НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

На правах рукопису

МАЛЮТІН Костянтин Геннадійович

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЯМИ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ У ПІВПЛОЩИНІ

01.01.01 - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Донецьк - 1996

Роботу виконано у Сумському сільськогосподарському інституті

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
професор В. І. Білий

доктор фізико-математичних наук
професор А. А. Гольдберг

доктор фізико-математичних наук
професор І. В. Ковалішина

Провідна організація: Харківський державний університет

Захист відбудеться "16" жовтня 1996 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 06.01.01 для захисту дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук при Інституті прикладної математики і механіки НАН України за адресою: 340114, м. Донецьк, вул. Рози Люксембург, 74.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладної математики і механіки НАН України

Автореферат розіслано "30" серпня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
кандидат фізико-
математичних наук А. Маркоз. А. І. Марковський

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Предмет дослідження. Теорія інтерполяції функцій посідає важливе місце у сучасній математиці. Її народження пов'язане з іменами Ньютона та Лагранжа. Інтерес до цієї тематики обумовлений її широким застосуванням при роз'язуванні багатьох теоретичних та прикладних проблем. Так, методи теорії інтерполяції застосовуються при вивченні широкого кола питань, пов'язаних з задачами повноти систем аналітичних функцій в області комплексної площини, теоремами єдності для аналітичних функцій, з проблемою моментів, при вивченні спеціальних алгебр аналітичних функцій. Теорії інтерполяції аналітичних функцій повністю або частково присвячені монографії В.Л.Гончарова (1954), М.А.Євграфова (1954), Б.Я. Левіна (1956), Дж.Л. Уолша (1960), А.О.Гельфонда (1967, третє видання), І.І. Ібрагімова (1971), П.Кусіса (1980), М.К. Нікольського (1980), Дж. Гарнетта (1981), А.Ф. Леонт'єва (1976, 1980, 1981, 1983), В.К. Дубового, Б.Фріше, Б.Кірштейна (1992). Ряд важливих задач теорії інтерполяції цілими функціями було розв'язано С.Н.Берштейном, А.О.Гельфондом, В.Л.Гончаровим, М.В.Келдишем, Б.Я.Левіним, А.Ф.Леонт'євим, Л.Хермандером.

Поряд з задачами інтерполяції цілими функціями розглядаються задачі інтерполяції функціями голоморфними у крузі та півплощині. Перші важливі результати у цьому напрямку одержали Шур, Неванлінна, Пік. Вони знайшли подальший розвиток у роботах М.Г.Крейна, А.А.Нудельмана, В.П.Потапова, І.В.Ковалішиної, В.К.Дубового.

Великий вплив на дослідження по інтерполяції мала відома стаття Л.Карлесона 1962 року "Інтерполяція обмеженими функціями та проблема корони". Дослідження у цьому напрямку відображені у вже згадуваних книгах П.Кусіса і Дж.Гарнетта. Великий внесок у розробку питань вільної інтерполяції в класах H^p, H^∞ і класах гладких аж до самої межі функцій зробили петербурзькі математики. Про деякі з цих досліджень йде мова у огляді С.О.Виноградова та В.П.Хавіна (1974, 1976) і книзі Н.К.Нікольського (1980). Важливий внесок в розробку згаданих вище питань зробили вірменські математики М.М.Джрбашян, Г.М.Айрапетян, В.Н.Мартиросян, Ф.А.Шамоян.

І.Ерл та П.Джонс знайшли просте доведення теореми Л.Карлесона. Ідеї П.Джонса широко використовуються у нашому дослідженні.

У 1948 році А.Ф.Леонт'єв вперше розглянув задачу, яка пізніше одержала назву задачі вільної інтерполяції: визначити, які умови повинна задовольняти послідовність вузлів z_n, $|z_n|\uparrow\infty$ комплексної площини, для того, щоб для будь-якої послідовності c_n, що задовольняє нерівність $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\ln^+\ln^+|c_n|)/\ln|z_n|\leqslant\rho$, можна побудувати цілу функцію f порядку ρ (клас таких функцій позначається $[\rho,\infty]$) таку, що $f(z_n)=c_n$. Він довів, що такою умовою є

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{\ln|z_n|}\ln^+\ln\frac{1}{|E'(a_n)|}\leqslant\rho,$$

де $E(z)$ - канонічний добуток Вейєрштрасса, побудований за вузлами інтерполяції z_n. Раніше деякі достатні умови існування розв'язку такої задачі знайшли Мурел та Уінн, Макінтайр та Уілсон. Пізніше А.Ф.Леонт'єв задачу простої вільної інтерполяції розв'язав у класі $[\rho,\infty)$ цілих функцій порядку ρ і нормального типу.

У більш загальному класі $[\rho(r),\infty)$, де $\rho(r)$ - уточнений за Валіроном порядок, розв'язала у 1958 році О.С.Фірсакова. Далі вона за додатковою умовою правильного розподілу вузлів інтерполяції розв'язала задачу інтерполяції у класі $[\rho(r),h(\theta)]$ цілих функцій з індикатором, що не перевершує заданий індикатор $h(\theta)$. Критерії О.С.Фірсакової мали форму, аналогічну тій, яку запропонував А.Ф.Леонт'єв.

