МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

Антонова Тамара Миколаївна

ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ І СТІЙКОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

01.01.01 - математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1996

Дисертацією є рукопис
Робота виконана на кафедрі прикладної матем...
державного університету "Львівська політехніка"

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор
СЯВАВКО Мар'ян Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
БОДНАР Дмитро Ількович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, доцент
МОХОНЬКО Анатолій Захарович
кандидат фізико-математичних наук, доцент
СТОРОЖ Олег Георгійович

Провідна організація: Інститут математики НАН України, м. Київ

Захист дисертації відбудеться "18" жовтня 1996 року
о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.04.01
при Львівському державному університеті ім. Ів.Франка за
адресою:
290602, м.Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці
Львівського державного університету ім. Ів.Франка за адресою:
м.Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "10" вересня 1996 року

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Я.В.МИКИТЮК**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність тематики. Неперервні (ланцюгові) дроби були об'єктом вивчення і засобом наукових досліджень багатьох видатних математиків минулого. За допомогою неперервних дробів розв'язано важливі задачі теорії функцій і диференціальних рівнянь, теорії чисел і обчислювальної математики. Ланцюгові дроби застосовуються, зокрема, для зображення гіпергеометричних функцій, для розв'язування проблеми моментів, для побудови аналітичного продовження функцій, заданих у вигляді рядів. Детальний історичний огляд, присвячений неперервним дробам, викладено у монографії У.В.Джоунса і В.Дж.Трона (*Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 414 с.).

Говорячи про неперервні дроби, а також тісно пов'язані з ними апроксимації Паде, їх порівнюють з такими засобами зображення аналітичних функцій, як ряди або нескінченні добутки. Якщо степеневий ряд, що являє собою аналітичну функцію, збігається у крузі, радіус якого визначається віддаллю до найближчого полюса, і розбігається зовні цього круга, то розвинення основних елементарних функцій в ланцюгові дроби, як правило, збігаються у всій комплексній площині, за винятком полюсів функції. Тому неперевні дроби викликають не тільки теоретичний інтерес, але й є важливим апаратом обчислювальної математики. Іншою причиною перспективності застосувань ланцюгових дробів у обчислювальній математиці є властивість їх обчислювальної стійкості (мале накопичення похибок у процесі обчислень).

Щоб зробити неперервні дроби більш зручними для обчислень, потрібно якомога більше знати про швидкість їх збіжності і про їх обчислювальну стійкість. Основою для розв'язування цих проблем виявилась теорія збіжності, що була розроблена виключно з позицій розвитку аналітичної теорії ланцюгових дробів.

За останні 30 років саме поняття ланцюгового дробу розширилось. З'явились такі важливі для застосувань поняття, як операторні (у роботах P.Wynn, W.Fair, T.L.Hayden, F.A.Roach) і гіллясті ланцюгові дроби (у роботах В.Я.Скоробогатька, П.І.Боднарчука, Д.І.Боднара, Х.Й.Кучмінської, М.О.Недашковського, A.Cuyt, W.Siemaszko, J.Murphy, M.R.O'Donohoe). В основі цих понять лежать різні ідеї узагальнення звичайного ланцюгового дробу. Запропонований М.С.Сявавком новий нелінійний математичний апарат операторних інтегральних ланцюгових дробів по мірі охоплює різні види ланцюгових дробів (за рахунок вибору міри інтегрування, вибору множин, по яких ведеться інтегрування, вибору алгебри, а також за рахунок підбору компонент дробу).

Застосування апарату неперервних дробів для побудови чисельних методів розв'язування конкретної задачі вимагає вибору того чи іншого різновиду такого дробу: звичайного, матричного, операторного, гіллястого, інтегрального тощо. Гіллястий ланцюговий дріб відіграє стосовно до функцій багатьох змінних таку ж роль, як звичайний неперервний дріб відносно функції однієї змінної (*Скоробогатько В.Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике.- М.: Наука, 1983.- 312 с., *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. - К.: Наук. думка, 1986. - 176 с.). Інтегральний ланцюговий дріб як деяке неперервне узагальнення дискретного поняття гіллястого ланцюгового дробу дає можливість здійснювати дробово-аналітичне зображення функціоналів (операторів). В деяких випадках використання інтегральних ланцюгових дробів для наближення розв'язків матричних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь має певні переваги перед використанням для цієї мети інтегро-степеневих рядів Вольтерри.

У монографії М.С.Сявавка (*Сявавко М.С.* Інтегральні ланцюгові дроби. - К.: Наук. думка, 1994. - 206 с.) наведено велику кількість прикладів застосувань інтегральних ланцюгових дробів. Розв'язки багатьох задач математичної і теоретичної фізики формально подано у вигляді інтегральних ланцюгових дробів. Разом з тим питання про збіжність значної кількості таких розвинень є відкритим.

Тому не викликає сумніву актуальність подальшої розробки аналітичної теорії інтегральних ланцюгових дробів, зокрема, теорії збіжності, дослідження обчислювальної стійкості (стійкості до збурень) різних класів інтегральних ланцюгових дробів.

Метою дисертаційної роботи є встановлення ефективних достатніх ознак збіжності інтегральних ланцюгових дробів з дійсними та комплексними компонентами, виділення класів інтегральних ланцюгових дробів, що мають властивість обчислювальної стійкості (стійкості до збурень).

Методика досліджень. В дисертаційній роботі використовуються методи математичного аналізу, теорії функцій комплексної змінної, аналітичної теорії ланцюгових дробів та їх узагальнень.

