

**Фізико-механічний інститут
Національної академії наук України**

На правах рукопису

БУНЬ Ростислав Адамович

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ
ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**

**Спеціальність: 05.13.02 – "математичне моделювання
в наукових дослідженнях"**

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Львів — 1996

ЛВ. 35, 657

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Фізико-механічному інституті НАН України.

Офіційні опоненти: чл.-кор. НАН України,
докт. фіз.-мат. наук, проф.
СКОПЕЦЬКИЙ Василь Васильович
докт. техн. наук, проф.
МАНДЗІЙ Богдан Андрійович
докт. техн. наук, проф.
СИНИЦЬКИЙ Лев Аронович

Провідна організація: Інститут електродинаміки
НАН України (м.Київ)

Захист відбудеться "18" _____ 10 _____ 1996 р. о 11 год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.01.02 при Фізико-
механічному інституті НАН України (290053, Львів, вул. Нау-
кова, 5).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотечі Фізико-механіч-
ного інституту НАН України (290053, Львів, вул. Наукова, 5).

Автореферат розісланий "17" _____ 09 _____ 1996 р.

В.о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради,
докт. техн. наук, доцент

Дікмарова Л.П.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00760007 (К)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Математичне моделювання широко використовується в різноманітних областях людської діяльності. Результати такого моделювання дають змогу передбачити розвиток процесу, розрахувати його характеристики, керувати цим процесом, проектувати системи з бажаними характеристиками тощо.

Особливу роль при цьому має математичне моделювання різноманітних динамічних систем, тобто систем, в яких величини, що характеризують стан, змінюються в часі. Моделями таких об'єктів на макрорівні є системи звичайних диференціальних рівнянь з заданими початковими умовами, в яких незалежною змінною є час. В основі таких моделей лежать компонентні рівняння окремих елементів та топологічні рівняння, від яких визначається фізичними чи іншими законами, що лежать в основі цих моделей, і які відображають зв'язки між окремими елементами.

Процедури побудови математичних моделей звичайно базуються на законах, що відносяться до конкретних наукових областей. Тому питання формування математичних моделей можна розглядати лише стосовно конкретної галузі наукових досліджень. В даній роботі ці питання розглядаються на прикладах побудови математичних моделей перехідних процесів у нелінійних електричних колах та рішенні задач небесної механіки і екології. Розвинуті в даній роботі нові підходи до формування моделей базуються на доробку відомих вчених-електротехніків, таких як В.Анісімов, О.Архангельський, Р.Базилевич, С.Басан, Б.Баталов, З.Бененсон, Б.Блажкевич, Т.Блейкслі, В.Бондаренко, С.Букашкін, І.Влах, Г.Вознякці, Є.Глоріозов, Л.Данілов, К.Демирчян, Р.Дмитришин, В.Ільїн, Д.Калахан, Ю.Калніболотський, А.Ланне, М.Максимович, Б.Мандзій, П.Матханов, В.Миронов, Л.Нагорний, І.Норенков, Пен-Мін Лін, В.Перхач, А.Петренко, Г.Пухов, М.Ронто, Л.Синицький, В.Сігорський, В.Сліпченко, П.Стахів, Дж.Стюарт, Дж.Фідлер, Є.Чахмахсазян,

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

Л. Чуа, М. Шакіров та інші. Особлива увага звернута при цьому на підходах, пов'язаних з методом підсхем та побудовою макромоделей багатополосних підсхем.

Питання знаходження розв'язку математичних моделей, представлених диференціальними рівняннями, носять універсальний характер. Числові методи, які при цьому використовуються, придатні до знаходження розв'язку математичних моделей динамічних систем в загальному, безвідносно до якої-небудь галузі наукових досліджень. Значний внесок у розвиток числових методів для рівнянь першого порядку зробили: К. Бабенко, М. Бахвалов, К. Бренен, К. Гір, С. Годунов, В. Горбатов, В. Крилов, В. Маліков, Г. Марчук, М. Мейрон, Дж. Ортега, Л. Петзолд, Ю. Ракитський, О. Самарський, А. Санджованні-Вінчентеллі, Р. Слоновьський, Дж. Трауб, Л. Турчак, Дж. Уатт, Дж. Ферзігер, Дж. Форсайт, Б. Хайрер, Р. Хеммінг, Г. Хечтел, Дж. Холл, Л. Шемпайн, Х. Штеттер та інші.

Як правило, при моделюванні динамічних процесів прийнято використовувати рівняння з похідними виключно першого порядку. У значній мірі це пов'язано з тим, що існує добре розроблений апарат числових методів і відповідних програмних засобів розв'язування таких рівнянь. Натомість, в ряді наукових областей досліджуваних процесів мають ту особливість, що в їх математичному описі присутні похідні невідомих не тільки першого, а і більш високих порядків. Моделі, в яких містяться такі похідні, можна звести до системи рівнянь першого порядку. Проте, така процедура веде до додаткових незручностей при формалізації задачі, а також суттєво збільшує розмірність задачі і обчислювальні затрати.

Тому актуальною є розробка нового підходу, який дає можливість будувати математичні моделі динамічних процесів у вигляді рівнянь вищих порядків і ефективно розв'язувати їх без здійснення будь-яких додаткових операцій. Основні наукові результати дисертації одержано в ході виконання планових науково-дослідних робіт Фізико-механічного інституту НАН України (Постанови Президії

НАН України N 3 від 22.02.94, N 18 від 25.12.89, N 474 від 27.12.85, N 1195 від 09.06.86 та N 585 від 30.12.81), проектів Державної науково-технічної програми 06.02.02 ДКНТПП України "Перспективні інформаційні технології і системи" та господарських договорів.

Об'єктом дослідження є математичні моделі динамічних процесів і систем. Предметом дослідження є методи побудови математичних моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та методи числового розв'язування таких рівнянь.

Метою роботи є створення методів та засобів математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ з використанням диференціальних рівнянь вищих порядків, які базуються на нових підходах до формування моделей та нових числових способах розв'язування рівнянь вищих порядків без зведення їх до системи рівнянь першого порядку в нормальній формі.

Досягнення мети здійснюється шляхом розв'язання таких задач:

— розробка діакоптичного підходу до побудови моделі динамічної системи у вигляді рівнянь вищих порядків на прикладах аналізу перехідних процесів в складному нелінійному електричному колі;

— розробка нового класу неявних багатокрокових числових методів для математичних моделей з похідними вищих порядків, які базуються на узагальнених формулах диференціювання з різницями назад (узагальнені методи ФДН), використовують апроксимацію невідомих інтерполяційними многочленами з кратними вузлами і відрізняються від відомих методів відсутністю процедури зведення рівнянь вищих порядків до системи рівнянь з похідними тільки першого порядку;

— створення основних варіантів узагальнених методів ФДН для моделей вищих порядків, розробка методів оцінки локальних похибок цих методів та знаходження їх областей стійкості; розробка узагальнених методів ФДН, які базуються на апроксимації старших

похідних інтерполяційними поліномами заданого степеня;

— на основі запропонованих підходів до математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ розробка алгоритмів та програмних засобів для побудови моделей та їх числового розв'язування; оцінка числа арифметичних операцій для узагальнених методів ФДН та порівняння їх з рядом відомих методів;

— використання розроблених діакоптичних підходів до побудови математичних моделей динамічних систем при розв'язуванні задач електротехніки, небесної механіки та екології.