Виходячи з результатів А.Ф.Леонт'єва і О.С.Фірсакової, нами були запропоновані нові критерії існування розв'язку інтерполяційних задач у класі цілих функцій скінченного порядку (ці результати не увійшли до дисертації). Ці критерії мали більш геометричний характер і формулювались у термінах міри $\sum\delta(z-z_k)$, що породжується вузлами інтерполяції, і мають деяку схожість з критерієм Л.Карлесона.

Важливі питання теорії інтерполяції у класах функцій скінченного порядку розглянуті у роботах Ю.Ф.Коробейніка, О.В.Братіщева, О.М.Руссаковського, С.Беренстейна, Б.Тейлора.

Зрештою, в 1984 р. А.П.Гришин, використовуючи розвинуту ним теорію множин регулярного зростання цілих функцій, остаточно розв'язав задачу вільної інтерполяції у класі $[\rho(r), h(\theta)]$, звільнившись від додаткової умови про правильний розподіл вузлів інтерполяції, яка була у роботах попередніх авторів.

У задачі кратної інтерполяції задаються числа $c_{n,k}$ і відшукується функція f така, що

$$f^{(k-1)}(z_n) = c_{n,k}, \quad k=1,\dots,q_n, \quad n=1,2,\dots . \qquad (\dot{J})$$

Одним із перших задачу $(\dot{J})$ у класі $[\rho, \infty]$ розв'язав Мурел при деяких спеціальних умовах на вузли інтерполяції. Г.П.Лапін розповсюдив результати А.Ф.Леонт'єва у класі $[\rho, \infty)$ на задачу кратної інтерполяції. Теорія кратної інтерполяції у просторах цілих функцій, що визначаються уточненим порядком $\rho(r)$ і в сім'ях таких просторів, одержала подальший розвиток у роботах Ю.Ф.Коробейніка, О.В.Братіщева, А.Г.Гришина та О.М.Руссаковського.

Г.Д.Трошин продовжив дослідження А.Ф.Леонт'єва і О.С.Фірсакової, розглянувши інтерполяційну задачу у класі функцій голоморфних у куті $|\arg z| < \pi/(2\rho)$. Він розглядав випадок, коли вузли інтерполяції знаходяться у меншому куті $|\arg z| < \pi/(2\rho) - \varepsilon$. У 1975 році Б.Я.Левін та Нгуен Тхонг Уен розглянули задачу простої інтерполяції у класі $[\rho, \infty]^+$ (знак "+" поряд із знаком визначення класу означає, що розглядається відповідний клас голоморфних у верхній півплощині функцій). У цих авторів обмеження на вузли інтерполяції значно менші, ніж у Г.Д.Трошина, але деяке віддалення вузлів від межі півплощини передбачалося. Далі при аналогічних обмеженнях задача інтерполяції у класах $[\rho, \infty)^+$ була розглянута Н.Т.Уеном. Свої умови згадані вище автори формулювали у термінах канонічних добутків Неванлінни. Ми одержали повний, тобто без будь-яких обмежень на вузли інтерполяції розв'язок задачі вільної інтерполяції у класах $[\rho(r), \infty)^+$, $[\rho, \infty]^+$ у 1980 році. При цьому необхідні та достатні умови існування розв'язку інтерполяційної задачі формулюються як у термінах канонічного добутку, так і у термінах міри, що визначається вузлами інтерполяції. Одночасно була розв'язана задача у класі $[\rho(r), h(\theta)]^+$ з неперервним на відрізку $[0, \pi]$ індикатором $h(\theta)$ при додатковій умові правильного розподілу вузлів інтерполяції.

О.М.Руссаковський використав метод $\bar{\partial}$ -проблеми Хермандера та ідеї згаданої вище роботи для розв'язання інтерполяційної проблеми у класі $[\rho(r), h(\theta)]^+$ без будь яких обмежень на індикатор $h(\theta)$, тобто не виключається можливість розриву індикатора у точках 0 і π і необмеженості індикатора на $(0, \pi)$.

У першій главі дисертації дано розв'язок задачі вільної кратної інтерполяції у класах $[\rho, \infty]^+$; $[\rho(r), \infty)^+$. Окремо скажемо, що наші дослідження зберігають силу і у випадку $\rho(r) \equiv 0$. Ми одержуємо критерій розв'язку задачі вільної кратної інтерполяції у класі H^∞. Цей результат є новим, незважаючи на велику кількість робіт у цьому напрямку.

При дослідженні інтерполяційних задач знаходить широке застосування клас цілих функцій цілком регулярного зростання у сенсі Левіна-Пфлюгера. Теорія функцій цілком регулярного зростання викладена в монографії Б.Я.Левіна "Розподіл коренів цілих функцій". М.В.Говоров побудував теорію функцій цілком регулярного зростання, голоморфних у півплощині. Ця теорія викладена у його книзі "Крайова задача Рімана з нескінченним індексом". А.П.Гришин побудував теорію множин регулярного зростання цілих функцій, яка стала головним апаратом при дослідженні інтерполяційної проблеми у класах цілих функцій з індикатором, що не перевершує заданий індикатор. Головний сенс цієї теорії - це введення класу функцій, що регулярно зростають на множині своїх коренів. У другій главі дисертації ми будуємо теорію множин регулярного зростання для функцій, голоморфних у півплощині. Зокрема, ми доводимо деякі властивості функцій, що регулярно зростають на множині своїх коренів. Одночасно ми одержуємо деякі узагальнення тверджень М.В.Говорова.