Наукова новизна роботи полягає

- у дослідженні інтегральних ланцюгових дробів зі змінними межами інтегрування (включаючи і нескінченні межі);
- у встановленні рекурентних формул для дійсної і уявної частин залишків інтегральних ланцюгових дробів;
- у застосуванні методу фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності інтегральних ланцюгових дробів з комплексними компонентами;

- у встановленні ефективних достатніх ознак інтегральних ланцюгових дробів з оцінками похибок апроксимації;

- у розробці методики дослідження обчислювальної стійкості (стійкості до збурень) інтегральних ланцюгових дробів з дійсними і комплесними компонентами та її застосуванні.

Наукова та практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер, і її результати сформульовані у вигляді теорем. Отримані результати можуть бути використані для подальшого розвитку аналітичної теорії гіллястих та інтегральних ланцюгових дробів. Розроблена методика дослідження множини значень інтегральних ланцюгових дробів, швидкості їх збіжності та обчислювальної стійкості може бути застосована для аналізу розв'язків задач математичної і теоретичної фізики, знайдених за допомогою гіллястих та інтегральних ланцюгових дробів.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист:

- встановлення найбільш загальної (серед відомих на даний час) достатньої ознаки збіжності інтегральних ланцюгових дробів з дійсними компонентами і аналога теореми Слешинського-Прінгсгейма, який включає в себе раніше доведені ознаки збіжності даного типу (як гіллястих, так і інтегральних ланцюгових дробів з комплексними компонентами);

- нова методика дослідження збіжності інтегральних ланцюгових дробів з комплексними компонентами, яка базується на використанні формул для дійсної і уявної частин залишків інтегральних ланцюгових дробів, і отримані з її допомогою достатні ознаки збіжності інтегральних ланцюгових дробів;

- дослідження властивості обчислювальної стійкості (стійкості до збурень) різних класів інтегральних ланцюгових дробів з дійсними і комплексними компонентами.

Особистий вклад дисертанта. Всі наведені в дисертації основні результати одержані самостійно. Із спільних робіт використано лише ті результати, які одержані дисертантом.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались на семінарах з аналітичної теорії ланцюгових дробів та їх узагальнень (керівники: Д.І.Боднар, проф. В.Я.Скоробогатько), на YIII Республіканській конференції "Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей" (Донецьк, 1991р.), на міжнародній школі-семінарі "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (Верхнє Синевидне, 1994 р.), на Всеукраїнській науковій конференції "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів у наукових дослідженнях" (Львів, 1995 р.), на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях", присвяченій 70-річчю від дня народження проф. П.С.Казімірського (Львів, 1995 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1.-8].

Структура і обсяг. Дисертація складається зі вступу, 8-ми параграфів, об'єднаних у два розділи, висновків та списку літератури, що містить 58 найменувань. Загальний обсяг роботи - 141 сторінка.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі подано короткий огляд положень, що безпосередньо стосуються теми роботи, викладено основні результати дисертації.

Перший розділ присвячено питанням збіжності інтегральних ланцюгових дробів.

У § 1.1 з'ясовується поняття інтегрального ланцюгового дробу та деяких основних понять теорії збіжності.

Нехай області $G_k \subset R^k \quad (k = 1, 2, \ldots)$ характеризуються такими співвідношеннями:

$$
\begin{aligned}
&G_1 = \{\tau_1\colon\ \alpha_1 \le \tau_1 \le \beta_1\},\\
&G_2 = \{(\tau_1, \tau_2)\colon\ \tau_1 \in G_1,\ \alpha_2(\tau_1) \le \tau_2 \le \beta_2(\tau_1)\},\ \ldots,\\
&\quad G_k = \{(\tau_1, \ldots, \tau_k)\colon\ (\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}) \in G_{k-1},\\
&\qquad\qquad \alpha_k(\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}) \le \tau_k \le \beta_k(\tau_1, \ldots, \tau_{k-1})\},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\alpha_1,\ \beta_1$ - сталі, $\alpha_p(\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}),\ \beta_p(\tau_1, \ldots, \tau_{p-1})\ \ (p = \overline{2, \infty})$ - неперервні на G_{p-1} функції. Вважаються також можливими випадки (один з них або довільна їх комбінація), коли $\alpha_1 = -\infty,\ \beta_1 = \infty$, $\alpha_p(\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}) = -\infty,\ \ \beta_p(\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}) = \infty$. При цьому нестрогі нерівності у співвідношеннях (1) заміняються на відповідні строгі нерівності.

Означення 1.1. Інтегральним ланцюговим дробом (ІЛД) називається послідовність виразів вигляду

$$
f_n = b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})} \frac{a_k(\tau^k)\, d\tau_k}{b_k(\tau^k)} =
$$

$$= b_0 + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \cfrac{a_1(\tau^1)d\tau_1}{b_1(\tau^1) + \int\limits_{\alpha_2(\tau^1)}^{\beta_2(\tau^1)} \cfrac{a_2(\tau^2)d\tau_2}{b_2(\tau^2) + \ddots + \int\limits_{\alpha_n(\tau^{n-1})}^{\beta_n(\tau^{n-1})} \cfrac{a_n(\tau^n)d\tau_n}{b_n(\tau^n)}}} \tag{2}$$

($n = 1,2,\ldots$), $\tau^k = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in G_k$, b_0 - стала, $a_k(\tau^k)$, $b_k(\tau^k)$ належать простору неперервних на G_k функцій ($k = \overline{1,n}$).

Для скороченого запису нескінченного інтегрального ланцюгового дробу використаємо позначення

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})} \frac{a_k(\tau^k)d\tau_k}{b_k(\tau^k)}. \tag{3}$$

Функції $a_1(\tau^1)$, $a_2(\tau^2)$, ... називаються частинними чисельниками ІЛД (3), $b_1(\tau^1)$, $b_2(\tau^2)$, ... - його частинними знаменниками; скінченний ІЛД вигляду (2) називається n-м підхідним дробом або n-ю апроксимантою ІЛД (3). Вважатимемо, що всі частинні знаменники ІЛД відмінні від нуля на областях G_k.