Методи досліджень. В основі методології досліджень лежать розроблені в дисертації підходи до формування математичних моделей та знаходження їх розв'язків. В дослідженнях використовуються також загальні положення та методи математичного моделювання і обчислювальної математики. При побудові моделей для електротехнічних задач використовуються загальні положення теорії електричних кіл (елементи теорії графів, методу підсхем, методів аналізу перехідних процесів).

Достовірність основних наукових положень та отриманих результатів забезпечується коректністю постановки розглянутих задач, строгістю математичних перетворень співпадінням отриманих формул в часткових випадках з відомими результатами.

Наукова новизна роботи. В роботі розроблено новий науковий напрям — створення методів та засобів математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ на основі диференціальних рівнянь і вищих порядків, які полягають у застосуванні нових підходів до формування моделей та нових числових способів розв'язування рівнянь вищих порядків без зведення їх до системи рівнянь першого порядку. В рамках цього наукового напрямку отримано такі основні наукові результати:

— розроблено нові підходи до формування математичної моделі перехідного процесу в складному нелінійному електричному колі;

які включають: метод побудови математичної моделі багатополосної підсхеми у вигляді рівнянь вищих порядків мінімальної розмірності; метод одержання математичної моделі кола, як об'єднання підсхем, при описі їх рівняннями вищих порядків; алгоритми формування і розв'язування рівнянь для визначення початкових умов на основі початкових значень змінних стану;

— для моделей з похідними вищих порядків створено новий клас неявних багатокрокових числових методів, які базуються на узагальнених формулах диференціювання з різницями назад і використовують апроксимацію невідомих інтерполяційними многочленами з кратними вузлами;

— одержано оцінку локальної похибки узагальнених методів ФДН та розроблено методуку визначення їх областей стійкості, знайдено границі областей стійкості низки часткових варіантів;

— розроблено основні варіанти реалізації узагальнених методів ФДН: однокрокові варіанти; варіанти, які забезпечують найшвидший ріст степеня інтерполяційного многочлена; варіанти з мінімальним числом кроків назад; варіанти з постійною кратністю вузлів інтерполяції; запропоновано спрощену реалізацію узагальненого методу ФДН для лінійних моделей вищих порядків;

— для моделей вищих порядків розроблено узагальнені методи ФДН, які базуються на апроксимації старших похідних інтерполяційними поліномами заданого степеня;

— для задач моделювання перехідного процесу в електричному колі розроблено: метод одержання початкових умов при перетворенні операторних макромоделей лінійних підсхем у диференціальні рівняння; метод формування моделі кола на основі макромоделей його лінійних і нелінійних частин у вигляді рівнянь вищих порядків відносно зовнішніх величин; метод формування дискретних макромоделей багатополосних підсхем на основі узагальнених формул диференціювання з різницями назад;

— для задач моделювання у небесній механіці розроблено чи-

слові методи, які не використовують перших похідних невідомих; для рівнянь третього порядку, що не містять окремих похідних невідомих, розроблено узагальнені методи ФДН, які враховують специфіку цих рівнянь і дозволяють уникнути виконання додаткових операцій з першими та другими похідними невідомих;

– розроблено діакоптичний підхід до моделювання кругообігу вуглецю в біосфері, розроблено метод формування моделі регіонального кругообігу, а також метод побудови моделі глобального кругообігу на основі регіональних моделей та рівнянь зв'язку.

Практичне значення результатів. Розроблені в роботі методи та алгоритми дають можливість формувати моделі динамічних процесів у вигляді рівнянь вищих порядків і розв'язувати їх без зведення до системи першого порядку більшої розмірності. Тим самим зменшуються обсяги обчислювальних затрат, спрощується процес числового моделювання і його результати стають наочнішими.

Створені методи побудови моделей перехідних процесів у складних нелінійних електричних колах на базі макромоделей підсхем дають можливість формувати моделі багатополосних підсхем у вигляді рівнянь виключно відносно зовнішніх величин. При цьому розмірність моделі кола в цілому, як об'єднання підсхем, є мінімальною і дорівнює сумарному числу незалежних зовнішніх полюсів усіх підсхем.

Розроблені методи та алгоритми числового розв'язування моделей вищих порядків з використанням узагальнених формул диференціювання з різницями назад дають можливість знаходити розв'язки таких моделей без додаткового зведення їх до систем рівнянь першого порядку і пов'язаного з цим збільшення розмірності задачі. Це дає принципову можливість знизити обчислювальні затрати при числовому аналізі моделей. Багатоманітність варіантів розроблених узагальнених методів ФДН, які базуються на використанні різноманітних інтерполяційних сіток, відкривають можливості здійснення проблемної адаптації алгоритмів в ході числового аналізу.

Розвинуті числові методи для моделей, що не містять перших похідних невідомих, дають можливість розв'язувати задачі небесної механіки без зведення вихідних моделей до системи рівнянь першого порядку, що суттєво знижує обсяги обчислювальних затрат за рахунок виключення операцій з першими похідними.

Розроблений діакоптичний підхід до моделювання кругообігу вуглецю в біосфері розширює область адекватності моделі, дає можливість враховувати неоднорідність протікання біохімічних процесів у різних регіонах планети.

Реалізація результатів. На основі розроблених методів математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ з використання диференціальних рівнянь вищих порядків створено алгоритми та відповідні програмні засоби для побудови моделей та їх числового розв'язування. Розроблено програмні засоби формування моделі перехідного процесу у складному нелінійному електричному колі на основі опису підсхем макромоделями у вигляді рівнянь вищих порядків відносно виключно незалежних зовнішніх величин. Розроблено програмні засоби числового інтегрування нелінійних (і як спрощений варіант — лінійних) моделей вищих порядків на основі узагальнених методів ФДН. Створено програмні засоби імітаційного моделювання кругообігу вуглецю, які базуються на діакоптичних підходах до формування моделі і враховують неоднорідність протікання біохімічних процесів в різних регіонах планети.

Розроблені на основі запропонованих методів і алгоритмів програмні засоби аналізу електричних кіл методом підсхем на основі рівнянь вищих порядків включено в САПР аналогових засобів електровимірювальної техніки в СКБ мікроелектроніки в приладобудуванні Львівського ВО "Мікроприлад" та в САПР логічних інтегральних схем на основі МДН-транзисторів на Кишинівському заводі "Мезон". Окремі програмні засоби були включені в Державний фонд алгоритмів і програм та передані для використання зацікавленим організаціям.

Апробація роботи. Основні наукові результати та положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на міжнародних, всесоюзних, республіканських та галузевих науково-технічних конференціях і школах-семінарах, у тому числі: на Міжнародних науково-технічних конференціях "Проблеми фізичної і біомедичної електроніки" (Київ, 1995 та 1996 рр.); на Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 1995 р.); на Першій та Другій українських конференціях з автоматичного управління "Автоматика-94" та "Автоматика-95" (Київ, 1994 р.; Львів, 1995 р.); на Першій міжнародній науково-технічній конференції "Математичне моделювання в електротехніці й електроенергетиці" (Львів, 1995 р.); на Міжнародній конференції "Нові інформаційні технології в науці, освіті, медицині та бізнесі" (Москва, 1994 р.); на Першій міжнародній конференції з інформаційних технологій і систем (Львів, 1993 р.); на Науково-технічній конференції "Фундаментальні та прикладні проблеми космічних досліджень" (Житомир, 1993 р.); на Науковій конференції, присвяченій 40-річчю фізичного факультету Львівського держуніверситету (Львів, 1993 р.); на Республіканській науково-технічній конференції "Проблеми автоматизованого моделювання в електроніці" (Київ, 1993 р.); на III та IV науково-технічних конференціях "Проблеми нелінійної електротехніки" (Черкаси, 1988 р.; Київ, 1992 р.); на Всесоюзній конференції "Математичне моделювання в енергетиці" (Київ, 1990 р.); на Міжнародній науково-технічній конференції "Інтеграція систем цільової підготовки спеціалістів і автоматизованих технічних систем різноманітного призначення" (Алушта, 1990 р.); на VIII школі-семінарі "Математичне і машинне моделювання в мікроелектроніці" (Паланга, 1991 р.); на Республіканських конференціях "Проблемна адаптація алгоритмічного та інформаційного забезпечення САПР" (Київ, 1987, 1988 та 1990 рр.); на Науково-технічній нараді-семінарі "Проблеми автоматизації функціонального проектування РЕА" (Та-