Побудована у другій главі теорія, на наш погляд, має самостійне значення. Але для нас головним є те, що ця теорія дала змогу нам розв'язати інтерполяційну задачу у класах $[\rho(r), h(\theta)]$. Розв'язання цієї задачі міститься у третій главі дисертації.

<u>Мета роботи.</u> Дослідження задачі кратної вільної інтерполяції у класах функцій скінченного порядку у півплощині. Побудова теорії множин регулярного зростання для функцій, голоморфних у півплощині. Вивчення класу функцій, голоморфних у півплощині, що ре-

гулярно зростають на множині своїх коренів.

Методика дослідження. Застосовуються класичні методи теорії функцій комплексного змінного, використовуються ряди, які є узагальненням інтерполяційного ряду Лагранжа. Ми також застосовуємо загальну теорію субгармонічних функцій, інтегральні зображення субгармонічних функцій, тонку топологію Картана, теорію граничних множин В.С.Азаріна.

Наукова новизна. В дисертації досліджені інтерполяційні задачі у класах $[\rho, \infty]^{+}$, $[\rho(r), \infty)^{+}$, $[\rho(r), h(\theta)]^{+}$, $[\rho(r), h(\theta)]^{+}_{\rho}$. Ці дослідження можна вважати остаточними. В роботах попередніх авторів по класах $[\rho, \infty]^{+}$, $[\rho, \infty)^{+}$ швидкість наближення вузлів інтерполяції до границі контролювалась, мала місце деяка різниця між необхідними і достатніми умовами. Задача для класу $[\rho(r), h(\theta)]^{+}$ розглядалась тільки для правильно розподілених вузлів інтерполяції. Для всіх трьох класів випадок $0 < \rho \leq 1$ раніше взагалі не розглядався. Побудована теорія множин регулярного зростання для функцій, голоморфних у півплощині. Розглянуто клас функцій, голоморфних у півплощині, що регулярно зростають на множині своїх коренів. Ці поняття введені вперше.

Теоретична та практична цінність. Робота має теоретичний характер. У багатьох розділах теорії аналітичних функцій мають місце паралельні теорії для функцій, аналітичних у площині і у півплощині. Зокрема, це стосується, наприклад, неванліннівської теорії мероморфних функцій та теорії інтерполяції голоморфними функціями. Задачі для півплощини більш важливі і більш різноманітні. В дисертації теорія інтерполяційних задач у класах $[\rho, \infty]^{+}$, $[\rho(r), \infty)^{+}$, $[\rho(r), h(\theta)]^{+}$ розвивається в такому ж об'ємі, як це було зроблено для відповідних класів цілих функцій у роботах А.Ф.Леонт'єва, А.П.Гришина, А.М.Руссаковського. У монографіях А.Ф.Леонт'єва, в численних роботах інших авторів знаходиться зв'язок теорії інтерполяції цілими функціями і задачами повноти систем аналітичних функцій в різних областях комплексної площини, питаннями єдиності, тощо. Можна сподіватися, що теорія інтерполяції функцій, голоморфних у півплощині, також знайде широке застосування. Теорія М.В.Говорова функцій цілком регулярного зростання у півплощині вже знайшла різні застосування. Слід чекати, що клас функцій, голоморфних у півлощині, що регулярно зростають на множині своїх коренів, також буде використаний у наукових дослідженнях.

Наукова вірогідність результатів. Усі результати дисертації є математичними твердженнями, які доведено на прийнятому у сучасній математиці рівні строгості.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на 6-ій конференції "Деякі проблеми комплексного аналізу" (Черноголовка, 1983 р.), на семінарах у Донецьку (керівник В.І.Білий), Львові (керівник А.А.Гольдберг), Москві (керівник Ю.А.Казьмін), Санкт-Петербурзі (керівники В.П.Хавін і М.К.Нікольський), Харкові (керівник Б.Я.Левін), Харкові (керівник В.О.Марченко), Харкові (керівник Л.І.Ронкін).

Публікації. Основний зміст дисертації опубліковано в роботах [1-15].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу та трьох глав і викладена на 217 сторінках машинописного тексту, список літератури містить 105 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

Абсолютно неперервна функція $\rho(r)$ називається уточненим порядком в сенсі Валірона, якщо виконуються умови

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r)=\rho, \quad \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0 .$$

Ми будемо розглядати тільки випадок $\rho>0$. Функцію $r^{\rho(r)}$ ми позначаємо $V(r)$.