Означення 1.2. Нескінченний інтегральний ланцюговий дріб (3), для якого існує скінченна границя K послідовності $\{f_n\}$ підхідних дробів, називається збіжним. Тоді вважається, що значення ІЛД дорівнює цій границі. Різниця $K - f_n$ називається похибкою апроксимації n-го підхідного дробу.

Покладемо

$$Q_k^{\,n}(\tau^k) = b_k(\tau^k) + \mathop{D}_{m=k+1}^{n} \int\limits_{\alpha_m(\tau^{m-1})}^{\beta_m(\tau^{m-1})} \frac{a_m(\tau^m)d\tau_m}{b_m(\tau^m)} \quad (0 \le k < n),$$

$$Q_n^{\,n}(\tau^n) = b_n(\tau^n). \tag{4}$$

Вирази $Q_k^{\,n}(\tau^k)$ назвемо залишками ІЛД (3).

Еквівалентне перетворення інтегральних ланцюгових дробів - це перетворення, що не змінює величини підхідних дробів. За допомогою еквівалентного перетворення ІЛД (3) можна звести до вигляду

$$b_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})} \frac{c_k(\tau^k)d\tau_k}{1}. \tag{5}$$

Означення 1.3. Інтегральний ланцюговий дріб (3) збігається абсолютно, якщо є збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|f_k - f_{k-1}\right|$.

Вважатимемо, що для ІЛД (3) виконуються фундаментальні нерівності, якщо існують такі додатні сталі ρ_k $(k \ge 1)$, що для довільних натуральних $k,\ p\ (p > k)$ при $\tau^k \in G_k$ справджуються співвідношення

$$\int\limits_{\alpha_{k+1}(\tau^k)}^{\beta_{k+1}(\tau^k)} \frac{\left|a_{k+1}(\tau^{k+1})\right|d\tau_{k+1}}{\left|Q_{k+1}^{p}(\tau^{k+1})\right|} \le \rho_k \left| b_k(\tau^k) + \int\limits_{\alpha_{k+1}(\tau^k)}^{\beta_{k+1}(\tau^k)} \frac{a_{k+1}(\tau^{k+1})d\tau_{k+1}}{Q_{k+1}^{p}(\tau^{k+1})}\right|. \tag{6}$$

Наведено теорему 1.1.1, у якій сформульовано достатні умови збіжності ІЛД, для яких справджуються фундаментальні нерівності.

У § 1.2 вивчаються питання збіжності інтегральних ланцюгових дробів з дійсними компонентами. Можна припустити, що всі частинні знаменники таких інтегральних ланцюгових дробів додатні. У інших випадках цього завжди можна досягти, помножуючи відповідні частинні чисельники і знаменники на -1. Частинні чисельники ІЛД з дійсними компонентами можна записати у вигляді

$$a_k(\tau^k) = a_k^{+}(\tau^k) + a_k^{-}(\tau^k),$$

де

$$a_k^{+}(\tau^k) = \frac{a_k(\tau^k)+\left|a_k(\tau^k)\right|}{2}, \quad a_k^{-}(\tau^k) = \frac{a_k(\tau^k)-\left|a_k(\tau^k)\right|}{2}.$$

Теорема 1.2.1. Нехай для інтегрального ланцюгового дробу (3) існують такі неперервні функції $g_p(\tau^p)$, що

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\left|a_1(\tau^1)\right|}{g_1(\tau^1)} d\tau_1 = M < \infty; \tag{7}$$

$$0 < g_p(\tau^p) \le b_p(\tau^p), \quad \tau^p \in G_p, \quad p \ge 1; \tag{8}$$

при всіх $\tau^{k-1} \in G_{k-1}$ $(k \ge 2)$ виконуються умови

$$\int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})} \frac{\left|a_k^{-}(\tau^k)\right|d\tau_k}{g_k(\tau^k)} \le \frac{1}{2} b_{k-1}(\tau^{k-1}), \tag{9}$$

$$\int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})} a_k^{+}(\tau^k)\left(b_k(\tau^k)+\int\limits_{\alpha_{k+1}(\tau^k)}^{\beta_{k+1}(\tau^k)}\frac{a_{k+1}^{+}(\tau^{k+1})d\tau_{k+1}}{g_{k+1}(\tau^{k+1})}\right)^{-1} d\tau_k -$$

$$-\int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})}\frac{\left|a_k^{-}(\tau^k)\right|d\tau_k}{g_k(\tau^k)}+b_{k-1}(\tau^{k-1})-g_{k-1}(\tau^{k-1})\ge 0, \qquad (10)$$

та існують такі додатні сталі $\hat{\pi}_k \quad (k \ge 2)$, що

$$\int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})}\frac{\left|a_k(\tau^k)\right|d\tau_k}{g_k(\tau^k)}\left(b_{k-1}(\tau^{k-1})-2\int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})}\frac{\left|a_k^{-}(\tau^k)\right|d\tau_k}{g_k(\tau^k)}\right)^{-1}\le\frac{1}{\hat{\pi}_k}. \qquad (11)$$

Тоді ІЛД (3) є збіжним, якщо ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\hat{\pi}_k$ розбігається. Швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$\left|K-f_n\right|\le M\prod_{k=1}^{n}\left(1+\hat{\pi}_{k+1}\right)^{-1}. \qquad (12)$$

Ця теорема є найбільш загальною (серед відомих на даний час) достатньою ознакою збіжності ІЛД з дійсними компонентами. Але умову (10) перевірити не завжди просто. Тому в роботі наведено більш ефективну, але менш загальну теорему 1.2.2, де розглядаються ІЛД із скінченними межами інтегрування (починаючи з другої ланки), а умови (8)-(11) замінено жорсткішими умовами. При виборі $g_p(\tau^p)=\left(1+\sqrt{1-4\beta}\right)b_p(\tau^p)/2 \quad (0<\beta<1/4)$ теореми 1.2.1, 1.2.2 можна розглядати як континуальні узагальнення ознаки збіжності гіллястих ланцюгових дробів з дійсними компонентами, встановленої Д.І.Боднаром, Х.Й.Кучмінською.

