4 + 8a^2 - (4 - a^2)(1 + u^2)^2}.$$

Явная зависимость всех переменных от времени представлена эле-

ментарными функциями в трех вариантах (в зависимости от значений параметра a) при обращении квадратуры

$$t(u) = - \frac{3A}{4(C-A)\pi\sqrt{4-a^2}} \int_{u_0}^u \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{a^2-u^2}}.$$

Потенциальная энергия зависит лишь от квадрата деформации упругого элемента.

В третьей главе уравнения движения гиросферы выведены с учетом динамических дебалансов (вообще говоря, неизбежных в реальной конструкции). И хотя система уравнений при этом существенно усложнилась, удалось найти некоторые ее точные решения.

И, наконец, в четвертой главе дана общая постановка задачи о гиросистеме, находящейся на объекте, движущемся по поверхности (или над поверхностью) Земли. Частным случаем такой системы служит двухроторный гиросузел. Уравнения, полученные в такой общей постановке задачи, учитывают и динамические, и статические дебалансы, а также влияние ускоренных движений объекта, несущего гиросприбор. Влияние этих факторов чрезвычайно усложняет задачу, и представляется малоперспективным ставить по отношению к такой системе вопросы, на какие аналитическая механика отвечает в классических задачах динамики твердого тела. Но гиросистемы прецизионны, и допустимо полагать упомянутые несовершенства малыми (по отношению к соответствующим характерным величинам рассматриваемой конструкции), и, снабдив их малым параметром μ , отнести к возмущениям порождающей системы, каковой в этом случае оказывается система, изученная в первых главах. Это открывает возможность, основываясь на существующих методах теории возмущений, оценивать влияние на показания прибора различных конструктивных несовершенств как порознь, так и совместно в сопоставлении их.

Основной объект исследования здесь - математическая модель гиросферы

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 - 2H\omega_3 \cos \varepsilon = M_1 + \mu(M_1^C + M_1^J),$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 - 2H\omega_1 \sin \varepsilon = -m l a_3 + M_2 + \mu(M_2^C + M_2^J),$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 - 2H\omega_2 \cos \varepsilon = m l a_2 + M_3 + \mu(M_3^C + M_3^J),$$

$$B_{11} \ddot{\varepsilon} + H\omega_2 \sin \varepsilon = \frac{1}{2} \left[Q^{\Pi} - Q^I - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varepsilon} \right] + \mu(Q^C + Q^J).$$

Здесь M_i^C, Q^C - возмущения, обусловленные статическими дебалансами

сами

$$M_1^C = m c_3 a_2 - (m c_2 + 2m_0 c \cos \varepsilon) a_3 + 2m_0 c \dot{\varepsilon} [v_3 \sin \varepsilon - (v_2 + 2\omega_2) \cos \varepsilon] - 4m_0 c \omega_1 \dot{\varepsilon} \sin \varepsilon,$$

$$M_2^C = -m c_3 a_1 + 2m_0 c \dot{\varepsilon} (v_1 - 2\omega_2) \cos \varepsilon - 4m_0 c \omega_2 \dot{\varepsilon} \sin \varepsilon,$$

$$M_3^C = (m c_2 + 2m_0 c \cos \varepsilon) a_1 - m c v_1 \sin \varepsilon,$$

$$Q^C = m_0 c [a_2 \sin \varepsilon + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \varepsilon \cos \varepsilon],$$

а M_i^J, Q^J - величины, характеризующие динамические дебалансы

$$M_1^J = - (A_{12}^0 + 2B_{12} \cos \varepsilon) (\dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1) - (A_{31}^0 + 2B_{31} \cos \varepsilon) (\dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2) + 2(B_{22} - B_{33}) \omega_2 \omega_3 \cos 2\varepsilon + (A_{23}^0 + 2B_{23} \cos 2\varepsilon) (\omega_2^2 - \omega_3^2),$$

$$M_2^J = - (A_{23}^0 + 2B_{23} \cos 2\varepsilon) (\dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2) - (A_{12}^0 + 2B_{12} \cos \varepsilon) (\dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3) - (B_{22} - B_{33}) (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1) \cos 2\varepsilon - (A_{31}^0 + 2B_{31} \cos \varepsilon) (\omega_3^2 - \omega_1^2) + 2\varepsilon \{ 2B_{12} \omega_1 \sin \varepsilon + [(B_{22} - B_{33}) \omega_2 + 2B_{23} \omega_3] \sin 2\varepsilon \},$$

$$M_3^J = - (A_{31}^0 + 2B_{31} \cos \varepsilon) (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) - (A_{23}^0 + 2B_{23} \cos 2\varepsilon) (\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1) + (B_{22} - B_{33}) (\dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2) + 2\varepsilon \{ 2B_{31} \omega_1 - 2[(B_{22} - B_{33}) \omega_3 - 2B_{23} \omega_2] \cos \varepsilon \},$$

$$Q^J = [B_{31} (\dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1) - B_{12} (\dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2)] \sin \varepsilon - \left[\frac{1}{2} (B_{22} - B_{33}) (\omega_2^2 - \omega_3^2) + 2B_{23} \omega_2 \omega_3 \right] \sin 2\varepsilon.$$