Уточнений порядок $\rho(r)$ називається формальним порядком функції $f(z)$, голоморфної у півплощині $\mathbb{C}^+=\{z: \operatorname{Im} z>0\}$, якщо існує стала M така, що

$$\ln|f(z)| \le M\,V(|z|), \quad z\in\mathbb{C}^+$$

Далі літерою M ми будемо позначати сталі, не обов'язково однакові в різних місцях.

Уточнений порядок $\rho(r)$ називається напівформальним порядком голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції $f(z)$, якщо він є формальним порядком і існують числа $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $q \in (0, 1)$, M такі, що у кожній області $\mathfrak{D}(R, q, \delta) = \{z: qR < |z| < \frac{R}{q}, \delta < \arg z < \pi - \delta\}$ існує точка z_0 така, що $\ln|f(z_0)| > MV(|z_0|)$. Нехай $\mathfrak{D} = \{a_n, q_n\}$ ($a_n = r_n e^{i\theta_n} \in \mathbb{C}^+, q_n \in \mathbb{N}$) - дивізор у півплощині $\mathbb{C}^+$. Визначимо міру

$$n^+_{\mathfrak{D}}(G) = \sum_{a_n \in G, r_n \le 1} q_n \operatorname{Im} a_n + \sum_{a_n \in G, r_n > 1} q_n \sin\theta_n$$

Позначимо через $C(z, r)$ відкритий круг з центром у точці z радіуса r. Дивізор $\mathfrak{D}$ визначає сім'ю функцій

$$\Phi^+(z, \alpha) = \frac{n^+_{\mathfrak{D}}(C(z, \alpha r) \setminus \{a_n\})}{V(r)},$$

де $z = re^{i\theta}$, a_n - точка із носія дивізора $|\mathfrak{D}| = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$, найближча до z, так що завжди $\Phi^+(z, \alpha) = 0$ для достатньо малих α. Нехай

$$J^+(z, \delta) = \sin\theta \int_0^{\delta} \frac{\Phi^+(z, \alpha)\, d\alpha}{\alpha(\alpha + \sin\theta)^2}.$$

Визначення 1. Дивізор $\mathfrak{D}$ називається інтерполяційним у класі $[\rho(r), \infty)^+$, якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $b_{n,k}$, $k = 1, \dots, q_n$, $n = 1, 2, \dots$, що задовольняє умову

$$\sup_n \frac{1}{V(r_n)} \max_{1 \le k \le q_n} \ln \frac{|b_{n,k}| \Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} < \infty, \qquad (1)$$

де $\Lambda_n = \min(1, \operatorname{Im} a_n)$, існує функція $f \in [\rho(r), \infty)^+$ із властивістю ($\mathcal{J}$).

Наведемо головний результат першої глави для більш простого випадку, коли ρ неціле число.

Теорема 1. Наступні три твердження еквівалентні.

1. Дивізор $\mathcal{D}$ є інтерполяційний дивізор у класі $[\rho(r), \infty)^+$.

2. Для канонічного добутку $E(z)$ дивізора $\mathcal{D}$ виконується нерівність

$$\sup_n \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E^{(q_n)}(a_n)| \Lambda_n^{q_n}} < \infty . \tag{2}$$

3. Виконуються умови:

3.1. Для будь-якого $\delta > 0$

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^+} \mathcal{J}^+(z, \delta) < \infty . \tag{3}$$

3.2

$$\sup_n \frac{q_n}{V(|a_n|)} \ln \frac{2 \operatorname{Im} a_n}{\Lambda_n} < \infty . \tag{4}$$

Нагадаємо, що канонічний добуток Неванлінни дивізора $\mathcal{D}$ визначається за формулою:

$$E(z) = \prod_{|a_n| \le 1} \left(\frac{z - a_n}{z - \bar{a}_n} \right)^{q_n} \prod_{|a_n| > 1} \left[\frac{\bar{a}_n}{a_n} \frac{z - a_n}{z - \bar{a}_n} \exp \sum_{j=1}^{[\rho]} \frac{z^j}{j} \left(\frac{1}{a_n^j} - \frac{1}{\bar{a}_n^j} \right) \right]^{q_n} .$$

Випадок цілого ρ , який також розглядається в дисертації, є складніший. В цьому випадку канонічний добуток треба замінити на функцію, яка називається приєднаною функцією дивізора $\mathcal{D}$ і яку ще треба будувати.

Голоморфна в $\mathbb{C}^+$ функція f називається функцією скінченного порядку, якщо існує уточнений порядок $\rho(r)$, який є формальним порядком цієї функції. Нехай E_f - множина чисел виду $\rho =$

$= \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r)$, де $\rho(r)$ - напівформальний порядок функції f. Порядком функції f в $\mathbb{C}^+$ називається число $\rho_f = \inf E_f$. Це визначення порядку ρ_f функції f належить А.П. Гришину. Зазначимо, що якщо $\rho_{1,f}$ - порядок у сенсі еквівалентних між собою визначень Е. Тітчмарша і М.В. Говорова, то $\rho_{1,f} \le \rho_f$. Якщо $\rho > 1$, то визначення співпадають і в цьому випадку будь-який формальний порядок $\rho(r)$ є одночасно напівформальним. Через $[\rho, \infty]^+$ ми будемо позначати клас голоморфних у півплощині функцій, порядок ρ_f яких не перевершує ρ.