У § 1.3 ілюструється застосування методу мажорант для дослідження збіжності інтегральних ланцюгових дробів, частинні чисельники і знаменники яких - комплекснозначні функції.

Означення 1.4. Інтегральний ланцюговий дріб

$$\tilde{b}_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\tilde{\alpha}_k(\tau^{k-1})}^{\tilde{\beta}_k(\tau^{k-1})}\frac{\tilde{a}_k\left(\tau^k\right)d\tau_k}{\tilde{b}_k\left(\tau^k\right)} \qquad (13)$$

або звичайний ланцюговий дріб

$$\tilde{b}_0+\mathop{D}_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{a}_k}{\tilde{b}_k} \qquad (14)$$

з комплексними компонентами називається мажорантою інтегрального ланцюгового дробу (3), якщо існує такий номер m_0 і додатна стала N, що для будь-якого натурального m, $m \geq m_0$

$$\left|f_{m+1} - f_m\right| \leq N\left|\tilde{f}_{m+1} - \tilde{f}_m\right|, \tag{15}$$

де $\tilde{f}_m$ - m-й підхідний дріб ІЛД (13) або (14).

Теорема 1.3.1. Якщо існують такі неперервні з додатними значеннями на G_k функції $g_k(\tau^k)$, що справджується умова (7) і при всіх $\tau^k \in G_k$ $(k \geq 1)$ виконуються умови

$$\left|b_k\left(\tau^k\right)\right| \geq g_k\left(\tau^k\right) + \int\limits_{\alpha_{k+1}\left(\tau^k\right)}^{\beta_{k+1}\left(\tau^k\right)} \frac{\left|a_{k+1}\left(\tau^{k+1}\right)\right|}{g_{k+1}\left(\tau^{k+1}\right)} d\tau_{k+1}, \tag{16}$$

то ІЛД (3) є абсолютно збіжним, і область його значень і значень всіх його підхідних дробів належить кругу

$$\left|z - b_0\right| \leq \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\left|a_1\left(\tau^1\right)\right|}{g_1\left(\tau^1\right)} d\tau_1. \tag{17}$$

Цю теорему можна інтерпретувати як найбільш загальний континуальний аналог ознаки Слешинського-Прінгсгейма. При різних способах вибору функцій $g_k(\tau^k)$ (зокрема, $g_k(\tau^k) = 1$, $g_k(\tau^k) = \left|a_k(\tau^k)\right|$) можна отримати ознаки, що були доведені раніше Р.І.Михальчуком, М.С.Сявавком.

Використовуючи метод мажорант і першу інтерпретацію фундаментальних нерівностей для звичайних ланцюгових дробів (*Wall H.S.* Analytic theory of continued fractions. - New York: Van Nostrand.- 1948.- 433 p.), доведено теореми 1.3.2, 1.3.3, у яких досліджено збіжність ІЛД вигляду (5) і встановлено області їх значень.

§ 1.4 присвячено доведенню деяких достатніх ознак збіжності інтегральних ланцюгових дробів певного вигляду за допомогою методу фундаментальних нерівностей, що раніше застосовувався тільки при дослідженні гіллястих та інтегральних ланцюгових дробів з дійсними компонентами. При цьому вперше досліджуються множини значень дійсної $u_k{}^n\left(\tau^k\right)$ та уявної $v_k{}^n\left(\tau^k\right)$ частин залишків $Q_k{}^n\left(\tau^k\right)$.

Для інтегральних ланцюгових дробів вигляду

$$b_0 + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{a_1(\tau^1)d\tau_1}{\left|b_1(\tau^1)\right|\exp\left(i\varphi_1(\tau^1)\right) + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \int\limits_{\alpha_k(\tau^{k-1})}^{\beta_k(\tau^{k-1})} \frac{\left|a_k(\tau^k)\right|d\tau_k}{\left|b_k(\tau^k)\right|\exp\left(i\varphi_k(\tau^k)\right)}}, \quad (18)$$

де i - уявна одиниця, встановлено такі формули

$$u_n{}^n(\tau^n) = \left|b_n(\tau^n)\right|\cos\varphi_n(\tau^n),\ v_n{}^n(\tau^n) = \left|b_n(\tau^n)\right|\sin\varphi_n(\tau^n); \quad (19)$$

$$u_k{}^n(\tau^k) = \left|b_k(\tau^k)\right|\cos\varphi_k(\tau^k) +$$

$$+ \sum_{m=k+1}^{n} \int\limits_{\alpha_{k+1}(\tau^k)}^{\beta_{k+1}(\tau^k)} \dots \int\limits_{\alpha_m(\tau^{m-1})}^{\beta_m(\tau^{m-1})} \left|b_m(\tau^m)\right|\cos\varphi_m(\tau^m) \prod_{p=k+1}^{m} \frac{\left|a_p(\tau^p)\right|d\tau_p}{\left|Q_p{}^n(\tau^p)\right|^2}, \quad (20)$$

$$v_k{}^n(\tau^k) = \left|b_k(\tau^k)\right|\sin\varphi_k(\tau^k) +$$

$$+ \sum_{m=k+1}^{n} (-1)^{m-k} \int\limits_{\alpha_{k+1}(\tau^k)}^{\beta_{k+1}(\tau^k)} \dots \int\limits_{\alpha_m(\tau^{m-1})}^{\beta_m(\tau^{m-1})} \left|b_m(\tau^m)\right|\sin\varphi_m(\tau^m) \prod_{p=k+1}^{m} \frac{\left|a_p(\tau^p)\right|d\tau_p}{\left|Q_p{}^n(\tau^p)\right|^2} \quad (21)$$

(у припущенні, що $Q_p^n(\tau^p) \neq 0,\ p = \overline{k+1,\ n};\ k = \overline{1,\ n-1}$).