ганрог, 1989 р.); на IX республіканській школі-семінарі з теоретичної електротехніки, електроніки і моделювання (Львів-Шацьк, 1987 р.); на V та VI Всесоюзних школах-семінарах "Розпаралелювання обробки інформації" (Львів-Косів, 1985 та 1987 рр.); на Семінарі Наукової ради АН УРСР по комплексній проблемі "Наукові основи електросенергетики" (Київ, 1987 р.); на Другій конференції "Проблеми підвищення якості матеріалів, приладів та обладнання" (Львів, 1986 р.); на 8-ій Республіканській школі-семінарі по теоретичній електротехніці і електроніці (Львів-Шацьк, 1986 р.); на Семінарі Наукової ради АН УРСР по комплексній проблемі "Теоретична електротехніка, електроніка і моделювання" (Львів, 1981 та 1985 рр.); на Другій, Третій та Четвертій республіканських нарадах-семінарах з машинного проектування електронних схем (Львів-Славськ, 1981, 1983 та 1985 рр.); на Всесоюзній науково-технічній конференції "Моделювання-95 (Київ, 1985 р.); на Республіканській конференції "Моделювання та ідентифікація компонентів і вузлів електронної техніки" (Київ, 1985 р.).

На захист виносяться такі основні положення:

— діакоптичні підходи до побудови математичних моделей перехідних процесів у нелінійному електричному колі у вигляді рівнянь вищих порядків, які включають: метод побудови моделі багатополосної підсхеми у вигляді рівнянь вищих порядків, невідомими в яких виступають виключно зовнішні по відношенню до підсхеми величини; метод формування моделі кола, як об'єднання підсхем, при описі їх рівняннями вищих порядків; алгоритми формування і розв'язування рівнянь для визначення початкових умов моделі з використанням початкових значень змінних стану;

— новий клас нелінійних багатокрокових числових методів для розв'язування моделей вищих порядків, які базуються на узагальнених формулах диференціювання з різницями назад і використовують апроксимацію невідомих інтерполяційними многочленами з кратними вузлами; результати досліджень по оцінці локальних похибок

цих методів та методи визначення їх областей стійкості;

— основні варіанти реалізації узагальнених методів ФДН стосовно розв'язування моделей з похідними вищих порядків (одн. крокові варіанти; варіанти, які забезпечують найшвидший ріст степеня інтерполяційного многочлена; варіанти з мінімальним числом кроків назад; варіанти з постійною кратністю вузлів інтерполяції; спрощена реалізація узагальненого методу ФДН для лінійних моделей вищих порядків; узагальнені методи ФДН, які базуються на апроксимації старших похідних інтерполяційними поліномами заданого степеня);

— алгоритми і програмні засоби реалізації запропонованих підходів до математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ з використанням диференціальних рівнянь вищих порядків;

— метод формування моделі перехідного процесу в електричному колі на основі макромоделей його лінійних і нелінійних частин у вигляді рівнянь вищих порядків; метод одержання початкових умов при перетворенні операторних макромоделей лінійних підсхем у диференціальні рівняння; метод формування дискретних макромоделей багатополосних підсхем на базі узагальнених формул диференціювання з різницями назад;

— числові методи для розв'язування задач небесної механіки, які не використовують перших похідних невідомих; узагальнені методи ФДН для рівнянь третього порядку, що не містять окремих похідних невідомих;

— діакоптический підхід до моделювання кругообігу вуглецю в біосфері, метод формування моделі регіонального кругообігу, а також метод побудови моделі глобального кругообігу на основі регіональних моделей та рівнянь зв'язку.

Публікації. По темі дисертаційної роботи опубліковано 62 наукові праці.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, семи розділів, висновків, списку використаної літератури та

додатків. Робота викладена на 355 сторінках і включає 263 сторінки основного тексту та список літератури із 480 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність проблеми математичного моделювання динаміки фізичних процесів з використанням рівнянь вищих порядків, формулюються мета та основні задачі досліджень, подається анотація основних положень роботи.

В першому розділі розглянуто питання побудови моделей динамічних процесів і систем у вигляді диференціальних рівнянь вищих порядків. Наведено традиційні форми представлення моделей перехідних процесів та описано області застосування моделей з похідними вищих порядків. Використовуючи задачу діакоптичного формування рівнянь нелінійного електричного кола проілюстровано процедуру побудови моделей вищих порядків. При цьому розглянуто питання формування макромоделей багатополосних підсхем у вигляді рівнянь вищих порядків і на їх основі — побудови математичної моделі кола в цілому, як об'єднання підсхем. Зроблено огляд відомих підходів до розв'язування моделей вищих порядків.

В розділі показано, що найбільш вживаною формою представлення математичних моделей динаміки фізичних процесів і явищ є системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з відомими незалежними початковими умовами. Проте, є багато задач (з механіки, електротехніки, небесної механіки та інших областей), в яких математичні моделі досліджуваних процесів чи явищ зручно представляти у вигляді звичайних диференціальних рівнянь з похідними вищих порядків виду

$$f_k(\{x_j^{(r)}\}, j = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, s_{jk}; t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

з заданими незалежними початковими умовами $x_k^{(r)} = x_k^{(r)}(t_0), k =$

$= 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, s - 1$. В рівняннях (1): $x_k(t), x_k^{(r)}(t)$ — невідомі та їх похідні r -го порядку, $x_k^{(r)}(t) = dx_k^r/dt^r$; f_k — відомі нелінійні функції; n — розмірність моделі; t — незалежна змінна (час), s_{jk} — максимальний порядок похідних j -ої невідомої в k -му рівнянні. Такі моделі, в принципі, можуть бути представлені як в явній, так і в неявній формі.

Підходи до формування моделей (1) специфічні для кожного зокрема об'єкту чи класу об'єктів. Ця специфіка полягає у своєрідності підходів до: вибору властивостей об'єкта, які підлягають відображенню в моделі; збору вихідної інформації про вибрані властивості об'єкта; синтезу структури моделі; розрахунку числових значень параметрів і т.д. В роботі пропонується новий діагностичний підхід до побудови моделі виду (1) для задач аналізу перехідних процесів у складному нелінійному електричному колі. Підхід базується на формуванні математичних моделей підсхем та кола в цілому, як об'єднання підсхем, у вигляді системи рівнянь відносно зовнішніх величин.