Визначення 2. Дивізор $\mathcal{D}$ називається інтерполяційним у класі $[\rho, \infty]^+$, якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $b_{n,k}$, що задовольняє умови

$$\overline{\lim_{r_n\to\infty}} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+\ln^+ \sup_{1\le k\le q_n} \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} \le \rho,$$

$$\sup_n \frac{1}{\ln(2+r_n)} \ln^+\ln^+ \sup_{1\le k\le q_n} \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} < \infty,$$

існує функція $f \in [\rho, \infty]^+$ із властивістю (J).

Теорема 2. Наступні твердження еквівалентні.

1. Дивізор $\mathcal{D}$ є інтерполційний дивізор у класі $[\rho, \infty]^+$.

2. Канонічний добуток дивізора $\mathcal{D}$ задовольняє умови

$$\overline{\lim_{r_n\to\infty}} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+\ln \frac{1}{|E^{(q_n)}(a_n)|\Lambda_n^{q_n}} \le \rho,$$

$$\sup_n \frac{1}{\ln(2+r_n)} \ln^+\ln \frac{1}{|E^{(q_n)}(a_n)|\Lambda_n^{q_n}} < \infty.$$

3. Для будь якого $\delta > 0$ виконуються умови

$$3.1 \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r} \ln\left[\sin\theta \int_0^{\delta} \frac{n_{\mathcal{D}}^{+}(C(z,\alpha r)\setminus a_n)}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2}\, d\alpha\right] \le \rho,$$

$$3.2 \quad \sup_{z\in\mathbb{C}^+} \frac{1}{\ln(r+2)} \ln\left[\sin\theta \int_0^{\delta} \frac{n_{\mathcal{D}}^{+}(C(z,\alpha r)\setminus a_n)}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2}\, d\alpha\right] < \infty,$$

$$3.3 \quad \overline{\lim_{r_n\to\infty}} \frac{1}{\ln r_n} \ln\left(q_n \ln \frac{2\,\mathrm{Im}\, a_n}{\Lambda_n}\right) \le \rho,$$

$$3.4 \quad \sup_{n} \frac{1}{\ln(r_n+2)} \ln\left(q_n \ln \frac{2\,\mathrm{Im}\, a_n}{\Lambda_n}\right) < \infty.$$

Ще раз зазначимо, що якщо $\rho(r) \equiv 0$, то інтерполяційна задача у класі $[\rho(r), \infty)^{+}$ переходить в задачу у класі H^{∞}.

Теорема 3. Наступні умови еквівалентні.

1. Дивізор $\mathcal{D}$ є інтерполяційний дивізор у класі H^{∞}.

2. Добуток Бляшке дивізора $\mathcal{D}$ задовольняє умову

$$\sup_{n} \frac{1}{|B^{(q_n)}(a_n)|\,\Lambda_n^{q_n}} < \infty.$$

3. Виконуються умови

$$\sup_{z\in\mathbb{C}^+} \sin\theta \int_0^{\infty} \frac{\Phi^{+}(z,\alpha)\, d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2} < \infty,$$

$q_n \leq q$, $n = 1, 2 \ldots$ для деякого q .

Перейдемо до викладання результатів другої глави.

Однією із величин, що характеризують поведінку голоморфної функції в околі нескінченності, є індикатор цієї функції, який визначається формулою

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)} .$$

Визначення 3. Множина G називається множиною регулярного зростання (м.р.з.) функції f у півплощині $\mathbb{C}^+$, якщо існує відображення $T : G \to \mathbb{C}^+$ таке, що

$$\lim_{z \to \infty} \frac{T(z)}{z} = 1 , \quad \sup_{z \in G} \frac{|T(z) - z|}{\operatorname{Im} T(z)} < \infty ,$$

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in T(G)}} \left[\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{V(r)} - h_f(\theta) \right] = 0 , \; z = re^{i\theta} .$$

Нехай G - довільна множина. Будемо позначати $G_\sigma = \overline{\bigcup_{z \in G} C(z, \sigma)}$, G^t - гомотетію множини G з центром у точці нуль і коефіцієнтом t, $G^t_\sigma = (G_\sigma)^t$. Введемо таку функцію щільності міри n^+

$$d^+(G) = \lim_{\sigma \to +0} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{n^+(G^t_\sigma)}{V(t)} .$$

Нагадаємо, що неванлінніівська міра μ^+_v субгармонічної функції v в $\mathbb{C}^+$ визначається за формулою

$$d\mu_v^+(\zeta) = \sin(\arg\zeta)\, d\lambda_v(\zeta),$$

де λ_v - риссівська міра функції v. Через $\mathcal{D}_f$ ми будемо позначати дивізор коренів функції f.