За допомогою цих формул отримано деякі оцінки для $u_k{}^n(\tau^k)$, $v_k{}^n(\tau^k)$, $\left|Q_k{}^n(\tau^k)\right|$ $\left(k = \overline{1,\ n}\right)$, сформульовані в лемах 1.4 - 1.8.

Лема 1.6. Якщо при всіх натуральних $k, m\ (k < m)$

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi_k\left(\tau^k\right) + (-1)^{m-k+1}\varphi_m\left(\tau^m\right) \le \frac{\pi}{2} \quad (\tau^k \in G_k,\ \ \tau^m \in G_m), \quad (22)$$

то має місце оцінка

$$\left|Q_k{}^n\left(\tau^k\right)\right| \ge \left|b_k{}^n\left(\tau^k\right)\right| \quad (1 \le k \le n). \quad (23)$$

Лема 1.7. Нехай при всіх натуральних p компоненти ІЛД (18) задовольняють такі умови

$$0 \le \varphi_{2p-1}\left(\tau^{2p-1}\right) \le \frac{\pi}{2},\ \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi_{2p}\left(\tau^{2p}\right) \le 0. \quad (24)$$

Тоді для всіх натуральних $n,\ n \ge 2p$ має місце оцінка (23) і

$$v_{2p-1}^n\left(\tau^{2p-1}\right) \ge \left|b_{2p-1}\left(\tau^{2p-1}\right)\right|\sin\varphi_{2p-1}\left(\tau^{2p-1}\right),$$

$$v_{2p}^n\left(\tau^{2p}\right) \le \left|b_{2p}\left(\tau^{2p}\right)\right|\sin\varphi_{2p}\left(\tau^{2p}\right). \quad (25)$$

Встановлені в лемах оцінки використовуються при доведенні достатніх ознак збіжності ІЛД (18).

Теорема 1.4.1. Сукупність умов

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi_p\left(\tau^p\right) \le \frac{\pi}{4} \quad \left(\tau^p \in G_p, \quad p \ge 1\right); \tag{26}$$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\left|a_1\left(\tau^1\right)\right|}{\left|b_1\left(\tau^1\right)\right|} d\tau_1 = M < \infty; \tag{27}$$

$$\int_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{\left|a_k\left(\tau^k\right)\right| d\tau_k}{\left|b_{k-1}\left(\tau^{k-1}\right)\right|\left|b_k\left(\tau^k\right)\right|} \le \gamma < 1 \quad (k \ge 2) \tag{28}$$

достатня для абсолютної збіжності ІЛД (18) і для виконання нерівності

$$\left|K - f_n\right| \le M\gamma^n, \tag{29}$$

де K - значення ІЛД (18).

Теорема 1.4.2. Якщо компоненти інтегрального ланцюгового дробу (18) задовольняють умови (24), (27), а також

$$\int_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{\left|a_k\left(\tau^k\right)\right| d\tau_k}{\left|b_k\left(\tau^k\right)\right|\left|b_{k-1}\left(\tau^{k-1}\right)\right|} < \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \left(\tau^{k-1} \in G_{k-1}, \quad k \ge 2\right); \tag{30}$$

існують додатні сталі π_k $(k \ge 2)$, такі, що

$$\left(\int_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{\left|a_k\left(\tau^k\right)\right|}{\left|b_{k-1}\left(\tau^{k-1}\right)\right|\left|b_k\left(\tau^k\right)\right|} d\tau_k\right)^2 \times$$

$$\times\left(1 - \left(\sqrt{3}-1\right)\int_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{\left|a_k\left(\tau^k\right)\right|}{\left|b_{k-1}\left(\tau^{k-1}\right)\right|\left|b_k\left(\tau^k\right)\right|} d\tau_k\right)^{-1} \le \frac{1}{\pi_k}, \tag{31}$$

і ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \pi_k$ є розбіжним, то ІЛД (18) збігається, причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$\left|K - f_n\right| \le M \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 + \pi_k\right)^{-1/2}. \tag{32}$$

Для інтегральних ланцюгових дробів вигляду

$$b_0 + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{a_1\left(\tau^1\right)d\tau_1}{\left|b_1\left(\tau^1\right)\right| + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \int\limits_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{\left|a_k\left(\tau^k\right)\right| \exp\left(i\theta_k\left(\tau^k\right)\right)d\tau_k}{\left|b_k\left(\tau^k\right)\right|}}, \tag{33}$$

де i - уявна одиниця, побудовані формули для дійсної і уявної частин залишків ІЛД, на основі яких встановлено оцінки множини значень залишків $Q_k^{\,n}\left(\tau^k\right)$ (леми 1.8 - 1.12), а також достатні ознаки збіжності (теореми 1.4.3 - 1.4.5).

