Міністерство освіти України
Львівський державний університет ім. Ів.Франка

*На правах рукопису*

ХОМА НАДІЯ ГРИГОРІВНА

# АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ВІДШУКАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

01.01.02 — диференціальні рівняння

**АВТОРЕФЕРАТ**
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Тернопільського державного педагогічного інституту.

Науковий керівник — кандидат фізико-математичних наук,
доцент Гром'як М.І.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Пташник Б.Й.,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кирилич В.М.

Провідна установа — Інститут математики НАН України, м.Київ.

Захист відбудеться "17" жовтня 1996 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті ім. Ів.Франка (290001, м. Львів, вул. Університетська, 1).

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського держуніверситету (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розіслано "3" вересня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради — Микитюк Я.В.

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** В теорії звичайних диференціальних рівнянь розроблено ряд аналітичних методів відшукання періодичних розв'язків як лінійних, так і нелінійних диференціальних рівнянь.

Щодо рівнянь з частинними похідними, особливо рівнянь другого порядку гіперболічного типу, то можна стверджувати, що аналітичні методи відшукання періодичних розв'язків почали тільки недавно розроблятися. До 80-х років здебільшого доведення існування періодичних розв'язків гіперболічних рівнянь другого порядку проводилося за допомогою рядів Фур'є, причому період $T$ і крайова умова підбиралися так, щоб можна було досягти бажаного результату.

Першою серед робіт в цьому напрямку була робота Н.А.Артем'єва [Артемьев Н.А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1937. – №1. – С. 15–50], в якій в області $\{0 \le x, t \le 1\}$ розглядалася задача

$$\begin{gathered} z_{tt} - a^2 z_{xx} = \Phi(x,t) + \varepsilon f(z), \\ z(0,t) = z(1,t) = 0, \quad z(x,0) = z(x,1), \quad z_t(x,0) = z_t(x,1). \end{gathered} \tag{1}$$

Доведено, що коли $a=(2m+1)/p$ ($m$, $p$ — цілі числа, $p\neq 0$), то при відповідних обмеженнях на функції $\Phi(x, t)$ і $f(z)$ при достатньо малому $\varepsilon$ існує єдиний класичний розв'язок задачі (1) в класі функцій, які зображаються за допомогою ряду

$$z(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_{2k+1}(t) \sin(2k+1)\pi x. \tag{2}$$

Аналізуючи стан розвитку теорії нелінійних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, можна стверджувати, що комплекс питань, пов'язаних з проблемою дослідження розв'язків цих задач, ще недостатньо вивчений. В ряді робіт з диференціальних рівнянь гіперболічного типу, які появилися останнім часом, вивчається одномірне гіперболічне рівняння, лінійна частина якого — оператор Даламбера, а нелінійність має вигляд $F[u](x, t, \varepsilon) = f(x, t, u, u_t, u_x, \varepsilon)$, де $\varepsilon$ — малий параметр. При цьому для встановлення теорем існування використовуються методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи, а також теорія монотонних операторів.

Широка бібліографія по періодичних розв'язках диференціальних і диференціально-операторних рівнянь наведена в роботах О.Вейводи [Vejvoda O., Hartman L., Lovikarova H. et all. Partial differential equations: Time periodic solutions. – In: Alphen aan. den Rijn. Sijthoff: Noordhoff. 1981. –

358+XIII р.] і Б.Й.Пташника [Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.]. Серед робіт, які не включені в дану бібліографію, треба відмітити роботи сучасних математиків Митропольського Ю.О., Рудакова М.І., Хоми Г.П., в яких розглядається лінійна крайова періодична задача

$$\begin{gathered} u_{tt} - a^2 u_{xx} = g(x, t), \qquad (x, t) \in \mathbf{I} \times \mathbf{R}, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{I} \times \mathbf{R}, \end{gathered} \tag{3}$$

на конкретно визначених просторах функцій, тісно пов'язаних з множиною **I**, періодом $T$ і параметром $a$.

Зауважимо, що лише при певному виборі періоду $T$=1 і відповідних крайових умовах при $x$=0 і $x$=1 Артем'єву вдалося довести вище згаданий результат. Такий підхід при доведенні існування періодичних розв'язків рівнянь з частинними похідними використовувався багатьма математиками (В.Н.Карп (1960, 1963); А.П.Митряков (1948, 1949); Г.Т.Соколов (1953); М.В.Соловйов (1939)), причому результати одержувалися кожен раз в спеціально виділених просторах функцій.