Показано, що багатополосну підсхему без зниження точності моделі можна описати мінімальним числом рівнянь, яке дорівнює числу її незалежних полюсів. Цього можна досягнути, якщо з математичної моделі, складеної на компонентному рівні виключити всі змінні, що відповідають внутрішнім величинам підсхем. При цьому використовуються рівняння змінних стану багатополосної підсхеми

$$X_{mc}^{(1)} = \Phi_m(X_{mc}, X_{mc}, E_m, t);$$

$$\Psi_m(X_{mc}, X_{iac}, E_m, t) = 0,$$

де X_{mc} — матриця-стовпець змінних стану m -ої підсхеми, $X_{mc} = \|x_{mc1}, x_{mc2}, \dots, x_{mcj}, \dots, x_{mcn_{mc}}\|^T$; $X_{mc}^{(1)}$ — матриця-стовпець їх перших похідних по часу; n_m, n_{mc} та n_{mb} — числа незалежних зовнішніх полюсів підсхеми, її змінних стану та автономних джерел енергії; X_{iac} — вектор незалежних зовнішніх величин підсхеми, $X_{mc} = (x_{mc1}, \dots, x_{mci}, \dots, x_{mc, 2n_m})$; E_m — вектор автономних па-

параметрів джерел енергії в підсхемі, $E_m = (e_{m1}, \dots, e_{ml}, \dots, e_{mn_{mb}})$; Φ_m і Ψ_m — матриці-стовпці нелінійних функцій багатьох змінних. Число рівнянь в цій моделі дорівнює сумі числа незалежних зовнішніх полюсів підсхеми і числа змінних стану, а невідомих в цій моделі міститься $n_{mc} + 2n_m$.

Розроблено метод побудови математичної моделі багатополюсної підсхеми у вигляді рівнянь вищих порядків відносно невідомих, якими виступають виключно зовнішні по відношенню до підсхеми величини. Метод базується на додатковому диференціюванні та алгебраїчному перетворенні рівнянь змінних стану і дозволяє сформувати макромодель підсхеми у вигляді рівнянь

$$F_m(X_{mc}, X_{mc}^{(1)}, \dots, X_{mc}^{(r)}, \dots, X_{mc}^{(s_m)}, E_m, E_m^{(1)}, \dots, E_m^{(l)}, \dots, E_m^{(s_m)}, t) = 0, \quad (2)$$

де F_m — матриця-стовпець розміром n_m нелінійних функцій багатьох змінних; $X_{mc}^{(r)}$ — $2n_m$ -мірний вектор r -х похідних по часу незалежних зовнішніх величин підсхеми, тобто $x_{mej}^{(r)} = d^r x_{mej} / dt^r$ ($j = 1, 2, \dots, 2n_m$; $r = 1, 2, \dots, s_m$); $E_m^{(l)}$ — n_{mb} -мірний вектор l -х похідних по часу автономних параметрів джерел енергії ($l = 1, 2, \dots, s_m$). Створений метод побудови макромоделі дає можливість звести число рівнянь у моделі підсхеми до мінімуму, що дорівнює числу незалежних полюсів підсхеми. При цьому невідомими виступають виключно зовнішні незалежні величини (напруги сторін та полюсні струми). На відміну від традиційних способів макромодельовання, пов'язаних із спрощенням моделі, таке зменшення розмірності моделі не веде до звуження її області адекватності. В роботі описуються випадки, при яких описане вище виключення внутрішніх змінних можливе.

Основу для формування математичної моделі кола в цілому, як об'єднання підсхем, складають n рівнянь ($n = \sum_{m=1}^M n_m$) вищих порядків макромоделей (2) усіх M підсхем та рівняння зв'язків, отримані на основі законів Кірхгофа з врахуванням способів з'єднання

підсхем у коло та з врахуванням вибраної системи незалежних зовнішніх величин усіх підсхем. Розроблено метод, який дає можливість сформулювати модель кола у вигляді рівнянь

$$F(X, X^{(1)}, \dots, X^{(r)}, \dots, X^{(s)}, E, E^{(1)}, \dots, E^{(s)}, t) = 0, \quad (3)$$

де F — матриця-стовпець відомих функцій, $F = \|f_1, f_2, \dots, f_k, \dots, f_n\|^T$; X — n -мірний вектор базисних величин кола (невідомих), $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$; $X^{(r)}$ — n -мірний вектор r -х похідних невідомих; E — вектор автономних параметрів джерел енергії, що містяться в колі. $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

В ході побудови моделі (3) використовуються рівняння зв'язку, які складаються з q незалежних вузлових рівнянь струмів та p контурних рівнянь напруг, де q — число незалежних вузлів у колі, p — число незалежних контурів в графі цього кола, $p = n - q$. Множина базисних величин кола в цьому випадку складається з p незалежних полюсних струмів, що відповідають хордам дерева в графі струмів, та q незалежних напруг підсхем, які відповідають віткам дерева в графі напруг. Структурні рівняння кола використовуються для вираження всіх $2n$ незалежних зовнішніх величин підсхем та їх похідних у вигляді лінійних комбінацій n базисних величин. Ці вирази об'єднано у матричному рівнянні

$$X_e = DX,$$

де X_e — матриця-стовпець розміром $2n$ незалежних зовнішніх величин усіх підсхем, $X_e = \|X_{1e}, X_{2e}, \dots, X_{me}, \dots, X_{Me}\|^T = \|x_{1e1}, \dots, x_{1e,2n_1}, x_{2e1}, \dots, x_{2e,2n_2}, \dots, x_{Me1}, \dots, x_{Men_M}\|^T$; D — прямокутна матриця, $D = \|d_{ij}\|$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$; $j = 1, 2, \dots, n$), причому $d_{ij} \in \{-1; 0; 1\}$.

Знайти частковий розв'язок математичної моделі (3) можна при умові, що відомо незалежні початкові умови, якими є числові значення в початковий момент часу фізичних величин, які входять як невідомі в рівняння. У випадку наявності в моделі похідних вищих порядків повинні також бути задані початкові значення молодших

похідних. В роботі розроблено метод одержання незалежних початкових умов на основі відомих початкових значень змінних стану. Оскільки швидкість розповсюдження енергії в просторі і як наслідок цього — швидкість зміни запасів енергії в енергоємких компонентах кола є скінченною, то змінні стану описуються неперервними функціями часу. Це відображається у законах комутації електричного кола, загальний вираз яких має вигляд

$$x_{mcj0} = x_{mcj}(t_0) = x_{mcj}(t_{0-}) = x_{mcj0-}, \\ \forall m = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, n_{mc}, \quad (4)$$

де x_{mcj} — j -та змінна стану m -ої підсхеми; t_{0-} — момент часу, що безпосередньо передує початковому моменту (моментові комутації), $t_{0-} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (t_0 - \epsilon)$. Створено алгоритм, який дає можливість формувати і розв'язувати рівняння для визначення початкових значень базисних величин кола та їх молодших похідних на базі початкових значень змінних стану, виражених співвідношеннями (4).

Представлений в розділі метод одержання математичної моделі електричного кола на основі макромоделей багатополюсних підсхем дозволяє звести число рівнянь моделі до мінімуму, який визначається загальним числом n незалежних зовнішніх полюсів усіх підсхем, що веде до суттєвого зменшення розмірності моделі (на число внутрішніх змінних).

В першому розділі проаналізовано також недоліки традиційних підходів до розв'язування моделей вищих порядків. Ці підходи базуються на зведенні вихідних моделей до системи рівнянь першого порядку, що веде до суттєвого збільшення розмірності задачі. Зроблено огляд відомих методів безпосереднього (без зведення до системи першого порядку) розв'язування рівнянь вищих порядків. Більшість цих методів допускають інтегрування з постійним кроком рівнянь тільки другого порядку, представлених у нормальній формі.