Лема 1.9. Нехай компоненти ІЛД (33) такі, що для всіх натуральних $p\ (p \geq 2)$

$$0 \leq \theta_p\left(\tau^p\right) \leq \frac{\pi}{2} \qquad \left(\tau^p \in G_p\right); \tag{34}$$

$$\theta_p\left(\tau^p\right) \geq \theta_{p+1}\left(\tau^{p+1}\right) \qquad \left(\tau^p \in G_p,\ \ \tau^{p+1} \in G_{p+1}\right). \tag{35}$$

Тоді для всіх натуральних $k,\ n\ \ (1 \leq k \leq n)$

$$u_k^{\,n}\left(\tau^k\right) \geq \left|b_k\left(\tau^k\right)\right|, \qquad v_k^{\,n}\left(\tau^k\right) \geq 0. \tag{36}$$

Лема 1.10. Нехай компоненти ІЛД (33) такі, що для всіх натуральних $p\ (p \geq 2)$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_p\left(\tau^p\right) \leq 0 \qquad \left(\tau^p \in G_p\right); \tag{37}$$

$$\theta_p\left(\tau^p\right) \leq \theta_{p+1}\left(\tau^{p+1}\right) \quad \left(\tau^p \in G_p,\ \ \tau^{p+1} \in G_{p+1}\right). \tag{38}$$

Тоді для всіх натуральних $k,\ n\ \ (1 \leq k \leq n)$

$$u_k^{\,n}\left(\tau^k\right) \geq \left|b_k\left(\tau^k\right)\right|, \qquad v_k^{\,n}\left(\tau^k\right) \leq 0. \tag{39}$$

Теорема 1.4.3. Нехай компоненти ІЛД (33) при всіх $\tau^k \in G_k$ $(k \geq 2)$ задовольняють умови (34) (або (37)), (35) (або (38)), (27), (28). Тоді ІЛД (33) є абсолютно збіжним, і виконується нерівність (29), де K - значення ІЛД (33), f_n - його n-й підхідний дріб.

Теорема 1.4.4. Нехай компоненти ІЛД (33) задовольняють умову (27), а також при всіх $\tau^k \in G_k$ $(k \geq 2)$ справджуються умови (30), (31), (34) (або (37)) і $\left|\theta_k\left(\tau^k\right)\right| \geq \left|\theta_{k+1}\left(\tau^{k+1}\right)\right|$. Тоді ІЛД (33) збігається, і швидкість його збіжності характеризується нерівністю (32).

Леми 1.9.-1.12, теореми 1.4.3.-1.4.5 присвячені дослідженню ІЛД вигляду (33), частинні чисельники яких (за винятком, можливо, першого) мають невід'ємну дійсну частину. Встановлено також деякі ознаки збіжності ІЛД вигляду (33), область значень частинних чисельників яких (за винятком, можливо, першого) знаходиться у другому чи третьому квадранті (леми 1.13, 1.14, теорема 1.4.6).

Доведено також одну достатню ознаку збіжності інтегральних ланцюгових дробів вигляду (5), яку можна інтерпретувати як деякий континуальний аналог теореми про параболічну область збіжності (теорема 1.4.7). Попередньо доведено лему 1.15 про оцінку значення дійсної частини залишку ІЛД цього класу.

У § 1.5 розглядаються періодичні ІЛД вигляду

$$b_0 + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_1(\tau_1)d\tau_1}{b_1(\tau_1) + \underset{k=2}{\overset{\infty}{D}} \int_{\alpha}^{\tau_{k-1}} \frac{a(\tau_{k-1}, \tau_k)d\tau_k}{b(\tau_{k-1}, \tau_k)}}, \tag{40}$$

де α, β - сталі.

Теорема 1.5.1. Якщо існують такі функції $g_1(\tau_1)$, $g(\tau, \xi)$, що при $\tau \in [\alpha, \beta]$, $\xi \in [\alpha, \tau]$ неперервні, набувають додатних значень і при всіх натуральних k, s $(1 < k \le s)$

$$\left|Q_1^{s}(\tau_1)\right| \ge g_1(\tau_1), \qquad \left|Q_k^{s}(\tau_{k-1}, \tau_k)\right| \ge g(\tau_{k-1}, \tau_k)$$
$$(\ \tau_1 \in [\alpha, \beta],\ \tau_k \in [\alpha, \tau_{k-1}]\ ), \tag{41}$$

то ІЛД (40) збігається абсолютно, причому швидкість його збіжності характеризується нерівністю

$$|K - f_n| \le \frac{M_1}{m_1^{\,2}} \cdot \frac{M^n(\beta - \alpha)^{n+1}}{m^{2n-1}(n+1)!} \quad (n \ge 1), \tag{42}$$

де K - значення ІЛД (40), f_n - його n-й підхідний дріб,

$$M_1 = \max_{\alpha \le \tau \le \beta} |a_1(\tau_1)|, \qquad M = \max_{\alpha \le \xi \le \tau \le \beta} |a(\tau, \xi)|,$$
$$m_1 = \min_{\alpha \le \tau \le \beta} g_1(\tau_1), \qquad m = \min_{\alpha \le \xi \le \tau \le \beta} g(\tau, \xi). \tag{43}$$

Використовуючи оцінки значень $\left|Q_k^n(\tau^k)\right|$ $(1 \le k \le n)$, одержані у §§ 1.2 - 1.4, конкретизується спосіб вибору функцій $g_1(\tau_1)$, $g(\tau, \xi)$.

У другому розділі викладено результати дослідження однієї важливої властивості апарату інтегральних ланцюгових дробів - властивості обчислювальної стійкості (стійкості до збурень.