Теорема 4. Нехай $f \in [\rho(r), \infty)^+$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_f$, $|\mathcal{D}|$ - носій дивізора $\mathcal{D}$. Нехай $|\mathcal{D}|$ - м.р.з. функції f відносно обмеженого індикатора $h(\theta)$, μ_H^+ - неванліннівська міра функції $H(re^{i\theta}) = r^{\rho}h(\theta)$. Тоді для будь-якого компакта $G \subset \mathbb{C}^+$ виконується нерівність

$$d^+(G) \leq \mu_H^+(G). \qquad (5)$$

Якщо $h(\theta)$ - неперервний індикатор на сегменті $[0, \pi]$, то нерівність (5) справджується для будь-якого компакта G.

М.В.Говоров довів, що якщо f - функція цілком регулярного зростання у замкненій півплощині, то множина її коренів має аргументну щільність, яка неперервна у точках 0 і π. Наступне твердження можна розглядати як узагальнення цього результату на випадок, коли м.р.з. є не вся множина $|\mathcal{D}_f|$, а тільки її частина $\mathcal{D}$, $|\mathcal{D}| \subset |\mathcal{D}_f|$.

Лема. Нехай $f \in [\rho(r), \infty)^+$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_f$, $|\mathcal{D}|$ - м.р.з. функції f у $\mathbb{C}^+$ відносно індикатора $h(\theta)$, неперервного на сегменті $[0, \pi]$. Тоді верхня аргументна щільність дивізора $\mathcal{D}$ неперервна у точках 0 і π.

Б.Я.Левін визначив регулярні множини у площині. Такі множини виявились корисними при побудові цілих функцій із заданим індикатором, при розв'язанні різних інтерполяційних задач, тощо. Для півплощини ми даємо аналогічне визначення.

Визначення 4. Множина E точок у верхній півплощині називається регулярною (R^+-множиною), якщо

1) в множині E відсутні точки з однаковим модулем, зокрема E не містить кратних точок,

2) якщо $z \in E$, то $|z| \geq 2$,

3) існує функція $d(r, \alpha)$, що визначена на множині $[2, \infty) \times [0, 1]$, яка задовольняє умови

$$d(r,\alpha) \geq d_0 > 0, \quad \lim_{(r,\alpha)\to(\infty,0)} d(r,\alpha) = +\infty$$

і така, що для будь-яких двох точок z_i, $z_j \in E$, $|z_i|<|z_j|$ виконується нерівність

$$|z_j| \geq |z_i| + d(|z_i|, \sin(\arg z_i)) \frac{\operatorname{Im} z_i}{V(|z_i|)} .$$

Теорема 5. Нехай $\rho(r)$, $\rho > 0$, - уточнений порядок, $h(\theta)$ - неперервний індикатор на сегменті $[0, \pi]$, а дивізор $\mathcal{D}$ такий, що для будь-якого компакта G виконується нерівність (5). Тоді існує функція $E(z)$ цілком регулярного зростання у замкненій верхній півплощині така, що $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_E$. При цьому виконуються додаткові умови:
1) Дивізор $\mathcal{D}_E \setminus \mathcal{D}$ не містить кратних точок.
2) Нехай $\varepsilon(r)$ - функція на промені $[0,\infty)$ така, що $\lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$

($\varepsilon(r)$ - будь-яка функція, що задовольняє написану умову, а функція $E(z)$ залежить від вибору $\varepsilon(r)$), а $\Lambda = \{\lambda_n = \tau_n e^{i\theta_n}\}$- частина коренів функції E, що не належать множині $|\mathcal{D}|$. Тоді $\Lambda \in R^+$- множина і круги $C(\lambda_n, \varepsilon(\tau_n)\frac{\operatorname{Im}\lambda_n}{V(\tau_n)})$ не перетинаються між собою і не перетинають множину $|\mathcal{D}|$.
3) Гранична міра функції E абсолютно неперервна і має щільність $d\gamma(x) = h(0)(1+\alpha_1(x))V(x)dx$ якщо $x>0$ і $d\gamma(x) = h(\pi)(1+\alpha_2(|x|))V(|x|)dx$, якщо $x<0$, $\alpha_i(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$. Причому якщо ρ неціле, то $\alpha_i(r) \equiv 0$.

Випадок, коли нерівність (5) справджується тільки для компактів $G \subset \mathbb{C}^+$, а не для будь-яких компактів, також розглядається в дисертації. При цьому на дивізор $\mathcal{D}$ накладається додаткова умова, що стосується поведінки $\mathcal{D}$ в околі межі півплощини.

У третій главі розглядаються інтерполяційні задачі в класах голоморфних в $\mathbb{C}^+$ функцій з обмеженням на індикатор. При цьому ми розглядаємо два випадки неперервного і обмеженого індикатора.

Нехай $h(\theta)$ неперервний, ρ - тригонометрично опуклий на сегменті $[0,\pi]$ індикатор, $\rho(r)$ - уточнений порядок.
Позначимо через $[\rho(r),h(\theta)]^+$ (через $[\rho(r),h(\theta)]^+_p$) клас функцій f напівформального порядку $\rho(r)$ у півплощині $\mathbb{C}^+$ таких, що $h_f(\theta)\le h(\theta)$ при $\theta\in[0,\pi]$ (таких, що f - функція цілком регулярно зростання в $\mathbb{C}^+$ і $h_f(\theta)=h(\theta)$ при $\theta\in[0,\pi]$).