Влияние движения объекта, несущего гиросприбор, определяют сла-
гаемые с компонентами v_1, a_1 скорости и ускорения точки подвеса ги-
росферы

$$\begin{aligned} a_1 &= \dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 + g v_1 \beta^n, \\ \dot{v}_{1\beta} &= \omega_3 v_{2\beta} - \omega_2 v_{3\beta}. \end{aligned} \quad (123)$$

В задачах навигации их полагают заданными в зависимости от
движения объекта. В общем случае записанные уравнения могут быть
дополнены замыкающими систему уравнениями

$$\begin{aligned} m[a_1 + (\omega_2^2 + \omega_3^2) l] &= F_1 + \mu F_1^C, \\ m[a_2 - (\omega_3 + \omega_1 \omega_2) l] &= F_2 + \mu F_2^C, \\ m[a_3 + (\omega_2 - \omega_3 \omega_1) l] &= F_3 + \mu F_3^C, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1^C &= m[c_2(\dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2) - c_3(\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1)] + 2m_0 c [(\omega_3 \cos \varepsilon) - (\omega_1 + \varepsilon) \omega_2 \cos \varepsilon], \\ F_2^C &= m[c_2(\omega_3^2 + \omega_1^2) + c_3(\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3)] + 2m_0 c [\omega_3^2 + (\omega_1 + \varepsilon) \omega_1] \cos \varepsilon, \\ F_3^C &= m[c_3(\omega_3^2 + \omega_1^2) - c_2(\dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3)] - 2m_0 c (\dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3) \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

В конкретной задаче - математическом моделировании гиросферы,
как чувствительного элемента гироскопа, тело S^0 ограничено сфери-
ческой поверхностью, а в его полости размещен двухторный гирос-
узел, точка O^0 которого совмещена с геометрическим центром сферы.
Она же является точкой подвеса на движущемся объекте. Ее скорость v
определена движением объекта, что обеспечивают сторонние силы F_α .
Так как последние обычно не представляют интереса, то последние
уравнения в этой задаче могут быть опущены. Оставшиеся уравнения
расширяют математическую модель гиросферы возможностью оценки воз-
мущений при $\mu \neq 0$.

В прикладной гироскопии для исследования имеющей высокий поря-
док нелинейной системы используют приближенные методы, обеспечиваю-

щие достаточную точность анализа окрестности частных решений, описывающих требуемый режим работы, что устанавливается и экспериментом, и практикой использования гиросприбора.

Вместе с тем эта система при определенных идеализациях приводит к новой задаче аналитической динамики, примыкающей к известным классическим задачам.

Во второй части работы изучается движение по инерции двух (в общем случае различных) динамически осесимметричных тел, оси которых сочленены идеальным сферическим шарниром и упругим элементом, формирующим момент, зависящий от угла θ между этими осями.

Длительная история развития динамики твердого тела убедительно демонстрирует как успех исследования зависит от предварительного рационального выбора основных переменных задачи, определяющих в конечном счете и форму уравнений движения системы тел. И открывающая вторую часть *п я т а я* глава предлагает несколько форм уравнений рассматриваемой задачи. Каждая из них своей структурой подсказывает класс функций, в котором целесообразен поиск инвариантного соотношения (осуществляемый в последующих главах), обеспечивающий и построение соответствующего *аналитического* решения. В ряде случаев получены и уравнения аксоидов, необходимые для построения *полного* решения задачи средствами компьютерной графики.

П е р в а я форма уравнений использует имеющийся в этой задаче неизменный в пространстве вектор \mathbf{g} момента количества движения системы тел относительно ее центра масс. В естественно вводимой системе координат компоненты этого вектора

$$G_1 = (A - N \cos \theta) \omega_1 + (A_0 - N \cos \theta) \Omega_1,$$

$$G_2 = (A - N \cos \theta) \omega_2 + (A_0 \cos \theta - N) \Omega_2 - n_0 \sin \theta,$$

$$G_3 = (A_0 \Omega_2 - N \omega_2) \sin \theta + n + n_0 \cos \theta$$

изменяются в соответствии с уравнениями

$$\dot{G}_1 + \omega_2 G_3 - \omega_3 G_2 = 0, \quad (123)$$

которые замыкаются кинематическими соотношениями

$$\dot{\theta} = \Omega_1 - \omega_1,$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta, \quad \Omega_3 = -\omega_2 \sin \theta + \omega_3 \cos \theta,$$