Якщо компоненти b_0, $a_k\left(\tau^k\right)$, $b_k\left(\tau^k\right)$ збіжного ІЛД

$$b_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \int\limits_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{a_k\left(\tau^k\right)d\tau_k}{b_k\left(\tau^k\right)} \tag{44}$$

замінено деякими значеннями $\bar{b}_0$, $\bar{a}_k\left(\tau^k\right)$, $\bar{b}_k\left(\tau^k\right)$, то значення $\bar{K}$ інтегрального ланцюгового дробу

$$\bar{b}_0 + \overset{\infty}{\underset{k=1}{D}} \int\limits_{\alpha_k\left(\tau^{k-1}\right)}^{\beta_k\left(\tau^{k-1}\right)} \frac{\bar{a}_k\left(\tau^k\right)d\tau_k}{\bar{b}_k\left(\tau^k\right)} \tag{45}$$

(якщо він збігається) може дуже суттєво відрізнятись від значення K ІЛД (44).

Нехай Δb_0, $\Delta a_k\left(\tau^k\right)$, $\Delta b_k\left(\tau^k\right)$ - похибки обчислення (збурення) компонент ІЛД (44), тобто

$$\Delta b_0 = \bar{b}_0 - b_0, \quad \Delta a_k\left(\tau^k\right) = \bar{a}_k\left(\tau^k\right) - a_k\left(\tau^k\right),$$
$$\Delta b_k\left(\tau^k\right) = \bar{b}_k\left(\tau^k\right) - b_k\left(\tau^k\right) \quad (k \geq 1), \tag{46}$$

f_n, $\bar{f}_n$ - підхідні дроби n-го порядку інтегральних ланцюгових дробів (44) і (45) відповідно, $\Delta f_n = \bar{f}_n - f_n$. Вважатимемо похибки обчислення (збурення) компонент ІЛД (44) обмеженими, тобто

$$\left|\Delta a_k\left(\tau^k\right)\right| \leq \Delta^{(1)}, \quad \left|\Delta b_k\left(\tau^k\right)\right| \leq \Delta^{(2)},$$

де $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}$ - додатні сталі.

Означення 2.1. Якщо існують такі незалежні від n додатні числа C_1, C_2, що

$$\left|\Delta f_n\right| \leq \left|\Delta b_0\right| + C_1\Delta^{(1)} + C_2\Delta^{(2)}, \tag{47}$$

то вважатимемо, що ІЛД (44) має властивість обчислювальної стійкості (стійкості до збурень).

У § 2.1 виведено формули, що встановлюють зв'язок між похибкою обчислення (збуренням) підхідних дробів інтегрального ланцюгового дробу (44) і похибками обчислення (збуреннями) його компонент, на основі яких досліджено стійкість до збурень інтегральних ланцюгових дробів загального вигляду.

Теорема 2.1.1. Припустимо, що існують такі додатні сталі M, M_1, H, $\overline{H}$, D, $\overline{D}$, ρ, $\overline{\rho}$ ($\rho\overline{\rho}<1$), що для інтегральних ланцюгових дробів (44) і (45) для довільних натуральних n, k, p $(1 \le k < n,\ 1 \le p \le n)$ при $\tau^k \in G_k$, $\tau^p \in G_p$ виконуються такі умови

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\left|a_1\left(\tau^1\right)\right|}{\left|Q_1^{\,n}\left(\tau^1\right)\right|} d\tau_1 \le M, \qquad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{d\tau_1}{\left|\overline{Q}_1^{\,n}\left(\tau^1\right)\right|} \le M_1; \tag{48}$$

$$\left|Q_p^{\,n}\left(\tau^p\right)\right| \ge H^{-1}, \qquad \left|\overline{Q}_p^{\,n}\left(\tau^p\right)\right| \ge \overline{H}^{-1}; \tag{49}$$

$$\int_{\alpha_{k+1}\left(\tau^k\right)}^{\beta_{k+1}\left(\tau^k\right)} \frac{d\tau_{k+1}}{\left|\overline{Q}_{k+1}^n\left(\tau^{k+1}\right) Q_k^n\left(\tau^k\right)\right|} \le \overline{D}, \qquad \int_{\alpha_{k+1}\left(\tau^k\right)}^{\beta_{k+1}\left(\tau^k\right)} \frac{d\tau_{k+1}}{\left|Q_{k+1}^n\left(\tau^{k+1}\right) \overline{Q}_k^n\left(\tau^k\right)\right|} \le D; \tag{50}$$

$$\int_{\alpha_{k+1}\left(\tau^k\right)}^{\beta_{k+1}\left(\tau^k\right)} \frac{\left|\overline{a}_{k+1}\left(\tau^{k+1}\right)\right| d\tau_{k+1}}{\left|\overline{Q}_k^n\left(\tau^k\right) \overline{Q}_{k+1}^n\left(\tau^{k+1}\right)\right|} \le \overline{\rho}, \qquad \int_{\alpha_{k+1}\left(\tau^k\right)}^{\beta_{k+1}\left(\tau^k\right)} \frac{\left|a_{k+1}\left(\tau^{k+1}\right)\right| d\tau_{k+1}}{\left|Q_k^n\left(\tau^k\right) Q_{k+1}^n\left(\tau^{k+1}\right)\right|} \le \rho. \tag{51}$$

Тоді для похибки обчислення (збурення) підхідного дробу n-го порядку ІЛД (44) має місце така оцінка

$$\left|\Delta f_n - \Delta b_0\right| < M_1 \Delta_{1,1}^{(1)} + \frac{M}{1-\rho\overline{\rho}}\left(\left(\overline{D}\rho + D\right)\Delta_{2,n}^{(1)} + \left(H\overline{\rho} + \overline{H}\right)\Delta_{1,n}^{(2)}\right), \tag{52}$$

де $\Delta_{m,n}^{(1)}$, $\Delta_{m,n}^{(2)}$ - додатні (невід'ємні) сталі, такі, що при $\tau^k \in G_k$ $(m \le k \le n)$

$$\left|\Delta a_k\left(\tau^k\right)\right| \le \Delta_{m,n}^{(1)}, \qquad \left|\Delta b_k\left(\tau^k\right)\right| \le \Delta_{m,n}^{(2)}, \tag{53}$$

і ІЛД (44) є стійким.