Другий розділ присвячено розробці нового класу неявних багатокрокових числових методів для моделей вищих порядків. Ме-

тоди базуються на поліноміальній інтерполяції з кратними вузлами і дозволяють знаходити розв'язок рівнянь вищих порядків без додаткового зведення їх до системи першого порядку в нормальній формі. Вони є узагальненням відомого методу, який базується на формулах диференціювання з різницями назад, на рівняння вищих порядків (узагальнені методи ФДН).

Припускається, що система (1) має єдиний розв'язок у вигляді неперервних функцій $x_j(t) \in C_{s_j}[t_0, t_N]$, причому $s_j = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} s_{jk}$. Вважається також, що незалежні початкові умови у вигляді початкових значень невідомих $x_{j0} = x_j(t_0)$ та їх молодших похідних $x_{j0}^{(r)} = x_j^{(r)}(t_0)$ задані для всіх $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ та $r \in \{1, 2, \dots, s_j - 1\}$. Допускається, що залежні початкові умови, якими є початкові значення старших похідних $x_{j0}^{(s_j)}$, можуть бути обчислені з допустимою похибкою за допомогою відомих числових методів з рівнянь (1), записаних для $t = t_0$.

Розв'язок системи (1) шукається у вигляді множини наближених дискретних значень $\tilde{x}_{j\nu}$ кожної із змінних на множині дискретних значень аргумента $t_\nu \in [t_0, t_N]$, де ν — порядковий номер кроку інтегрування, $\nu \in \{1, 2, \dots, N\}$; t_ν — дискретне значення часу, яке визначає кінець ν -го кроку інтегрування.

Суть пропонуваного методу полягає в тому, що властива всім числовим методам розв'язування диференціальних рівнянь алгебраїзація задачі здійснюється шляхом підстановки на кожному кроці дискретизації в одержаній на основі рівнянь (1) при $t = t_\nu$ системи

$$f_k(\{x_{j\nu}^{(r)}\}, j = 1, 2, \dots, n; r = 0, 1, \dots, s_{jk}; t_\nu) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

замість точних дискретних значень похідних $x_{j\nu}^{(r)} = x_j^{(r)}(t_\nu)$ їх наближених значень $\tilde{x}_{j\nu}^{(r)}$, які виражені у вигляді

$$\tilde{x}_{j\nu}^{(r)} = \sum_{i=1}^{\mu_{j\nu}} \sum_{l=0}^{\rho_{j\nu i} - 1} \beta_{j\nu r i}^{(l)} \tilde{x}_{j, \nu-i}^{(l)} + \gamma_{j\nu r} \tilde{x}_{j\nu}. \quad (6)$$

Тут $\beta_{j\nu r}^{(l)}$ та $\gamma_{j\nu r}$ — коефіцієнти, значення яких необхідно визначити на кожному кроці інтегрування на основі відомих значень h_ν (довжини ν -го кроку дискретизації, $h_\nu = t_\nu - t_{\nu-1}$) та $h_{\nu i} = t_\nu - t_{\nu-i}$, $i = 1, 2, \dots, \mu_{j\nu}$; $\mu_{j\nu}$ — число кроків назад при апроксимації j -ої змінної на ν -му кроці; $\rho_{j\nu i}$ — цілочисельний параметр — кратність i -го вузла інтерполяції j -ої невідомої на цьому ж кроці; $\tilde{x}_{j,\nu-i}^{(l)}$ — наближені значення невідомих та відповідних похідних, знайдені на $\mu_{j\nu}$ ($\mu_{j\nu} \leq \nu$) попередніх кроках (при $\nu - i = 0$ використовуються задані початкові умови). В залежності від значень параметрів $\mu_{j\nu}$ та $\rho_{j\nu i}$ пропонуються різні варіанти реалізації запропонованого класу методів.

В результаті вказаної підстановки отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$g_{k\nu}(\{\tilde{x}_{j\nu}\}, j = 1, 2, \dots, n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

в результаті розв'язування якої відовими числовими методами знаходимо значення невідомих, що відповідають дискретному значенню $t = t_\nu$.

Перед переходом до наступного ($\nu + 1$)-го кроку інтегрування моделі (1) необхідно за формулою (6) на основі знайдених значень $\tilde{x}_{j\nu}$ обчислити ті дискретні значення похідних $\tilde{x}_{j\nu}^{(r)}$, що відповідають біжучому кроку, які будуть використовуватися на наступних кроках.

З метою обчислення коефіцієнтів $\beta_{j\nu r}^{(l)}$ та $\gamma_{j\nu r}$ у виразах (6) на кожному кроці дискретизації у відповідності із формулою $\vartheta_\nu = (t_\nu - t)/h_\nu$ вводиться новий безрозмірний аргумент ϑ_ν з додатним напрямком в сторону зменшення t . Всі невідомі, які є функціями аргумента t , перетворюють у функції аргумента ϑ_ν . Кожну невідому на певному інтервалі апроксимують поліномом заданого степеня. Для визначення коефіцієнтів апроксимації використовується інтерполяційний многочлен Ерміта та метод невизначених коефіцієнтів. З врахуванням зв'язку цих коефіцієнтів з наближеними дискретними значеннями похідних одержано формули для обчислення значень ко-

ефіцієнтів $\beta_{jvri}^{(l)}$ та γ_{jvr} у виразах (6). Ці формули мають вигляд:

$$\beta_{jvri}^{(l)} = \frac{r! p_{jvrv}}{(-1)^{r-l} h_v^{r-l}}, \quad \gamma_{jvr} = - \sum_{i=1}^{\mu_{jv}} \frac{r! p_{jvri}}{(-1)^r h_v^r}, \quad (7)$$

де

$$v = \begin{cases} i, & l = 0; \\ \mu_{jv} + \sum_{k=0}^{i-1} (\rho_{jvk} - 1) + l, & l = 1, 2, \dots, \rho_{jvi} - 1. \end{cases}$$

У формулах (7) p_{jvrv} — елементи матриці P_{jv} , оберненої по відношенню до матриці Q_{jv} , елементи якої обчислюємо за формулою

$$q_{jvvr} = \begin{cases} \vartheta_{vv}^r, & v = 1, 2, \dots, \mu_{jv}, \quad l = 0; \\ \frac{r! \vartheta_{vi}^{r-l}}{(r-l)!}, & v > \mu_{jv} \quad r \geq l; \\ 0, & v > \mu_{jv} \quad r < l; \end{cases}$$

причому у другому рядку цієї формули індекс i набуває значень $i = 1, 2, \dots, \mu_{jv}$, за винятком тих, для яких $\rho_{jvi} = 1$, індекс l набуває значень $l = 1, 2, \dots, \rho_{jvi} - 1$, а індекс v залежить від значень індексів i та l за формулою $v = \mu_{jv} + \sum_{k=0}^{i-1} (\rho_{jvk} - 1) + l$.

В розділі дано оцінку локальної похибки визначення невідомих узагальненими методами ФДН, яка встановлює зв'язок між параметрами інтерполяційної сітки та порядком апроксимації числового методу. Розроблено методику визначення областей стійкості узагальнених методів ФДН стосовно розв'язування моделей з похідними вищих порядків. Знайдено границі областей стійкості низки варіантів узагальнених методів ФДН при розв'язуванні модельних задач.