В 1984 році чеськими математиками О.Вейводою і М.Штедри в роботі [Вейвода О., Штедры М. Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений// Дифференц. уравнения. –1984. – 20, №10. – С. 1733–1739.] вдалося класифікувати нижче вказані простори функцій при умові, що останні належать C і $G_t$, де C — клас функцій двох змінних $x$ і $t$, неперервних і обмежених на $\mathbf{R}^2$; $G_t$ — клас функцій двох змінних $x$ і $t$, неперервних і обмежених на $\mathbf{R}^2$ разом з похідною по $t$. Коротко зупинимося на основних результатах вказаної роботи. По-перше, виділено такі три періоди і три простори функцій для випадку $a$=1: 1) $w_1 = 2\pi p/q$, $p$ – непарне, $q$ – парне, $(p, q) = 1$, $A_1 = \{u: u(x, t) = u(x, t+w_1) = u(\pi - x, t)\}$; 2) $w_2 = 2\pi p/q$, $p$ –парне, $q$ – непарне, $(p, q) = 1$, $A_2 = \{u: u(x, t) = -u(x, t+w_2/2)\}$; 3) $w_3 = 2\pi p/q$, $p$ і $q$ – непарні, $(p, q) = 1$, $A_3 = \{u: u(x, t) = u(\pi - x, t+w_3/2) = u(x, t+w_3)\}$.

По-друге, доведено, що однорідна крайова періодична задача

$$\begin{gathered} u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0\,, \quad u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \\ u^0(x, t+w_i) = u^0(x, t), \quad 0 \le x \le \pi, t \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{4}$$

має лише тривіальний розв'язок $u^0(x, t) \equiv 0$, а, отже, відповідна неоднорідна задача (3) при $g(x, t) \in A_i$, $i = 1, 2, 3$, має єдиний розв'язок

$u(x, t) \in A_i$, $i = 1,2,3$.

По-третє, проведена класифікація робіт за вказаними просторами $A_i$, $i$=1,2,3, тобто названо праці, результати яких одержано в просторі $A_1$, $A_2$, і зауважено, що простір $A_3$ розглянуто у роботі вперше.

По-четверте, розв'язки задачі (3) шукаються за допомогою простої модифікації формули Даламбера, яка дозволяє уникнути виразів, в яких потрібно сумувати нескінченні ряди. Перевагою розробленого аналітичного методу, який використовується в просторі неперервно диференційованих функцій, крім надзвичайної простоти, є і відсутність умови на значення функцій, які стоять в правій частині рівняння $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_t, u_x, \varepsilon)$, в межових точках інтервалу $[0, \pi]$.

Потрібно зауважити, що в анотованій вище роботі О.Вейводи і М.Штедри не вивчається проблема виникнення просторів $A_i$, $i = 1, 2, 3$, і не точно побудована формула розв'язку задачі (3) в просторі $A_3$. Тому, природньо, постають питання: чи існують інші простори функцій, в яких може бути розв'язана задача (3)? Який вигляд має розв'язок в таких просторах?

Вирішенню цих питань, а також відшуканню аналітичних розв'язків лінійної задачі (3) і вивченню на основі їх властивостей нелінійних крайових періодичних задач і присвячена дисертаційна робота.

**Мета роботи**. Встановити умови існування розв'язків крайових періодичних задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку та встановити простори функцій, в яких вказані задачі сумісні. Знайти аналітичні розв'язки лінійної крайової періодичної задачі.

**Методи дослідження**. В дисертаційній роботі використовуються методи загальної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними, теорії інтегральних рівнянь і функціонального аналізу.

**Наукова новизна.**

– Встановлено функціональні умови розв'язності лінійної крайової періодичної задачі.

– Визначено конкретні простори функцій, в яких існують класичні розв'язки лінійної крайової періодичної задачі.

– Знайдено для кожного визначеного простору обернений оператор, який породжує розв'язок лінійної крайової періодичної задачі.

– Доведено теорему існування і єдиності класичного розв'язку лінійної крайової періодичної задачі для конкретних просторів функцій.

– Отримано умови існування гладкого розв'язку нелінійної крайової періодичної задачі.

**Теоретична і практична цінність.** Результати дисертації є вагомим внеском в теорію крайових періодичних задач для квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку. Знайдені алгоритми можуть бути використані для вивчення конкретних задач практики.

**Апробація роботи**. Результати роботи доповідалися на Міжнародній науковій конференції “Нелінійні крайові задачі математичної фізики і їх застосування” (м.Тернопіль, 1994р.); на Міжнародній науковій конференції, присвяченій 150-річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка Івана Пулюя (м.Тернопіль, 1995р.); на Третій і Четвертій міжнародній науковій конференції ім. академіка М.Кравчука (м.Київ, 1994, 1995р.); на Всеукраїнській науковій конференції “Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях”, присвяченій 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (м.Львів, 1995р.); на семінарі відділу теорії нелінійних коливань і математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник — академік Ю.О.Митропольський); на семінарі відділу теорії рівнянь з частинними похідними Інституту математики НАН України (керівник — доктор фізико-математичних наук, професор М.Л.Горбачук); на Львівському міському семінарі з теорії диференціальних рівнянь (керівники Б.Й.Пташник, В.Я.Скоробагатько, С.П.Лавренюк, 1996р.).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1–11], список яких подано в кінці автореферату.