У § 2.2 розглянуто умови обчислювальної стійкості інтегральних ланцюгових дробів з дійсними компонентами, що задовольняють умови теореми 1.2.1. Отримано двосторонні оцінки похибки обчислення (збурення) для ІЛД з додатними компонентами у припущенні, що похибки обчислення (збурення) компонент є знакосталими для всіх ланок інтегрального ланцюгового дробу.

§ 2.3 присвячено дослідженню обчислювальної стійкості (стійкості до збурень) інтегральних ланцюгових дробів з комплексними компонентами, достатні ознаки збіжності яких доведено у §§ 1.3 - 1.4. Встановлено також оцінку збурення значень підхідних дробів періодичного ІЛД вигляду (40).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі для інтегральних ланцюгових дробів зі змінними межами інтегрування встановлені ознаки збіжності інтегральних ланцюгових дробів з дійсними компонентами; використовуючи метод мажорант, встановлено найбільш загальний континуальний аналог теореми Слешинського-Прінгсгейма про абсолютну збіжність неперервних дробів; встановлені формули для дійсної і уявної частини залишків інтегральних ланцюгових дробів з комплексними частинними знаменниками або з комплексними частинними чисельниками, на базі цих формул отримано оцінки для модулів залишків інтегральних ланцюгових дробів, їх дійсних та уявних частин, що дає можливість знайти області значень інтегральних ланцюгових дробів; використовуючи метод фундаментальних нерівностей, встановлені достатні ознаки збіжності інтегральних ланцюгових дробів з комплексними компонентами, наведено оцінки їх швидкості збіжності; досліджено питання збіжності важливого для застосувань класу періодичних інтегральних ланцюгових дробів зі змінними верхніми межами інтегрування; отримано формули, що встановлюють зв'язок між похибкою обчислення (збуренням) скінченного інтегрального ланцюгового дробу і похибками обчислення (збуреннями) його компонент; досліджено властивість обчислювальної стійкості (стійкості до збурень) різних класів інтегральних ланцюгових дробів з дійсними та комплексними компонентами.

Дисертація містить нові обгрунтовані теоретичні результати, які є вагомим внеском в аналітичну теорію інтегральних ланцюгових дробів і можуть бути використані для її подальшого розвитку.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах

1. *Одноволова Т.Н.* Оценка погрешности вычисления одного класса интегральных цепных дробей // Вестн. Львов. политехн. ин-та. - 1984.- № 182.- С. 96 - 98.
2. *Одноволова Т.Н.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1984. - № 7.- С. 19 - 22.
3. *Одноволова Т.Н.* О сходимости одного класса интегральных цепных дробей // Вестн. Львов. политехн. ин-та. - 1985. - № 192. - С. 86 - 88.
4. *Антонова Т.М.* Про збіжність та обчислювальну стійкість одного класу інтегральних ланцюгових дробів з комплексними компонентами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. - 1990. - № 242. - С. 4 - 6.
5. *Антонова Т.М.* Про збіжність до функції її формального розкладу

в інтегральний ланцюговий дріб // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. - 1992. - № 261. - С. 10 - 14.
6. *Антонова Т.М.* Розв'язування диференціальних рівнянь Абеля за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. - 1993. - № 269. - С. 8 -11.
7. *Антонова Т.М.* Один багатовимірний аналог теореми про рівномірну просту параболічну область збіжності ланцюгових дробів // Волинський математичний вісник. - Вип.2 - Рівне, 1995. - С. 6-8.
8. *Антонова Т.Н., Сявавко М.С.* О сходимости интегральных цепных дробей с компонентами, удовлетворяющими условиям типа Прингсгейма // Тез. докл. YIII Республиканской конференции "Нелинейные задачи математической физики и задачи со свободной границей" (3 - 8 сентября 1991 г.). - Донецк, 1991. - С. 11.

Antonova T.N. Sufficient criteria of convergence and stability of integral continued fractions.

Thesis for the Candidate's Degree (Physics and Mathematics), speciality 01.01.01 - mathematical analysis. Lviv State University, Lviv, 1996.

8 scientific papers containing theoretical studies in the analytic theory of integral continued fractions are defended. The effective sufficient convergence criteria of integral continued fractions with real and complex elements are established, truncation error estimates for such fractions are obtained. Classes of stable integral continued fractions are finded.

Антонова Т.Н. Достаточные признаки сходимости и устойчивости интегральных цепных дробей.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - математический анализ. Львовский государственный университет. Львов, 1996.

Защищается 8 научных работ, которые содержат теоретические исследования в области аналитической теории интегральных цепных дробей. Установлены эффективные достаточных условия сходимости интегральных цепных дробей с действительными и комплексными компонентами, выделены классы интегральных цепных дробей, устойчивых к возмущениям.

Ключові слова: інтегральний ланцюговий дріб, підхідний дріб, мажоранта, фундаментальні нерівності, залишки, збіжність, похибка апроксимації, стійкість до збурень.

ПIдписано до друку 18.07.96. Формат 60x84/16. ПапIр друк.№I.
Друк офсетн. Умовн.друк.арк.I,5. Умовн.фарб.вIдб.I,5.
Обл.-вид.арк.I,7. Тираж 100. Замовлення I82.

Машинно-офсетна лабораторIя ЛьвIвського держунIверситету
Iм. I.Франка. 290602 ЛьвIв, вул. УнIверситетська,I.