циклическими интегралами

$$\dot{\varphi} + \omega_3 = n/J, \quad \dot{\Phi} + \Omega_3 = n_0/J_0,$$

интегралами, выражающими сохранение механической энергии

$$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1 \omega_1 \cos \theta + \Omega_2 \omega_2) + 2\Pi(\theta) = 2h$$

и модуля момента количества движения системы тел

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2.$$

Эта система содержит параметры $A, A_0, N, J, J_0, n, n_0, g, h$ и неконкретизированную функцию $\Pi(\theta)$.

В т о р а я форма получена на основе общей теоремы механики об изменении момента количества движения, примененной к каждому из тел

$$A(\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) + m\omega_2 = \Pi'(\theta) + N[-(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \sin \theta + (\dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3) \cos \theta],$$

$$A(\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1) - m\omega_1 = N(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1),$$

$$A_0(\dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3) + n_0 \Omega_2 = -\Pi'(\theta) + N[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \theta + (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) \cos \theta],$$

$$A_0(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1) - n_0 \Omega_1 = N(\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1)$$

с теми же кинематическими соотношениями и интегралами. В предположении идеальности сферического шарнира взаимодействие тел в этих уравнениях характеризуется лишь моментом $\Pi'(\theta)$.

Использованием имеющихся интегралов понижен порядок этой системы, что привело к т р е т ь е й форме уравнений движения - двум нелинейным уравнениям, каждое из которых имеет первый порядок

$$\frac{d\omega_2}{d\theta} = \frac{1}{H(A + A_0 - 2N \cos \theta)} \left[(A - N \cos \theta) N n_0 - (A_0 - N \cos \theta) (A_0 n - H \omega_3) - (A_0 n + N n_0 - H \omega_3) \frac{F(\omega_2, \Omega_2; \theta)}{R(\omega_2, \Omega_2; \theta)} \right],$$

$$\frac{d\Omega_2}{d\theta} = \frac{1}{H(A + A_0 - 2N\cos\theta)} \left[(A - N\cos\theta)(An_0 - H\Omega_3) - (A_0 - N\cos\theta)Nn - \right. \\ \left. - (An_0 + Nn - H\Omega_3) \frac{F(\omega_2, \Omega_2; \theta)}{R(\omega_2, \Omega_2; \theta)} \right].$$

$$F^2(\omega_2, \Omega_2; \theta) = g^2 - G_2^2(\omega_2, \Omega_2; \theta) - G_3^2(\omega_2, \Omega_2; \theta),$$

$$(AA_0 - N^2\cos^2\theta)R^2(\omega_2, \Omega_2; \theta) = (A + A_0 - 2N\cos\theta)[2h - 2\Pi(\theta) - \\ - A\omega_2^2 - A_0\Omega_2^2 + 2N\Omega_2\omega_2] - F^2(\omega_2, \Omega_2; \theta),$$

$$\omega_3 = (\Omega_2 - \omega_2\cos\theta)/\sin\theta, \quad \Omega_3 = (\Omega_2\cos\theta - \omega_2)/\sin\theta,$$

$$H = AA_0 - N^2.$$

Заменой переменных

$$\omega_1 = (\xi + 1)\varkappa, \quad \Omega_1 = (\xi - 1)\varkappa, \quad \tau = \theta/2,$$

$$\omega_2 = (\lambda\sin\tau - \mu\cos\tau)/\sin 2\tau, \quad \Omega_2 = (\lambda\sin\tau + \mu\cos\tau)/\sin 2\tau$$

получена четвертая форма

$$\lambda' - \mu\xi\text{ctg}^2\tau = \Lambda(\xi, \tau), \quad \mu' + \lambda\xi\text{tg}^2\tau = M(\xi, \tau),$$

$$\Lambda(\xi, \tau) = \left\{ (A + N)n_0 - (A_0 + N)n - [(A + N)n_0 + (A_0 + N)n]\xi \right\} \frac{\cos\tau}{H},$$

$$M(\xi, \tau) = \left\{ (A - N)n_0 + (A_0 - N)n - [(A - N)n_0 - (A_0 - N)n]\xi \right\} \frac{\sin\tau}{H},$$

которая преобразована к пятой (гамильтоновой по С.П.Новикову) форме.

И, наконец, перенос оставшегося произвола в выборе неконкретизированной функции $\Pi(\tau)$ на специально введенную функцию $\phi(\tau)$ приводит к шестой форме - одному уравнению первого порядка.