**Особистий внесок дисертанта.** Основні результати дисертації отримані автором самостійно, теорема 11.2.1 — у співавторстві з Ю.О.Митропольським, а теорема 111.5.2 — у співавторстві з Л.Г.Хомою.

**Основні положення дисертації, що виносяться на захист:**

– Знаходження обернених операторів і вивчення їх властивостей.

– Доведення теореми існування і єдиності класичного розв'язку лінійної крайової періодичної задачі в конкретних просторах функцій.

– Встановлення умов існування гладкого розв'язку нелінійної крайової періодичної задачі.

**Структура і об'єм роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох глав, висновку і списку літератури, викладених на 119 сторінках машинописного тексту. Список літератури містить 122 найменування.

## ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** зроблено короткий огляд літератури по темі дисертації, викладено основні результати роботи.

У **першій** главі досліджується існування та єдиність розв'язків крайової періодичої задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \tag{5}$$

Розглядаються такі простори функцій:

C – простір функцій двох змінних $x$ і $t$, неперервних і обмежених на $\mathbf{R}^2$;

$G_x$ – простір функцій двох змінних $x$ і $t$, неперервних і обмежених на $\mathbf{R}^2$ разом із похідною по $x$;

$Q_{2\pi}$ – простір $2\pi$-періодичних по $x$ на $\mathbf{R}^2$ функцій;

$Q_{2\pi}^-$ – простір непарних по $x$ і $2\pi$-періодичних по $x$ на $\mathbf{R}^2$ функцій;

$Q_T$ – простір $T$-періодичних по $t$ на $\mathbf{R}^2$ функцій;

$H_{ab}$ – простір функцій $f \in$C, які задовольняють на $\mathbf{R}^2$ умови

$$\begin{cases} r(x, ay, b+\tau) = -r(x, ay, \tau), \\ \int\limits_{-T}^{0} d\tau \int\limits_{0}^{b} r(x, a(\tau + w), b+\tau)\,dw = 0, \end{cases}$$

де $b$ — дійсне число, відмінне від нуля, а

$$r(x, ay, \tau) = \frac{1}{4}\{f(x + a(y-\tau), \tau) + f(x - a(y-\tau), \tau)\};$$

$C^{i,j}$ – простір функцій $i$ раз диференційованих по $x$ і $j$ раз диференційованих по $t$ (якщо $i = j$, то $C^{i,j}(\mathbf{R}^2) = C^i(\mathbf{R}^2)$);

$Q^\Phi$ – простір функцій двох змінних $x$ і $t$, які розкладаються в рівномірно збіжні ряди виду

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx.$$

На основі видозміни розв'язку

$$(P_0 f)(x,t,a) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} d\tau \int\limits_{\tau}^{t} \{f(x + a(y-\tau), \tau) + f(x - a(y-\tau), \tau)\}\,dy$$

мішаної задачі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \tilde{f}(x,t), \qquad 0 < x < \pi,$$
$$u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le T,$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad 0 \le t \le T,$$

де $f(x, t)$ — непарне $2\pi$-періодичне продовження функції $\tilde{f}$ по змінній $x$ з відрізка $[0, \pi]$ на всю числову вісь, в **§2** побудовано оператор

$$(Pf)(x,t,a,b)=\int_0^t d\tau\int_\tau^t r(x,ay,\tau)dy-\int_t^b d\tau\int_\tau^t r(x,ay,\tau)dy,$$

за допомогою якого встановлюються умови існування розв'язку крайової періодичної задачі (5).

Доведено таке твердження:

**Теорема I.2.4.** Для $f\in G_x\cap Q_T\cap Q^-_{2\pi}\cap H_{ab}$ функція $u=Pf$ є функцією з простору $C^2(\mathbf{R}^2)$, яка задовольняє умови (5).

В **§3** на основі першої залежності, що визначає простір $H_{ab}$, виведено функціональне рівняння

$$f(ab-z,\ b+t)=f(z,t),\quad \forall\,(z,t)\in\mathbf{R}^2, \tag{6}$$

при допомозі якого визначено такі три періоди і три простори функцій:

$$T_1=\frac{(2p-1)\pi}{aq},\quad (2p-1,aq)=1,\quad b_1=T_1q,$$

$$B_a^1=\{f(x,t)\colon f(x,t)=-f(-x,t)=f(x,t+T_1)=f(\pi-x,t)\};$$

$$T_2=\frac{2\pi(2p-1)}{aq},\ a\neq 2\alpha,\ q=2s-1,\ (2p-1,aq)=1,\ b_2=T_2q/2,$$

$$B_a^2=\{f(x,t)\colon f(x,t)=f(\pi-x,t+T_2/2)=-f(-x,t)=f(x,t+T_2)=$$
$$=f(x+2\pi,t)\};$$

$$T_3=\frac{4\pi k}{aq},\quad q=2s-1,\quad a\neq 2\alpha,\quad (k,aq)=1,\quad b_3=T_3q/2,$$

$$B_a^3=\{f(x,t)\colon f(x,t)=-f(-x,t)=f(x+2\pi,t)=-f(x,t+T_3/2)\}.$$

Детально вивчено такі властивості простору $B_a^1$:

**Лема I.3.1.** Якщо $f\in B_a^1\cap C$, то $f\in Q_{2\pi}\cap C$.

**Лема I.3.2.** Якщо для функції $f\in C\cap B_a^1$ справедливий розклад в ряд Фур'є

$$f(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin kx,$$

то $f_{2n}(t)=0$ для всіх $n=1,2,3,\ldots$, тобто в цьому випадку ряд має вигляд

$$f(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}f_{2s-1}(t)\sin(2s-1)x.$$

**Основна лема I.3.3.** Якщо $f\in C\cap B_a^1$, то $f\in H_{ab}\cap C$.

**Теорема I.3.2.** Для $f \in G_x \cap B_a^1$ функція

$$u(x,t) = (P_1^a f)(x,t,a,b_1) \equiv \int_0^{b_1} Q(\tau)d\tau \int_\tau^t r(x,ay,\tau)dy,$$

де

$$Q(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \le \tau \le t, \\ -1, & t < \tau \le b_1, \quad b_1 = T_1 q, \quad T_1 = \dfrac{(2p-1)\pi}{aq}, \end{cases} \tag{7}$$

є функцією з простору $C^2 \cap B_a^1$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5), причому

$$\|u(x,t)\|_C \le \frac{(T_1 q)^2}{4} \|f(x,t)\|_C,$$

$$\|u_t(x,t)\|_C \le \frac{T_1 q}{2} \|f(x,t)\|_C, \quad \|u_x(x,t)\|_C \le \frac{T_1 q}{2|a|} \|f(x,t)\|_C,$$

де $a \ne 0$ і $\|f(x,t)\|_C = \sup\{|f(x,t)|;\ (x,t) \in \mathbf{R}^2\}$.

В §3 також показано, що функції $f \in B_a^1 \cap C$ задовольняють обидві умови простору $H_{ab}$, а функції $f \in B_a^s \cap C$, $s = 2, 3$, — лише першу. Однак існує клас функцій $f \in B_a^s \cap C$, $s = 2, 3$, які задовольняють другу умову простору $H_{ab}$.

**Лема I.3.5.** Якщо $f \in B_a^s \cap C$, $s = 2, 3$, розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є виду

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx$$

для всіх $t \in [0, T_s]$, $s = 2, 3$, то $f \in H_{ab_s} \cap C$, $s = 2,3$.

**Теорема I.3.3.** Для $f \in G_x \cap B_a^s \cap Q^\Phi$ функція

$$u = (P_s^a f)(x,t,a,b_s) = \frac{1}{4} \int_0^{b_s} Q(\tau)d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi, \tag{8}$$
$$b_s = T_s q / 2, \quad s = 2, 3,$$

є функцією із простору $C^2$, яка задовольняє крайову періодичну задачу (5).

Доведено, що тільки оператор $P_1^a$ відображає простір функцій $B_a^1$ сам в себе (теорема I.3.2); побудовані оператори $P_s^a$, $s = 2, 3$, не відображають вказані простори $B_a^s$, $s = 2, 3$, самих в себе, але при додаткових умовах (теорема I.3.3) дають розв'язок крайової періодичної задачі (5), причому лема I.3.5 вказує достатню умову, при якій шукана функція $u(x, t) = (P_s^a f)(x, t) \in C^2 \cap B_a^s$, $s = 2, 3$.

В даному параграфі зауважено, що теорема I.3.2 є узагальненням відповідної теореми, яка була вперше сформульована в роботі Н.А.Артем'єва в 1937 році при $T_1 = \pi$ і $a = (2p-1)/q$, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, причому шукана функція зображалася у вигляді ряду Фур'є, вказаного в лемі I.3.2.

В **§4** доведено, що однорідна крайова періодична задача

$$u_{tt}^0 - a^2 u_{xx}^0 = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0, \quad u^0(x, t+T) = u^0(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$

в побудованих просторах функцій $B_a^i$, $i = 1, 2, 3$, для $a \in \mathbf{Q}$ має лише тривіальний розв'язок, на основі чого в **§5** сформульовано наступні теореми існування і єдиності розв'язку неоднорідної задачі.