Нагадаємо, що голоморфні в $\mathbb{C}^+$ функції скінченного порядку мають природне поширення на дійсну вісь і тому мають сенс величини $h_f(0)$, $h_f(\pi)$.

Визначення 5. Дивізор $\mathcal{D}=\{(a_n,q_n)\}_1^\infty$, $|\mathcal{D}|\subset\mathbb{C}^+$ називається інтерполяційним у класі $[\rho(r),h(\theta)]^+$ ($[\rho(r),h(\theta)]^+_p$), якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $\{b_{n,k}\}$, $k=1,\dots,q_n$, $n=1,2,\dots$, що задовольняє умову (1) і умову

$$\varlimsup_{r_n\to\infty}\left[\frac{1}{V(r_n)}\ln\max_{1\le k\le q_n}\frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!}-h(\theta_n)\right]\le 0\,,$$

існує функція $f\in[\rho(r),h(\theta)]^+$ ($f\in[\rho(r),h(\theta)]^+_p$) із властивістю $(\mathcal{J})$.

В наступній теоремі об'єднані різні критерії інтерполяційності дивізора $\mathcal{D}$.

Теорема 6. Наступні п'ять тверджень еквівалентні.
1. Дивізор $\mathcal{D}$ є інтерполяційний дивізор у класі $[\rho(r),h(\theta)]^+$.
2. Дивізор $\mathcal{D}$ є інтерполяційний дивізор у класі $[\rho(r),h(\theta)]^+_p$.
3. Існує функція $E\in[\rho(r),h(\theta)]^+$ така, що $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}_E$, виконується умова (2) і умова

$$\lim_{r_n\to\infty}\left[\frac{1}{V(r_n)}\ln\frac{1}{|E^{(q_n)}(a_n)|\Lambda_n^{q_n}}+h(\theta_n)\right]=0\,.$$

4. Існує функція $E\in[\rho(r),h(\theta)]^+_p$ така що $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}_E$ і умови пункту 3 виконуються для дивізора $\mathcal{D}_E$, а не тільки для дивізора $\mathcal{D}$.

5. Виконуються умови:

5.1 для будь-якого компакту G має місце нерівність (5),

5.2 виконуються умови (3) і (4),

5.3 $$\lim_{\delta\to+0}\ \overline{\lim_{z\to\infty}}\ J^{+}(z,\delta)=0,\ \lim_{r_n\to\infty}\frac{q_n}{V(r_n)}\ln\frac{2\operatorname{Im}a_n}{\Lambda_n}=0.$$

Нехай $h(\theta)$ - обмежений на $[0,\pi]$ індикатор (можливі розриви у точках 0 і π). Через $[\rho(r),h(\theta)]^{+}$ ($[\rho(r),h(\theta)]^{+}_{p}$) ми будемо позначати клас голоморфних в $\mathbb{C}^{+}$ функцій напівформального порядку $\rho(r)$ таких, що $h_f(\theta)\le h(\theta)$ при $\theta\in(0,\pi)$ (таких, що f - функція цілком регулярного зростання у відкритій півплощині $\mathbb{C}^{+}$ і має місце рівність $h_f(\theta)=h(\theta)$ при $\theta\in(0,\pi)$). Звернемо увагу, що у визначенні класів $[\rho(r),h(\theta)]^{+}$ і $[\rho(r),h(\theta)]^{+}_{p}$ для випадків неперервного і обмеженого індикаторів є істотна відмінність. У випадку обмеженого індикатора, на відзнаку від випадку неперервного індикатора, від величин $h_f(0)$, $h_f(\pi)$ не вимагається ніяких умов, окрім скінченності.

Визначення 6. Дивізор D, $|D|\subset\mathbb{C}^{+}$, називається інтерполяційним у класі $[\rho(r),h(\theta)]^{+}$ ($[\rho(r),h(\theta)]^{+}_{p}$), якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $b_{n,k}$, $k=1,\dots,q_n$, $n=1,2,\dots$, що задовольняє умову (1) і для будь-якого $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$ умову

$$\overline{\lim_{\substack{r_n\to\infty\\ \arg a_n\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]}}}\left[\frac{1}{V(r_n)}\ln\max_{1\le k\le q_n}\frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!}-h(\theta_n)\right]\le 0,$$

існує функція $f\in[\rho(r),h(\theta)]^{+}$ ($f\in[\rho(r),h(\theta)]^{+}_{p}$) із властивістю ($\dot{J}$).

Наступна теорема є аналогом теореми 6 для випадку обмеженого індикатора.

Теорема 7. Наступні п'ять тверджень еквівалентні.

1. Дивізор D є інтерполяційний дивізор у класі $[\rho(r),h(\theta)]^{+}$.
2. Дивізор D є інтерполяційний дивізор у класі $[\rho(r),h(\theta)]^{+}_{p}$.
3. Існує функція $E\in[\rho(r),h(\theta)]^{+}$ така, що $D\subset D_E$ і виконується умова 2 і для будь-якого $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$ умова .

$$\lim_{\substack{r_n \to \infty \\ \arg a_n \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]}} \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln \frac{1}{|E^{(q_n)}(a_n)| \Lambda_n^{q_n}} + h(\theta_n) \right] = 0 .$$

4. Існує функція $E \in [\rho(r), h(\theta)]_p^+$ така, що $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_E$ і умови пункту 3 виконуються для дивізора $\mathcal{D}_E$, а не тільки для дивізора $\mathcal{D}$.