Последующие главы 6-11 посвящены поискам случаев интегрируемости уравнений поставленной в пятой главе задачи, построению точных (математических и полных) ее решений. Найдено девять случаев интегрируемости.

В шестой главе с использованием первой формы уравнений построено первое решение с двумя линейными инвариантными соотношениями, вследствие которых ось вращения одного из тел сохраняет на-

правление в нем (а значит и в пространстве). Если в задаче, рассматривавшейся в первой части работы, для построения полного решения достаточно было найти годографы угловой скорости, то в задаче о движении двух тел, сочлененных сферическим шарниром и не имеющим в общем случае неподвижных точек, нужны уравнения аксоидов. Анализ этих линейчатых поверхностей показал, что у одного из этих тел аксоиды - цилиндрические поверхности, у другого - конические. Построение и исследованное в с е д ь м о й главе второе точное решение основывалось на инвариантном соотношении, вид которого естественно обнаруживается из третьей формы уравнений движения. Пришлось различать два варианта найденного решения. Аксоиды при построении полного решения были исследованы с привлечением их горловых линий. Во втором решении не понадобилось конкретизировать потенциальную энергию $\Pi(\theta)$, и это дало возможность распорядиться выбором ее для выделения из найденного обширного класса движений (кроме $\Pi(\theta)$ свободными остались и семь параметров) подкласса, характеризуемого тем, что траектория соединяющего тела шарнира оказывается плоской кривой. Найдены все величины (в том числе и компоненты матрицы вложения подвижного аксоида в неподвижное пространство), необходимые для визуализации движения тела средствами компьютерной графики.

Третья форма уравнений движения привела еще к одному инвариантному соотношению, условия существования которого исследованы в в о с ь м о й главе. Использованный нетрадиционный путь исследования основывается на специфике и формы уравнений, и инвариантного соотношения. Этот путь привел к двум (третьему и четвертому) случаям интегрируемости. И в этих случаях получены уравнения аксоидов и все необходимые для компьютерной визуализации величины.

В д е в я т о й главе найдены еще три случая интегрируемости (пятый, шестой, седьмой), которые определялись структурой четвертой

формы уравнений.

Решение большой общности (ограничено значение лишь одного параметра системы), получено в *д е с я т о й* главе. Допущение, что общий момент количества движения системы относительно ее центра масс равен нулю, дает сразу три инвариантных соотношения, и задача сводится к квадратурам без конкретизации потенциальной энергии $\Pi(\theta)$ и без ограничения значений остальных восьми параметров.

Однако, отсутствие вектора момента количества движения (неизменного в пространстве со своими компонентами в движущейся системе координат) ликвидировало тот опорный вектор, на котором основан существующий подход к построению неподвижных аксоидов для полных решений задачи.

Но в современной технике важны задачи, в которых движение тел необходимо отслеживать в первую очередь по отношению к базису, определяемому самой траекторией – естественному базису, который в каждой точке траектории определяют ее касательная, главная нормаль и бинормаль. Для построения такого базиса в рассматриваемой задаче имеется вектор, касающийся траектории и данный своими компонентами в сопутствующем движению системы базисе. В таком базисе шарнир неподвижен, аксоиды – конические поверхности, и для построения полных решений достаточно иметь их направляющие линии – соответствующие годографы угловых скоростей. Уравнения годографов в рассматриваемом *в о с ь м о ж* решении записаны. Исследован и частный случай, когда траектория шарнира оказывается плоской кривой, посредством которой несложно ввести и неподвижный базис.

Последняя из предложенных шестая форма уравнений движения использована для нахождения еще одного – *д е в я т о г о* случая интегрируемости. Сведение задачи к квадратурам в этом случае выполнено в *о д и н а д ц а т о й* главе. Потенциальная энергия конкретизиру-

ется, но девять параметров сохранены свободными.

Проводившееся в большинстве случаев интегрируемости построение полных решений подтверждает известное положение, что использование специфики конкретной задачи может привести к более простому пути вывода уравнений аксоидов по сравнению с предлагаемыми общей теорией. И в *двенадцатой* главе сопоставлен с этой теорией подход, использующий то, что в рассматриваемой задаче о движении двух тел, сочлененных сферическим шарниром, абсолютная скорость шарнира оказалась данной своими компонентами в базисе, связанном с этими телами. Преимущества такого представления аксоидов продемонстрированы применением к случаям интегрируемости, рассматривавшимся ранее в седьмой и восьмой главах.