**Теорема I.5.1.** Для $f \in G_x \cap B_a^1$, $a \in \mathbf{Q}$, функція $u = P_1^a f$, визначена формулою (7), є єдиною функцією із простору $C^2 \cap B_a^1$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5).

**Теорема I.5.2.** Для $f \in G_x \cap B_a^i \cap Q^\Phi$, $a \in \mathbf{Q}$, функція $u = P_i^a f$, $i=2, 3$, визначена формулою (8), є єдиною функцією із простору $C^2$, яка задовольняє умови крайової періодичної задачі (5).

За допомогою побудованого в першій главі оператора $P$ для розв'язності лінійної задачі (5) та оцінок розв'язку цієї задачі в другій главі одержано результати і для нелінійної крайової періодичної задачі.

**Друга** глава присвячена двом частковим випадкам, а саме, розглядаються рівняння виду $u_{tt} - a^2 u_{xx} = F[u, u_t]$ і $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x]$, де $F$ — оператор, який кожну гладку функцію $u(x, t)$ переводить в скалярну неперервну функцію $F[u](x, t) = f(x, t, u(x, t))$ в просторі $B_a^1$.

На основі принципу стиснених відображень і його узагальнення доведено такі дві теореми існування і єдиності розв'язку вище вказаних задач.

**Теорема II.2.1.** Нехай скалярна функція $F[u, u_t](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t))$ задовольняє такі умови:

1) $f(x, t, u(x, t), u_t(x, t)) \in C(\mathbf{R}^2 \times \|u\|_C < \infty \times \|u_t\|_C < \infty)$;

2) $0 < \|F[0,0](x,t)\|_C = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'', u_t''](x,t) - F[u', u_t'](x,t)| \le N_1 |u''(x,t) - u'(x,t)| + N_2 |u_t''(x,t) - u_t'(x,t)|$;

4) $F[0,0](x, t) \in B_a^1$, $a \in \mathbf{Q}$; 5) для всіх $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbf{R}^2)$

$$F[u, u_t](x, t) \in B_a^1 \cap C(\mathbf{R}^2).$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} N_2 < \frac{1}{2}$$

задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F[u, u_t], \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \tag{9}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \tag{10}$$

має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbf{R}^2)$.

**Теорема II.3.2.** Нехай скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$ задовольняє такі умови:

1) $f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \in C(\mathbf{R}^2 \times \|u\|_C < \infty \times \|u_t\|_C < \infty \times \|u_x\|_C < \infty)$;

2) $0 < \|F[0,0,0](x,t)\|_C = \Gamma < \infty$;

3) $|F[u'', u_t'', u_x''](x,t) - F[u', u_t', u_x'](x,t)| \le N_1 |u''(x,t) - u'(x,t)| +$
$+ N_2 |u_t''(x,t) - u_t'(x,t)| + N_3 |u_x''(x,t) - u_x'(x,t)|$;

4) $F[0,0,0](x, t) \in B_a^1$, $a \in \mathbf{Q}$; 5) для всіх $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbf{R}^2)$

$$F[u, u_t, u_x](x, t) \in B_a^1 \cap C(\mathbf{R}^2).$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{(T_1 q)^2}{4} N_1 + \frac{T_1 q}{2} (N_2 + N_3) < 1$$

задача

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \tag{11}$$

має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbf{R}^2)$.

Одержані теореми включають в себе результати для різних часткових випадків, а саме в **§4** наведено такі два випадки:

**Теорема II.4.1.** Нехай $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t) + \varepsilon f_1(u)$ і $f(x, t)$ і $f_1(u)$ задовольняють умови:

1) $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap B_a^1$, $a \in \mathbf{Q}$; 2) $0 < \|f(x,t)\|_C = \Gamma_2 < \infty$; 3) $f_1(0) = 0$;

4) $f_1(u) \in Lip\ (N_1, \mathbf{R})$, $N_1 = \text{const}$; 5) $f_1(-u) = -f_1(u)$.

Тоді при достатньо малому за модулем $\varepsilon$ нелінійна задача

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon f_1(u), \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \\ &u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \end{aligned} \tag{12}$$

при $a \in \mathbf{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbf{R}^2)$.

**Теорема II.4.2.** Нехай виконуються такі умови:

1) $f(x, t) \in C(\mathbf{R}^2) \cap B_a^1$, $a \in \mathbf{Q}$; 2) $0 < \|f(x,t)\|_C = \Gamma_3 < \infty$; 3) $f_2(0) = 0$;

4) $f_2(u_t) \in Lip\ (N_2, \mathbf{R})$, $N_2 = \text{const}$; 5) $f_2(-u_t) = -f_2(u_t)$.

Тоді при достатньо малому за модулем $\varepsilon$ нелінійна задача

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) + \varepsilon f_2(u_t), \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \\ &u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2, \end{aligned} \tag{13}$$

при $a \in \mathbf{Q}$ має єдиний гладкий розв'язок $u(x, t) \in B_a^1 \cap C^1(\mathbf{R}^2)$.