Запропоновано алгоритми знаходження початкових наближень невідомих на кожному кроці інтегрування узагальненими методами

ФДН, який базується на використанні інтерполяційних многочленів, що відповідають попередньому крокові дискретизації. Різниця між уточненими значеннями невідомих та прогнозованими значеннями враховується для автоматичного управління величиною кроку дискретизації.

В третьому розділі описано основні варіанти реалізації узагальнених методів ФДН для моделей вищих порядків (однокрокові варіанти, варіанти з мінімальним числом кроків назад, варіанти з постійною кратністю вузлів інтерполяції та інші). Розглянуто спрощену реалізацію методів для лінійних моделей вищих порядків та досліджено зв'язок узагальнених методів ФДН з відомими методами.

Різноманітні варіанти реалізації узагальнених методів ФДН можливі в залежності від значень параметрів інтерполяційної сітки, яка використовується для апроксимації невідомих, тобто в залежності від значень параметрів $\mu_{j\nu}$ та $\rho_{j\nu i}$. Однокрокові варіанти узагальнених методів ФДН характерні постійним числом кроків назад рівним одиниці ($\mu_{j\nu} = 1$) для всіх змінних ($j = 1, 2, \dots, n$) і на всіх кроках інтегрування ($\nu = 1, 2, \dots, N$). Степінь інтерполяційного многочлена є постійним на всіх кроках. Він рівний максимально можливо при $\mu_{j\nu} = 1$ значенню $s_j + 1$.

Однокрокові варіанти використовують спрощені обчислювальні операції, що виконуються на кожному кроці інтегрування. Для реалізації цих варіантів одержано формули для коефіцієнтів методу

$$\beta_{j\nu r}^{(l)} = \begin{cases} \frac{(s_j + 1)!}{h_\nu^{l-r} l! (s_j + 1 - r)!}, & l = 0, 1, \dots, (r - 1); \\ h_\nu^{l-r} \left[\frac{1}{(l - r)!} - \frac{(s_j + 1)!}{l! (s_j + 1 - r)!} \right], & l = r, (r + 1), \dots, s_j; \end{cases}$$

$$\gamma_{j\nu r} = \frac{(s_j + 1)!}{h_\nu^r (s_j + 1 - r)!},$$

які не використовують процедуру знаходження оберненої матриці.

Однокрокові варіанти, на відміну від інших варіантів, не потребують так званої стартової процедури. Це знаходить своє відображення в тотожності алгоритму реалізації методу на всіх кроках, починаючи з першого. Алгоритми, що відповідають однокроковим варіантам, обов'язково використовуються на першому кроці стартової процедури, яка характерна іншим варіантам реалізації узагальнених методів ФДН.

В розділі розроблено варіанти, які забезпечують найшвидший ріст степеня інтерполяційного многочлена і які характеризуються максимально можливим числом кроків назад і максимальною кратністю вузлів інтерполяції на всіх кроках інтегрування. Варіанти з мінімальним числом кроків назад дають можливість досягнути заданого степеня інтерполяційного поліному при мінімальному числі кроків назад (мінімальному числі вузлів інтерполяції). Розроблено також варіанти, які характеризуються однаковими на всіх кроках і для всіх змінних кратностями вузлів інтерполяції за винятком вузла, що відповідає біжучому крокові дискретизації (варіанти з постійною кратністю вузлів інтерполяції).

Розглянуто спрощену реалізацію узагальненого методу ФДН стосовно розв'язування лінійних математичних моделей з похідними вищих порядків. Одержано аналітичні вирази для обчислення наближених дискретних значень невідомих та їх похідних на кожному кроці числового інтегрування.

Показано, що в частковому випадку, стосовно до розв'язування моделей, які містять похідні тільки першого порядку, варіанти запропонованих узагальнених методів ФДН з постійною кратністю вузлів інтерполяції рівною одиниці, співпадають з відомим методом формули диференціювання з різницями назад (методом ФДН). Запропоновані методи є узагальненням методу ФДН на рівняння з похідними вищих порядків, бо область їх застосування набагато ширша.

В четвертому розділі для розв'язування моделей вищих

порядків запропоновано і розроблено "інтегральні" варіанти узагальнених методів ФДН, які базуються на апроксимації на кожному кроці дискретизації найстарших похідних інтерполяційними поліномами заданого степеня. Молодші похідні та самі невідомі апроксимують при цьому відповідними інтегралами вказаних поліномів. Методи відносяться до класу неявних багатокрокових методів і допускають неявну форму запису моделей.

Алгебраїзація задачі здійснюється шляхом підстановки на кожному кроці в одержаній на основі співвідношень (1) при $t = t_\nu$ системі рівнянь замість точних дискретних значень похідних $x_{j\nu}^{(r)} = x_j^{(r)}(t_\nu)$ їх наближених значень $\tilde{x}_{j\nu}^{(r)}$, представлених у вигляді

$$\tilde{x}_{j\nu}^{(r)} = \sum_{i=1}^{\mu_{j\nu}} \sum_{l=0}^{\rho_{j\nu i}-1} \beta_{j\nu r i}^{(s_j-l)} \tilde{x}_{j,\nu-i}^{(s_j-l)} + \gamma_{j\nu r} \tilde{x}_{j\nu}^{(r)}. \quad (8)$$

Суттєва відмінність пропонуєваних методів, від методів представлених в другому розділі, в основі яких лежать вирази (6), полягає в тому, що на кожному кроці інтегрування дискретні значення похідних виражають у вигляді лінійних комбінацій в першу чергу старших похідних (а не самих змінних), знайдених на попередніх кроках.

На базі інтерполяційних многочленів Ерміта для даних варіантів узагальнених методів ФДН одержано вирази для наближених дискретних значень похідних на біжучому кроці інтегрування. В залежності від вибраних параметрів інтерполяційної сітки, яка використовується для апроксимації невідомих, можливі різноманітні варіанти реалізації методів. Спільним для всіх цих варіантів є те, що вузол інтерполяції, який відповідає біжучому крокові інтегрування, є простим, кратність вузла, який відповідає попередньому крокові інтегрування, є максимальною, а для решти вузлів в інтерполяційну сітку в першу чергу включають значення старшої похідної і при необхідності — значення молодших похідних.

Формули для обчислення коефіцієнтів $\beta_{j\nu r i}^{(s_j-l)}$ та $\gamma_{j\nu r}$ у виразах

(8) мають вигляд

$$\beta_{j\nu r i}^{(s_j-1)} = (-h_\nu)^{s_j-r-l} p_{j\nu r \nu}, \quad \gamma_{j\nu r} = -\frac{(-1)^r}{h_\nu^r} \sum_{i=1}^{\mu_{j\nu}} p_{j\nu r \nu} \Big|_{l=s_j, \rho_{j\nu i}=s_j+1},$$

причому $v = \sum_{k=1}^i \rho_{j\nu k} - l$. В останній формулі $p_{j\nu r \nu}$ — елементи матриці $P_{j\nu}$, оберненої по відношенню до матриці $Q_{j\nu}$, елементи якої залежать від вибраного варіанта інтерполяційної сітки.

Розроблено однокроковий інтегральний варіант узагальненого методу ФДН, одержано формули цього методу, які не використовують процедури знаходження обернених матриць. Показано тотожність цих варіантів і однокрокових диференціальних варіантів узагальнених методів ФДН, розглянутих в третьому розділі.