Чтобы продемонстрировать структуру полученных решений, приведем в качестве примера два из них. Это вариант *второго* решения, полученного при условиях $A_0 = A$, $n_0 = -n$ и обозначениях

$$\tau = \frac{\theta}{2}, \quad b = \frac{J}{A-N}, \quad g_0 = \frac{g}{2(A-N)},$$

$$\Omega_1(\tau) = -\omega_1(\tau) = \sqrt{\frac{[n - \Pi(\theta)] \cos^2 \tau - (g_0 - b \tilde{n} \sin \tau)^2}{(A + N \cos 2\tau) \cos^2 \tau}},$$

$$\Omega_2(\tau) = \omega_2(\tau) = \frac{g_0 - b \tilde{n} \sin \tau}{\cos \tau}, \quad \Omega_3(\tau) = -\omega_3(\tau) = \frac{(g_0 - b \tilde{n} \sin \tau) \sin \tau}{\cos^2 \tau},$$

$$t(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\Omega_1(\tau)},$$

$$\varphi(\tau) = \varphi(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\omega_3(\tau) - n/J}{\omega_1(\tau)} d\tau, \quad \Phi(\tau) = \Phi(\tau_0) - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\Omega_3(\tau) - n_0/J_0}{\Omega_1(\tau)} d\tau,$$

Подвижный аксоид тела S - линейчатая поверхность

$$\xi_1^*(\tau, \mu) = \xi_1(\tau, \mu) \cos \varphi(\tau) + \xi_2(\tau, \mu) \sin \varphi(\tau),$$

$$\xi_2^*(\tau, \mu) = -\xi_1(\tau, \mu) \sin \varphi(\tau) + \xi_2(\tau, \mu) \cos \varphi(\tau),$$

$$\xi_3^*(\tau, \mu) = a + a_0 \frac{\omega_2^2(\tau) - \omega_1^2(\tau) \cos 2\tau}{\omega^2(\tau)} + \mu \frac{n}{J\omega(\tau)},$$

где

$$\omega^2(\tau) = \omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau) + n^2/J^2,$$

$$\xi_1(\tau, \mu) = \left[-a_0 \omega_2(\tau) \sin 2\tau - (a - a_0 \cos 2\tau) \frac{n}{J} \right] \frac{\omega_1(\tau)}{\omega^2(\tau)} + \mu \frac{\omega_1(\tau)}{\omega(\tau)},$$

$$\xi_2(\tau, \mu) = \left[a_0 \omega_1^2(\tau) \sin 2\tau - (a + a_0) \frac{n}{J} \omega_2(\tau) \right] \frac{1}{\omega^2(\tau)} + \mu \frac{\omega_2(\tau)}{\omega(\tau)}.$$

В уравнениях неподвижного аксоида

$$\zeta_1(\tau, \mu) = \zeta_p(\tau, \mu),$$

$$\zeta_2(\tau, \mu) = \zeta_p(\tau, \mu) \cos \alpha(\tau) - \zeta_a(\tau) \sin \alpha(\tau),$$

$$\zeta_3(\tau, \mu) = \zeta_p(\tau, \mu) \sin \alpha(\tau) + \zeta_a(\tau) \cos \alpha(\tau)$$

использованы компоненты

$$\zeta_p(\tau, \mu) = 2a_0 \sin \tau + \mu \frac{\omega_p(\tau)}{\omega(\tau)} - (a + a_0) \frac{n}{J} \frac{\omega_p(\tau)}{\omega^2(\tau)},$$

$$\zeta_p(\tau, \mu) = \mu \frac{\omega_p(\tau)}{\omega(\tau)} - (a + a_0) \frac{n}{J} \frac{\omega_p(\tau)}{\omega^2(\tau)}, \quad \zeta_a(\tau) = 2a_0 \frac{\omega_1(\tau) \omega_p(\tau)}{\omega^2(\tau)} \cos \tau,$$

где

$$\omega_p(\tau) = g_0 - (1 - b) \frac{n}{J} \sin \tau,$$

$$\omega_p^2(\tau) = \omega_1^2(\tau) + \left[\omega_2(\tau) \sin \tau - \frac{n}{J} \cos \tau \right]^2,$$

а зависимость угла α от τ определяет квадратура

$$\alpha(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\omega_p^2(\tau) \omega_1(\tau)} \left\{ -\omega(\tau) \omega'(\tau) \left[\omega_2(\tau) \sin \tau - \frac{n}{J} \cos \tau \right] - \right. \\ \left. - (1 - b) \frac{n}{J} \left[(\omega_1^2(\tau) + \omega_2^2(\tau)) \sin \tau - \frac{n}{J} \omega_2(\tau) \cos \tau \right] \right\} d\tau.$$

Уравнения аксоидов тела S^0 аналогичны. В этом решении остаются свободными параметры A, N, J, J_0, n, g, h и произвольная дифференцируемая функция $\Pi(\tau)$.