Розглянуто приклади рівнянь, які задовольняють умови теореми II.4.1 або умови теореми II.4.2.

Як підсумок зробленого, в **третій** главі на основі операторів Вейводи-Штедри досліджуються умови існування і єдиності розв'язку ряду крайових періодичних задач.

Розглядаються такі простори функцій:

$C_\pi$ – простір функцій двох змінних $x$ і $t$, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$;

$G_{\pi t}$ – простір функцій двох змінних $x$ і $t$, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ разом з похідною по $t$;

$Q_{\pi T}$ – простір функцій $g(x, t)$, які задовольняють на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$ співвідношення $g(x, t+T) = g(x, t)$.

В §§ 2–4 визначено простори функцій, в яких сумісні крайові періодичні задачі виду

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t, u_x], \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R}, \tag{14}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t). \tag{15}$$

Зокрема, в **§2** розглядаються оператори $S_1$ і $S_2$, що визначаються формулами

$$(S_1 g)(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau\,, \tag{16}$$

$$\left(S_2 g\right)(x,t) = -\frac{1}{2}\int_x^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \qquad (17)$$

і доводяться їх властивості.

**Лема III.2.1.** Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap Q_{\pi T}$, то кожна з функцій $u^1 = S_1 g$ і $u^2 = S_2 g$ є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння $u^i_{tt} - u^i_{xx} = g(x,t)$, $i = 1, 2$, причому $u^i(x, t) \in Q_{\pi T}$, $i = 1, 2$.

Також розглядається оператор

$$(Sg)(x,t) = \frac{1}{2}\left(\left(S_1 g\right)(x,t) + \left(S_2 g\right)(x,t)\right), \qquad (18)$$

що володіє нижче вказаними властивостями.

**Лема III.2.2.** Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap Q_{\pi T}$, то функція $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є розв'язком такої задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad u(x, t+T) = u(x, t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$

причому

$$\left(Sg\right)(0,t) = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau, \qquad (19)$$

$$\left(Sg\right)(\pi,t) = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau. \qquad (20)$$

Крім того, зауважено, що при виконанні умови $g(\pi - x, t) = g(x, t)$ праві частини рівностей (19) і (20) рівні між собою.

Якщо тепер розглядати простір функцій

$$A_1^T = \{u: u(x,t) = u(\pi - x, t) = u(x, t+T)\},$$

визначених на $[0, \pi] \times \mathbf{R}$, то на основі формул (16)–(18) і леми III.2.2 справедливі наступні твердження.

**Лема III.2.3.** Оператор $S$ володіє такими властивостями:

$$S \in L\left(C_\pi \cap A_1^T,\ C_\pi^1 \cap A_1^T\right), \qquad S \in L\left(G_{\pi t} \cap A_1^T,\ C_\pi^2 \cap A_1^T\right).$$

**Лема III.2.4.** Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^T$, то функція $u(x, t) = (Sg)(x, t)$ є класичним розв'язком такої крайової задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \qquad u(0, t) = u(\pi, t),$$
$$u(x, t+T) = u(x, t), \qquad 0 \le x \le \pi, \ t \in \mathbf{R}.$$

На основі одержаних в **§2** результатів у **§§ 3** і **4** досліджуються лінійні крайові $\pi$ і $2\pi$–періодичні задачі.

Зокрема, в **§3** дано відповідь на питання про розв'язність лінійної крайової $\pi$–періодичної задачі виду:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+T) = u(x, t), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbf{R}. \qquad (21)$$

Справедливе наступне твердження.

**Теорема III.3.1.** Якщо $g(x, t) \in G_{\pi t} \cap A_1^w = \{g\colon g(x, t) = g(\pi - x, t) = g(x, t+w),\ w = \pi/q,\ q \in \mathbf{N}\}$, то функція

$$u(x,t) = \left(R_1^w g\right)(x,t) \equiv (Sg)(x,t) + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau$$

є єдиною функцією із простору $C_\pi^2 \cap A_1^w$, яка задовольняє умови (21), причому

$$\|u(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi},$$

$$\|u_t(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}, \qquad \|u_x(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi},$$

де $\|g(x,t)\|_{C_\pi} = \sup\{|g(x,t)|;\ \ 0 \le x \le \pi,\ \ t \in R\}$.

В **§4** досліджується така $2\pi$–періодична задача:

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0,\pi] \times \mathbf{R}. \quad (22)$$

Показано, що в конкретно визначеному просторі $A_2^{2\pi} = \{u\colon u(x, t) = u(\pi - x, t+\pi) = u(x, t+2\pi)\}$ функція виду

$$u(x,t) = \left(R_2^{2\pi} g\right)(x,t) \equiv (Sg)(x,t) + \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi,\tau)d\tau +$$
$$+ \frac{x}{4\pi}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)d\tau$$

при $g \in G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}$ є класичним розв'язком задачі (22), причому справедливі наступні твердження.