5. Виконуються умови:

5.1 для будь-якого компакту $G \subset \mathbb{C}^+$ має місце нерівність (5).

5.2 виконуються умови (3) і (4).

5.3 для будь-якого $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{\delta \to +0,\ \arg z \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]} \mathcal{J}^+(z, \delta) = 0 ,$$

$$\lim_{\substack{r_n \to \infty \\ \arg a_n \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]}} \frac{q_n \ln r_n}{V(r_n)} = 0 .$$

Головні положення, що виносяться на захист дисертації.

1. Критерії існування розв'язку задачі вільної кратної інтерполяції у класах $[\rho, \infty]^+$, $[\rho(r), \infty)^+$, $[\rho(r), h(\theta)]^+$, $[\rho(r), h(\theta)]_p^+$. Формулювання цих критеріїв в термінах канонічних добутків Неванлінни і міри, визначеної вузлами інтерполяції.

2. Теорія множин регулярного зростання для функцій, голоморфних у півплощині.

3. Оцінка щільності множини коренів функції скінченного порядку у півплощині, яка є її множиною регулярного зростання.

4. Побудова функції цілком регулярного зростання у півплощині $\mathbb{C}^+$, яка має заданий індикатор при даному уточненому порядку.

Публікації

1. Малютін К.Г. Інтерполяція правильних множин у верхній півплощині // Допов. АН УРСР. - 1981. - N 5. - С.16-19.
2. Малютин К.Г. Интерполирование в полуплоскости обобщенными каноническими произведениями // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Харьков, 1986. - Вып.45. - С.84-96.
3. Малютин К.Г. Кратная интерполяция в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - Харьков, 1993.- Вып. 58. - С.69-78.
4. Малютін К.Г. Вільна інтерполяція з кратними вузлами у верхній напівплощині // Допов. АН України. - 1992. - N 6. - С.25-27.
5. Малютин К.Г. Множества регулярного роста в полуплоскости. Приложения и интерполяция // Докл. РАН.- 1993. - 333, N 3. - С.520-523.
6. Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Мат. сб. - 1993. - 184. - N 2. - С.129-144.
7. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций, аналитических в открытой полуплоскости // Укр. мат. журн. - 1994. - 46. - N 11. - С.1486-1501.
8. Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций вполне регулярного роста в открытой полуплоскости // Математическая физика, анализ, геометрия. - Харьков,1994.- 1. - N 3/4. - С.469-478.
9. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I // Изв. РАН. Математика. - 1995. - 59. - N 4. - С.125-154.
10. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II // Изв. РАН. Математика. - 1995.- 59. - N 5. - С.103-126.
11. Малютин К.Г. Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функций вполне регулярного роста // Рук. деп. в ВИНИТИ, 1980, N 1083-80, 22 с.

12. Малютин К.Г. Интерполяционная задача в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Рук. деп. в ВИНИТИ. 1980, N 1620-80. 29 с.
13. Малютин К.Г. Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе функций конечного порядка // Рук. деп. в ВИНИТИ. 1980. N 2219-80. 22 с.
14. Малютин К.Г. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций вполне регулярного роста в замкнутой верхней полуплоскости // Рук. деп. в УкрИНТЭИ, 1992. N 8 - Ук92. 28 с.
15. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста в полуплоскости // Рук. деп. в УкрИНТЭИ, 1992. N 834 - Ук92. 38 с.

Малютин К.Г. Интерполяция функциями конечного порядка в полуплоскости (рукопись).

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Специальность 01.01.01 - математический анализ. Институт прикладной математики и механики НАН Украины. Донецк, 1996.

Защищается 15 научных работ, в которых исследуются интерполяционные задачи в различных классах функций конечного порядка в полуплоскости. Построена теория множеств регулярного роста, голоморфных в полуплоскости функций. Она применяется для решения различных интерполяционных задач. Условия разрешимости формулируются в терминах канонических произведений Неванлинны, а также мер, определяемых узлами интерполяции.

Malyutin K.G. Interpolation by functions of finite order in halfe-plane (manus-cript).

Thesis for Doctor degree in Physics and Mathematics. Speciality 01.01.01 - Mathematical analysis. Institute of Applied Mathematics and Mechanics. National Academy of sciences of Ukraine. Donetsk, 1996.

There are defended 15 scientific works in which investigated interpolation problems in various classes of functions of finite order in halfe-plane. There are constructed theory of seys of regular growth for holomorphic functions in half-plane. It applies for resolving of interpolation problems. Conditions for resolving of interpolation problems are formulated in terms canonical products of Nevanlinna and measures defined by interpolation nodes.

Ключові слова: інтерполяційна задача, голоморфна у півплощині функція, функція скінченного порядку, індикатор, множина регулярного зростання.

Ю.Малютин