Во втором примере эта функция конкретизирована $\Pi(\theta) = c \cos 2\tau$. При заданном инвариантном соотношении $F = \frac{1}{2} (A - A_0) R$ найдено мате-

матическое решение

$$\Omega_1(\tau) = -\omega_1(\tau) = \dot{\tau} = g_0 \sqrt{\cos^2 \beta - (\sin \beta \cos 2\tau + \sin \beta_0)^2 / \sin^2 2\tau},$$

$$\omega_2(\tau) = g_0 (\sin \beta \cos 2\tau + \sin \beta_0) / \sin 2\tau,$$

$$\Omega_2(\tau) = g_0 (\sin \beta_0 \cos 2\tau + \sin \beta) / \sin 2\tau,$$

$$\omega_3(\tau) = -g_0 [2 \sin \beta_0 \cos 2\tau + (1 + \cos^2 2\tau) \sin \beta] / \sin^2 2\tau,$$

$$\Omega_3(\tau) = -g_0 [2 \sin \beta \cos 2\tau + (1 + \cos^2 2\tau) \sin \beta_0] / \sin^2 2\tau,$$

$$\cos 2\tau = \cos \beta \cos \beta_0 \cos 2g_0 t - \sin \beta \sin \beta_0,$$

$$\varphi(\tau) = -g_* t - \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta \cos \beta_0 \cos 2g_0 t + \sin \beta_0 \cos \beta}{\cos \beta_0 \sin 2g_0 t},$$

$$\Phi(\tau) = -G_* t - \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta_0 \cos \beta \cos 2g_0 t + \sin \beta \cos \beta_0}{\cos \beta \sin 2g_0 t},$$

где приняты обозначения $g_0 = \frac{g}{A - A_0}$, $g_* = \frac{A_0 n - N n_0}{H} - \frac{n}{J}$,

$$G_* = \frac{A n_0 - N n}{H} - \frac{n_0}{J_0}, \quad \sin \beta = \frac{(A - A_0)(A_0 n - N n_0)}{g H}, \quad \sin \beta_0 = \frac{(A - A_0)(A_0 n - N n_0)}{g H}.$$

Для построения полного решения получены уравнения аксоидов.

Подвижный аксоид тела S:

$$\xi_1^*(t, \mu) = \left[\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} + \frac{\varepsilon (a_0 \cos \beta_0 \cos 2g_0 t - a \cos \beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2 \beta} \right] \cos g_* t + \\ + a_0 \frac{1 + \varepsilon \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta} \cos \beta_0 \sin 2g_0 t \sin g_* t,$$

$$\xi_2^*(t, \mu) = \left[\mu \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} + \frac{\varepsilon (a_0 \cos \beta_0 \cos 2g_0 t - a \cos \beta) \sin \beta}{\cos^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2 \beta} \right] \sin g_* t - \\ - a_0 \frac{1 + \varepsilon \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta} \cos \beta_0 \sin 2g_0 t \cos g_* t,$$

$$\xi_3^*(t, \mu) = \mu \frac{\varepsilon \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \beta}} + \frac{(a \cos \beta - a_0 \cos \beta_0 \cos 2g_0 t) \cos \beta}{\cos^2 \beta + \varepsilon^2 \sin^2 \beta}.$$

Неподвижный аксоид тела S:

$$\zeta_1(t, \mu) = \mu \frac{1 + \varepsilon t g^2 \beta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta}} + a_0 \sin \beta_0 - a \sin \beta + \frac{a(1 - \varepsilon) \sin \beta}{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta} -$$

$$- a_0 \frac{(1 - \varepsilon) t g \beta \cos \beta_0 \cos 2g_0 t}{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta},$$

$$\zeta_2(t, \mu) = \left[\mu \frac{(1 - \varepsilon) t g \beta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta}} + a_0 \left(1 + \frac{1 + \varepsilon t g^2 \beta}{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta} \right) \cos \beta_0 + \right.$$

$$\left. + a \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon) t g^2 \beta}{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta} \cos \beta \right] \cos g_0 t,$$

$$\zeta_3(t, \mu) = \left[\mu \frac{(1 - \varepsilon) t g \beta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta}} + a_0 \left(1 + \frac{1 + \varepsilon t g^2 \beta}{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta} \right) \cos \beta_0 + \right.$$

$$\left. + a \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon) t g^2 \beta}{1 + \varepsilon^2 t g^2 \beta} \cos \beta \right] \sin g_0 t,$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{Hn}{(A_0 n - n n_0) J}.$$

Для тела S^0 аксоиды записываются аналогично.

Известен результат Н.Е. Жуковского, установившего, что движение оси симметрии гироскопа Лагранжа и оси, ортогональной круговому сечению гирационного эллипсоида гироскопа Гесса, одинаковы, и различаются движения этих тел изменениями углов собственного вращения, а эти изменения отнесены соответственно к циклическому интегралу Лагранжа и инвариантному соотношению Гесса.