**Лема III.4.1.** Оператор $R_2^{2\pi}$ володіє такими властивостями:

$$R_2^{2\pi} \in L\left(C_\pi \cap A_2^{2\pi},\ C_\pi^1 \cap A_2^{2\pi}\right),\ R_2^{2\pi} \in L\left(G_{\pi t} \cap A_2^{2\pi},\ C_\pi^2 \cap A_2^{2\pi}\right).$$

**Теорема III.4.1.** Якщо $g(x, t) \in \mathrm{G}_{\pi t} \cap A_2^{2\pi}$, то функція $u(x, t) = \left(R_2^{2\pi} g\right)(x, t)$ є єдиною функцією із простору $C_\pi^2 \cap A_2^{2\pi}$, яка задовольняє умови (22), причому

$$\|u(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{3}{4}\pi^2 \|g(x,t)\|_{C_\pi};$$

$$\|u_t(x,t)\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|g(x,t)\|_{C_\pi}; \quad \|u_x(x,t)\|_{C_\pi} \le \pi\|g(x,t)\|_{C_\pi}.$$

У п'ятому і шостому параграфах досліджується існування гладкого $\left(u \in C_\pi^1\right)$ розв'язку нелінійних крайових $\pi$ і $2\pi$–періодичних задач. В §5 розглядається задача

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u, u_t, u_x), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + \pi/q) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbf{R},\ q \in \mathbf{N}; \quad (23)$$

а в §6 —

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u, u_t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbf{R},$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbf{R}, \quad (24)$$

де $F$ — оператор, який кожну гладку функцію $u \in C_\pi^1 \cap A_i^{T_i}$ ($i=1$, $T_1=\pi$; $i=2$, $T_2=2\pi$) переводить в скалярну неперервну функцію $F[u](x,t) \in C_\pi \cap A_i^{T_i}$.

На основі принципу стиснених відображень і його узагальнення доведено теореми існування і єдиності розв'язку вище вказаних задач.

**Теорема III.5.2.** Нехай скалярна функція $F[u, u_t, u_x](x, t) = f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t))$ задовольняє такі умови:

1) $f(x, t, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) \in C([0, \pi] \times \mathbf{R} \times \|u\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_t\|_{C_\pi} < \infty \times \|u_x\|_{C_\pi} < \infty)$; 2) $0 < \|F[0,0,0](x,t)\|_{C_\pi} = \Gamma < \infty$;

3) $\left|F[u'', u_t'', u_x''](x,t) - F[u', u_t', u_x'](x,t)\right| \le N_1 \left|u''(x,t) - u'(x,t)\right| + N_2 \left|u_t''(x,t) - u_t'(x,t)\right| + N_3 \left|u_x''(x,t) - u_x'(x,t)\right|$;

4) $F[0,0,0](x, t) \in A_1^\pi$; 5) для всіх $u(x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1$

$$F[u, u_t, u_x](x, t) \in A_1^\pi \cap C_\pi.$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2} N_1 + \frac{\pi}{2}\left(N_2 + N_3\right) < \frac{1}{2} \quad (25)$$

задача (23) має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t) \in A_1^\pi \cap C_\pi^1$.

Зауважено, що при послабленні умови (25) доведення можна провести на основі узагальнення принципу стиснених відображень.

**Теорема III.5.3.** Нехай виконуються умови 1) – 5) теореми III.5.2. Тоді при виконанні умови

$$\frac{\pi^2}{2}N_1+\frac{\pi}{2}\left(N_2+N_3\right)<1$$

задача (23) має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t)\in A_1^{\pi}\cap C^1$ ([0, $\pi$] × **R**).

**Теорема III.6.1.** Нехай $g\in C_\pi\cap A_2^{2\pi}$. Тоді лінійна задача (22) має єдиний гладкий розв'язок $u=R_2^{2\pi}g\in A_2^{2\pi}\cap \mathbf{C}_\pi^{\ 1}$ для якого справедливі оцінки теореми III.4.1.