Розроблено варіанти, в яких для знаходження значень невідомих на біжучому кроці використовуються значення старших похідних на кількох попередніх кроках, а також значення всіх молодших похідних і самих невідомих на останньому кроці. Для цих варіантів вирази для дискретних значень похідних мають вигляд

$$\tilde{x}_{j\nu}^{(r)} = \sum_{l=0}^{s_j+1} \beta_{j\nu r l}^{(s_j-1)} \tilde{x}_{j,\nu-1}^{(s_j-l)} + \sum_{i=2}^{\mu_{j\nu}} \beta_{j\nu r i}^{(s_j)} \tilde{x}_{j,\nu-1}^{(s_j)} + \gamma_{j\nu r} \tilde{x}_{j\nu}.$$

Дана оцінка локальної похибки визначення невідомих у випадку інтегральних варіантів узагальнених методів ФДН та на ряді прикладів проілюстровано використання методики знаходження областей стійкості цих варіантів.

В п'ятому розділі описано розроблені алгоритми та програмні засоби, що реалізують запропоновані підходи до математичного моделювання з використання диференціальних рівнянь вищих порядків. Створені алгоритми можна розділити на алгоритми формування моделей динамічних процесів та алгоритми числового розв'язування моделей вищих порядків з використанням узагальнених методів ФДН.

Розроблено алгоритм формування математичної моделі перехідного процесу у складному нелінійному електричному колі на основі опису підсхем макромоделями у вигляді диференціальних рівнянь вищих порядків, невідомими в яких виступають виключно незалежні зовнішні величини підсхем. Алгоритм дозволяє звести число рівнянь і число невідомих в моделі до мінімуму, рівному загальному числу незалежних полюсів усіх підсхем.

Створено алгоритми числового інтегрування нелінійних моделей вищих порядків на основі неявних багатокрокових узагальнених методів ФДН. Алгоритми дають можливість розв'язувати рівняння вищих порядків без зведення їх до системи рівнянь першого порядку більшої розмірності. Тим самим вони зменшують обсяги обчислювальних затрат, спрощують процес числового моделювання і роблять його результати більш наочними. Алгоритми допускають розв'язування жорстких систем рівнянь та алгебро-диференціальних рівнянь вищих порядків.

Розроблено алгоритм спрощеної реалізації узагальнених методів ФДН для розв'язування лінійних моделей вищих порядків і показано його використання для моделювання перехідних процесів у лінійному електричному колі.

Одержано вирази, які дозволяють порівняти число арифметичних операцій, що виконуються на кожному часовому кроці числового інтегрування лінійних однорідних математичних моделей узагальненими методами ФДН та рядом відомих числових методів. Таке порівняння здійснено на основі розв'язування відомими методами системи n рівнянь виду $Y^{(1)} = AY$, де $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ — квадратна матриця; $Y = \|y_i\|^T$, $i = 1, 2, \dots, n$ — матриця-стовпець невідомих. На основі цієї системи була одержана система $[n/s]$ рівнянь s -го порядку

$$\sum_{r=0}^s A^{(r)} X^{(r)} = 0,$$

які розв'язувалися узагальненими методами ФДН.

Показано, що число арифметичних операцій, які виконуються на кожному кроці інтегрування узагальненим методом ФДН, пропорційне (змінна величина кроку дискретизації)

$$N_{\text{уФДН}} \approx \frac{2}{3} \left(\frac{n}{s}\right)^3 + \left(\frac{1}{2s^2} + \frac{4}{s}\right) n^2 + \left(2\mu\rho - 1 - \frac{13}{6s}\right) n + s\mu(2 + \rho) + \frac{8}{3}(\mu\rho)^3 + \frac{1}{2}(\mu\rho)^2.$$

У випадку однокрокового варіанту узагальненого методу ФДН справедливо

$$N_{\text{уФДН1}} \approx \frac{2}{3} \left(\frac{n}{s}\right)^3 + \left(\frac{1}{2s^2} + \frac{4}{s}\right) n^2 + \left(2 - \frac{7}{6s}\right) n + \frac{7}{2}s^2 + \frac{11}{2}s.$$

В останніх двох формулах: μ — число кроків назад, ρ — кратності вузлів інтерполяції, які приймаються однаковими для всіх змінних. На основі здійснених числових експериментів показано, що у випадку математичних моделей з похідними вищих порядків числові методи, які базуються на поліноміальній інтерполяції з кратними вузлами, потребують виконання набагато меншого числа арифметичних операцій (в 2–5 раз в залежності від числа рівнянь і порядку похідних). Різниця в числі таких операцій збільшується із збільшенням числа рівнянь в системі та з ростом максимальних порядків похідних.

Шостий та сьомий розділи присвячено питанням застосування розробленого підходу до моделювання динамічних процесів та систем з використанням рівнянь вищих порядків при розв'язуванні задач електротехніки, небесної механіки та екології.

В шостому розділі на ряді задач математичного моделювання перехідних процесів у нелінійних електричних колах проілюстровано використання запропонованого підходу, який базується на діакоптичних принципах формування моделі кола у вигляді рівнянь

вищих порядків та на новому класі числових методів розв'язування таких рівнянь без зведення до нормальної форми Коші. Зокрема, розроблено метод моделювання перехідного процесу в електричному колі з використанням моделей його лінійної і нелінійної частин у вигляді рівнянь вищих порядків, створено алгоритм знаходження початкових умов для операторних макромоделей лінійних підсхем, запропоновано методи побудови дискретних макромоделей багатополосних підсхем на основі узагальнених методів ФДН.

При аналізі складних нелінійних електричних кіл мають місце випадки, коли математичні моделі окремих лінійних підсхем задані у вигляді операторних макромоделей. В таких випадках ці моделі необхідно подати у вигляді системи диференціальних рівнянь і зберегти при цьому всю інформацію про початкові умови. Така інформація в подальшому використовується при обчисленні незалежних початкових умов для математичної моделі кола в цілому як об'єднання підсхем. В розділі розроблено метод одержання вказаних початкових умов при перетворенні операторних макромоделей лінійних підсхем у диференціальні рівняння. Метод дає можливість обчислювати початкові умови для моделі, яка одержана безпосередньо на основі математичних моделей підсхем у вигляді рівнянь відносно зовнішніх величин, без використання в ролі проміжних рівнянь змінних стану.

При числовому інтегруванні неявними методами математичних моделей, що описують нелінійне електричне коло, рядки матриці Якобі, які відповідають лінійним рівнянням, залишаються без зміни на кожному кроці дискретизації. Це можна використовувати для оптимальної організації обчислювального процесу і виключення частини змінних, які відповідають лінійній частині кола. Досягнуте при цьому зниження порядку матриці Якобі дозволяє значно зменшити обчислювальні затрати при аналізі перехідних процесів, особливо у випадках кіл, математичні моделі яких містять порівняно велике число лінійних рівнянь. Для таких кіл в роботі запропоно-

вано метод формування математичної моделі на основі макромоделей лінійних і нелінійних частин кола у вигляді рівнянь вищих порядків відносно зовнішніх величин. Метод дає можливість у два рази зменшити число нелінійних алгебраїчних рівнянь, які розв'язують на кожному кроці дискретизації.

Розроблено метод формування дискретних макромоделей багатополосних підсхем, який базується на використанні узагальнених формул диференціювання з різницями назад. Метод дає можливість подати макромоделі нелінійних підсхем у вигляді різницевих рівнянь, які пов'язують дискретні значення невідомих на біжучому та на попередніх кроках інтегрування. Сукупність таких макромоделей для всіх підсхем дає можливість звести моделювання перехідних процесів до почергового розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, число яких дорівнює числу незалежних зовнішніх полюсів усіх підсхем.