Это дало возможность в тринадцатой главе обобщить рассматривавшуюся в пятой - двенадцатой главах задачу, полагая теперь, что сферическим шарниром сочленены гиростаты Сретенского, обобщившего случай интегрируемости Гесса. В этих случаях интегрируемости угол собственного вращения связан со временем уравнением Рикати, не сводящемся в общем случае к квадратурам, и это служит препятствием к построению полного решения, так как подвижный аксоид

требует информации о такой зависимости. Однако, здесь найдены случаи, когда уравнения могут быть проинтегрированы, и задача получает полное решение.

Рассмотренный в четырнадцатой главе объект в определенном смысле примыкает к конструкциям, изучавшимся в первой части и предыдущих главах части второй. Это два тела, являющиеся по динамическим характеристикам телами вращения без предположения о равенстве этих характеристик (как во второй задаче), но располагающиеся на платформе (динамическом аналоге корпуса гиросферы из первой части). Получены уравнения движения такой системы трех тел и два случая их интегрируемости.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНЕСЕННЫЕ НА ЗАЩИТУ.

1. Классическая задача динамики твердого тела о движении имеющего неподвижную точку гиростата с неизменным в его корпусе гиростатическим моментом обобщена на гиростат с переменным гиростатическим моментом. Этот объект вводится в аналитическую динамику как идеализированная математическая модель гиросферы — чувствительного элемента двухроторного гироскопа.

2. По отношению к этому объекту поставлены традиционные для аналитической динамики задачи поиска случаев интегрируемости и построения полных решений средствами компьютерной графики.

3. Наличие упругого звена с неконкретизированной характеристикой обеспечило эффективность полуобратного метода построения точных решений с полиномиальными инвариантными соотношениями. Найдено и сведено к квадратурам одиннадцать случаев интегрируемости. Получены уравнения годографов, необходимые для построения полных решений.

4. Получены уравнения движения гиросферы, учитывающие ее динамические дебалансы. Они проинтегрированы в случае отсутствия у этой

системы тел общего момента количества движения.

5. Дана общая постановка задачи о гиросистеме, находящейся на объекте, движущемся на (над) поверхности Земли.

6. Задача о гиросфере соотнесена с задачей о движении по инерции двух тел с динамически осесимметричным распределением масс, сочлененных сферическим упругим шарниром, принадлежащим осям этих тел. Предложено шесть форм уравнений поставленной задачи.

7. Поиск случаев интегрируемости направляется структурой предполагаемого инвариантного соотношения, отвечающей соответствующей ей форме уравнений. Найдено девять точных решений. Записаны уравнения аксоидов, обеспечивающие возможность построения полных решений.

8. Результаты последней задачи распространены на случай тел, имеющих по распределению масс структуру гироскатов Л.Н.Сретенского.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. *Лесина М.Е.* О колебаниях оси маховика в теле-носителе. // *Механика твердого тела.* - 1977. - Вып.11. - С.32-37.
2. *Лесина М.Е.* О свободном движении двух тел, соединенных сферическим шарниром. / В кн.: Третье республиканское совещание по проблемам динамики твердого тела (тезисы докладов). - Донецк, 1981. - С.36-37.
3. *Лесина М.Е.* Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром. // *Механика твердого тела.* - 1984. - Вып.16. - С.32-36.
M.E.Lesina. Existence conditions for exact solutions of the problem of motion of two Lagrange gyroscopes connected by a spherical joint. // *Mechanics of rigid bodies.* Vol.16. 1986 by Allerton Press, Inc. P.39-43.

4. Лесина М.Е. Уравнения аксоидов в одном из решений задачи движения двух тел, соединенных сферическим шарниром. // Механика твердого тела.- 1984.- Вып.16.- С.36-42.

M.E.Lesina. Equations of axoids in one the solutions of the problem of motion of two bodies connected by a spherical joint. // Mechanics of rigid bodies. 1986. Vol.16. P.44-50.

5. Лесина М.Е. Некоторые точные решения задачи о движении по инерции системы трех связанных твердых тел. // Механика твердого тела.- 1985.- Вып.17.- С.49-54.

M.E.Lesina. Some exact solutions of the problem of inertial motion of a system of three coupled rigid bodies. // Mechanics of rigid bodies. 1987. Vol.17. P.62-67.

6. Лесина М.Е. Об одной системе трех связанных тел. // Механика твердого тела.- 1986.- Вып.18.- С.53-58.

7. Лесина М.Е. Один класс инвариантных соотношений задачи о движении двух связанных тел. // Механика твердого тела.- 1986.- Вып.18.- С.47-53.