**Теорема III.6.2.** Нехай скалярна функція $F[u,u_t](x,t)=f(x,t,u(x,t),u_t(x,t))$ задовольняє такі умови:

1) $f(x,t,u(x,t),u_t(x,t))\in \mathrm{C}([0,\pi]\times\mathbf{R}\times\|u\|_{C_\pi}<\infty\times\|u_t\|_{C_\pi}<\infty)$;

2) $0<\|F[0,0](x,t)\|_{C_\pi}=\Gamma<\infty$;

3) $\left|F[u'',u_t''](x,t)-F[u',u_t'](x,t)\right|\le N_1\left|u''(x,t)-u'(x,t)\right|+N_2\left|u_t''(x,t)-u_t'(x,t)\right|$;

4) $F[0,0](x,t)\in A_2^{2\pi}$; 5) для всіх $u(x,t)\in A_2^{2\pi}\cap C_\pi^1$ ([0, $\pi$] × **R**)

$$F[u,u_t](x,t)\in A_2^{2\pi}\cap C_\pi.$$

Тоді при виконанні умови

$$\frac{3N_1\pi^2}{4}+\frac{N_2\pi}{2}<1$$

задача (24) має єдиний гладкий розв'язок $u(x,t)\in A_2^{2\pi}\cap C_\pi^1$.

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі досліджена лінійна та нелінійна крайова періодична задача для гіперболічного рівняння другого порядку. Встановлено теорему існування і єдиності класичного розв'язку лінійної крайової періодичної задачі. Виведено функціональне рівняння, при допомозі якого визначено конкретні простори функцій, в яких існує класичний розв'язок лінійної крайової періодичної задачі. Вивчено властивості обернених операторів. Знайдено аналітичні розв'язки лінійної крайової періодичної задачі. Отримано умови існування гладкого розв'язку нелінійної крайової періодичної задачі.

**Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:**

1. Хома Н.Г. Розв'язність однієї крайової задачі //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. –Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. – С.195–196.
2. Хома Н.Г. Про сумісність однієї крайової задачі //Третя міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 25–27 травня 1994р.): Тез.доп. –К.: Ін-т математики НАН України, 1994. –С.121.
3. Хома Н.Г. Існування гладкого розв'язку однієї крайової задачі //Укр. мат. журн. –1995. –**47**, №12. –С. 1717–1719.
4. Хома Н. Інтегральні зображення хвильових процесів //Міжнародна наукова конференція, присвячена 150–річчю від дня народження видатного українського фізика і електротехніка Івана Пулюя (Тернопіль, 24–28 травня 1995 р.): Тез. доп. –Тернопіль, 1995. –С.37–38.
5. Хома Н.Г. Простори розв'язків однієї крайової задачі //Доп. НАН України. –1996. –№1. –С.17–19.
6. Хома Н.Г., Петрівський Я.Б. Про періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь гіперболічного типу //Четверта міжнародна наукова конференція ім. Академіка М.Кравчука (Київ, 11–13 травня 1995 р.): Тез. доп. –К.: Ін-т математики НАН України, 1995. –С.241.
7. Митропольський Ю.О., Хома Н.Г. Періодичні розв'язки квазілінійних гіперболічних рівнянь другого порядку //Укр.мат. журн. -1995. –**47**, №10. –С.1370–1375.
8. Хома Л.Г., Хома Н.Г. Про властивість розв'язків однієї крайової задачі //Доп. НАН України. –1994. –№3. –С.38–40.
9. Хома Л.Г., Хома Н.Г., Петрівський Я.Б. Тривіальні розв'язки однорідної крайової періодичної задачі //Волинський математичний вісник. –1995, вип.2. –С.195–196.
10. Хома Лариса, Хома Надія. Розв'язність однієї крайової періодичної задачі для квазілійного гіперболічного рівняння другого порядку //Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях, присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (Львів, 5–7 жовтня 1995 р.): Тез. доп. –Львів, 1995. –С.60–61.
11. Хома Л.Г., Хома Н.Г.Узагальнені періодичні розв'язки квазілінійних рівнянь //Укр. мат. журн. –1996. –**48**, №3. –С.406–411.

Хома Н.Г. Аналитические методы изыскания периодических решений гиперболических уравнений второго порядка.

Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Львовский госсударственный университет им. Ив. Франко, Львов, 1996.

В диссертации определены конкретные пространства функций, в которых существует классическоє решение линейной краевой периодической задачи. Установлено теорему существования и единственности классического решения линейной краевой периодической задачи. Получены условия существования гладкого решения нелинейной краевой периодической задачи.

Khoma N.G. Analitical methods of investigation of periodical solutions of second order of hyperbolic equations.

Manuscript. The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.02. — differential equations. L'viv State University, L'viv, 1996.

Specific functional spaces in which boundary–value periodical problems classical solution exist are determined. Theorems of existense and uniqueness of linear boundary–value periodical problems solution are fixed. Conditions of existence of smooth solution of nonlinear boundary–value periodical problems are obtained.

Ключові слова: крайова періодична задача, гіперболічність, простори функцій, оператори.

Підписано до друку 23. 05. 96. Формат 60*84/16.
Папір друк. №1. Друк. офс. Умовн. друк. арк. 1,2.
Ум. фарб. відб. 1,2. Обл.–вид. арк. Тираж 100. Зам.5.

Редакційно–видавничий відділ
Тернопільський державний педагогічний інститут