8. Лесина М.Е. К построению полного решения в одном случае интегрируемости задачи о движении двух связанных тел. // Механика твердого тела.- 1987.- Вып.19.- С.54-57.

M.E.Lesina. On the construction of the complete solution in a case of integrality of the problem of motion of two coupled bodies. // Mechanics of rigid bodies. 1989. Vol.19. P.53-56.

9. Лесина М.Е. К построению полного решения задачи об относительном движении системы двух тел. // Механика твердого тела.- 1987.- Вып.19.- С.58-68.

M.E.Lesina. On the construction of the complete solution of the problem of relative motion of two-body system. // Mechanics of rigid bodies. 1991. Vol.21. P.29-39.

10. Лесина М.Е. Три новых случая интегрируемости уравнений движения системы двух связанных твердых тел. // Механика твердого тела.- 1989.- Вып.21.- С.24-30.
11. Лесина М.Е. Аксоиды в одном случае интегрируемости задачи о движении двух тел, связанных сферическим шарниром. // Механика твердого тела.- 1991.- Вып.23.- С.43-50.
12. Лесина М.Е. Полное решение задачи об одном классе равноаксоидных движений по инерции двух тел, соединенных сферическим шарниром. // Механика твердого тела.- 1991.- Вып.23.- С.93-101.
13. Лесина М.Е. Некоторые точные решения задачи о движении двух гиростатов, соединенных сферическим шарниром. // Механика твердого тела.- 1992.- Вып.24.- С.45-51.
14. Лесина М.Е. Равноаксоидные движения гиростатов. // Механика твердого тела.- 1992.- Вып.24.- С.51-56.
15. Лесина М.Е. Гамильтонова форма уравнений задачи о движении двух связанных тел. // Механика твердого тела.- 1993.- Вып.25.- С.42-44.
16. Лесина М.Е. Сведение к квадратурам общего случая задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных упругим сферическим шарниром. // Механика твердого тела.- 199 .- Вып.26.- С.
17. Лесина М.Е. О математической модели гиросферы.- Донецк: ДонГТУ, 1996.- 102с.
18. Лесина М.Е., Харламов А.П. Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел. // Механика твердого тела.- 1993.- Вып.25.- С.30-42.
19. Лесина М.Е., Шевченко Т.П. Полное решение задачи о движении двух связанных тел в одном случае интегрируемости. // Механика твердого тела.- 1988.- Вып.20.- С.71-76.

M.E.Lesina and T.P.Shevchenko. Complete solution of the problem

of the motion of two connected bodies in a certain integrality case. // Mechanics of rigid bodies. 1990. Vol.20. P.70-74.

20. Лесина М.Е., Шевченко Т.П. Об одном случае движения двух тел, связанных сферическим шарниром, при нулевом моменте количества движения. // Механика твердого тела.- 1990.- Вып.22.- С.48-54.

Лесина М.Е. Две задачи аналитической динамики твердого тела.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 - теоретическая механика, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1996, рукопись.

Защищаются 20 работ, содержащие исследование двух задач аналитической динамики систем связанных взаимодействующих тел. Эти задачи смыкаются с современной теорией гироскопов. Получены математические и полные решения задачи о движении гиросферы (чувствительного элемента гирокомпаса) при различных уровнях идеализации конструкции. Набор точных решений получен и в задаче о пространственном движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа (при обобщении - гиростатов Сретенского), соединенных упругим сферическим шарниром. Впервые в конкретной задаче аналитической динамики получены аксоиды пространственного движения каждого из тел системы, доставляющие исчерпывающую информацию обо всех особенностях движения тел.

Lesina M.E. The two problems of the analytical dynamics of the rigid bodies.

The competition Dissertation for the academic degree of the Doctor of the physico-mathematical sciences in speciality 01.02.01 - of the theoretical mechanics, Institute of the applied mathematics and mechanics NAS, Ukrain, Donetsk, 1996, the manuscript.

The 20 scientific papers carrying on the researching of the two problems for the system of the analytical dynamics closed with the interaction bodies are defended by the author. The mathematical task and complete solving of the problem about the motion of the

gyrosphere (the sensitive) at the levels of the idealized construction are obtained. The set of the accurate solutions on the problem about spatial motion of the two gyroscopes Lagrange under their own momentum (in generalizing - Sretensky gyrost) coupled with the elastic spherical joint is found. For the first time axoids of the spatial motion of each body of the system sending exhaustive explanation about the all peculiarities of the body motion are received too.

Ключові слова: система зв'язаних взаємодіючих тіл - гірокомпас, гіровузол; гіростатичний момент, точні розв'язання, інваріантні співвідношення, годографи, аксоїди.

Лесюк