Основою для одержання дискретних макромоделей є "неперервні" макромоделі (2) у вигляді рівнянь вищих порядків відносно зовнішніх величин. В результаті розкладу функцій f_{mk} в ряд Тейлора в околі точок t_ν та $t_{\nu-1}$, а також відповідних алгебраїчних перетворень, одержано лінеаризовану дискретну макромоделю підсхеми у вигляді матричного рівняння

$$A_{m\nu} \dot{X}_{m\nu} = C_{m\nu}, \quad (9)$$

де $A_{m\nu}$ — квадратна матриця, $A_{m\nu} = \|a_{mkj\nu}\|$; $\dot{X}_{m\nu}$ — матриця-стовпець дискретних значень незалежних зовнішніх величин підсхем на ν -му кроці дискретизації; $C_{m\nu}$ — матриця-стовпець дискретних значень автономних параметрів підсхеми на цьому ж кроці, причому

$$a_{mkj\nu} = \sum_{r=0}^{s_{mjk}} d_{mkj,\nu-1}^{(r)} \gamma_{j\nu r};$$

$$c_{mk\nu} = \sum_{j=1}^{2n_m} \sum_{r=0}^{s_{mjk}} d_{mkj,\nu-1}^{(r)} \left(\tilde{x}_{mj,\nu-1}^{(r)} - b_{mj\nu}^{(r)} \right) - f_{mkt,\nu-1} h_\nu.$$

Коефіцієнти $d_{mkj,\nu-1}^{(r)}$, $f_{mkt,\nu-1}$ та $b_{mj\nu}^{(r)}$ знаходимо за формулами

$$d_{mkj,\nu-1}^{(r)} = \left. \frac{\partial f_{mk}}{\partial x_{mj}^{(r)}} \right|_{t=t_{\nu-1}}; \quad f_{mkt,\nu-1} = \left. \frac{\partial f_{mk}}{\partial t} \right|_{t=t_{\nu-1}};$$

$$b_{mj\nu}^{(r)} = \sum_{i=1}^{\mu_{j\nu}} \sum_{l=0}^{\rho_{j\nu i}-1} \beta_{j\nu r i}^{(l)} \tilde{x}_{mj,\nu-i}^{(l)}.$$

Коефіцієнти $\beta_{j\nu r i}^{(l)}$ та $\gamma_{j\nu r}$, які входять в останні формули, залежать виключно від варіанту інтерполяційної сітки (тобто від параметрів $\mu_{j\nu}$ та $\rho_{j\nu i}$) в узагальненому методі ФДН та від величин останніх $\mu_{j\nu}$ кроків дискретизації. Числові значення параметрів $d_{mkj,\nu-1}^{(r)}$ та $f_{mkt,\nu-1}$ визначають на основі наближених дискретних значень всіх змінних, обчислених на попередніх кроках. З цього слідує, що коефіцієнти $a_{mkj\nu}$ у рівняннях (9) — неавтономні параметри дискретної макромоделі підсхеми — є функціями величин кроків дискретизації, а також дискретних значень всіх змінних та їх похідних на $\mu_{j\nu}$ попередніх кроках. Вільні члени $c_{mk\nu}$ в цих рівняннях — автономні параметри дискретної макромоделі — залежать від тих самих параметрів.

Сукупність рівнянь (9) (дискретних макромоделей) для всіх підсхем, на які розбите аналізоване коло, після визначення числових значень автономних та неавтономних параметрів разом із структурними рівняннями кола (рівняннями зв'язку), записаними для дискретного значення часу $t = t_\nu$, утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь, число яких відповідає числу невідомих. В результаті розв'язування цієї системи рівнянь методами, що враховують властиву для електронних кіл розрідженість матриці коефіцієнтів, можна знайти наближені дискретні значення незалежних зовнішніх величин всіх підсхем на ν -му кроці.

Визначено області доцільного використання запропонованого підходу до математичного моделювання перехідних процесів у нелінійному електричному колі, який базується на діакоптичних принципах

формування моделі у вигляді рівнянь вищих порядків та числовому методі розв'язування таких рівнянь без зведення до системи рівнянь першого порядку. На прикладі розв'язування ряду відомих тестових задач показано особливості та переваги такого підходу. Показано його ефективність для класу структурно-регулярних електричних кіл, тобто кіл, структурний граф яких складається з ряду ідентичних частин. До таких кіл відноситься велика кількість цифрових інтегральних схем, які побудовано із з'єднаних певним чином ідентичних блоків. В таких випадках найбільш ефективно використовуються макромоделі підсхем у вигляді рівнянь вищих порядків.

Запропонований підхід ефективний також при моделюванні високочастотних електричних кіл, в схемах заміщення яких різко зростає число враховуваних реактивних зв'язків. При цьому модель підсхеми, одержана за допомогою відомих методів, містить внутрішні змінні, число яких набагато більше числа незалежних полюсів підсхеми. Виключення внутрішніх змінних веде в цих випадках до суттєвого зменшення числа рівнянь та числа невідомих в математичній моделі.

До переваг узагальнених методів ФДН слід віднести те, що вони дають можливість знаходити розв'язок для моделей не зведених до нормальної форми (не розв'язаних в явному вигляді відносно старших похідних). Для цих методів не характерна також проблема стартової процедури, яка притаманна відомих багатокроковим методам і яка полягає в тому, що для початку роботи методу необхідні так звані розгінні точки — значення невідомих на декількох перших кроках, отримані за допомогою інших, частіше однокрокових, методів. Оскільки узагальнені методи ФДН включають багато варіантів, в тому числі і однокрокові, то на будь-якому кроці інтегрування завжди є можливість використовувати один із варіантів цього методу.

В сьомому розділі запропоновано нові числові методи для розв'язування задач небесної механіки. Методи базуються на уза-

гальнених формулах диференціювання і враховують специфіку моделей.

Математичні моделі, які використовуються при рішенні задач небесної механіки, представляють собою системи звичайних диференціальних рівнянь з похідними другого порядку

$$f_k(\{x_j, \dot{x}_j^{(2)}\}, j = 1, 2, \dots, n; t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.2)$$

Особливість цих рівнянь полягає в тому, що вони не містять перших похідних невідомих. Така специфіка моделей відкриває можливість для побудови спеціальних числових методів з покращеними експлуатаційними характеристиками.

Для розв'язування вказаних рівнянь в роботі розроблено числові методи, загальний вираз яких має вигляд

$$\ddot{x}_{j\nu}^{(2)} = \sum_{i=1}^{\mu_{j\nu}} (\beta_{j\nu i}^{(0)} \ddot{x}_{j,\nu-i} + \beta_{j\nu i}^{(2)} \ddot{x}_{j,\nu-i}^{(2)}) + \gamma_{j\nu 2} \ddot{x}_{j\nu}.$$

Використовуючи поліноміальну інтерполяцію з кратними вузлами одержано формули для обчислення коефіцієнтів методів

$$\beta_{j\nu i}^{(0)} = \frac{2p_{j\nu r v}}{h_\nu^2}, \quad \beta_{j\nu i}^{(2)} = 2p_{j\nu r v i}, \quad \gamma_{j\nu 2} = - \sum_{i=1}^{\mu_{j\nu}} \frac{2p_{j\nu r i}}{h_\nu^2},$$

причому елементи матриці $Q_{j\nu}$, оберненої до $P_{j\nu}$, знаходимо за формулою

$$q_{j\nu r l} = \begin{cases} \vartheta_{\nu\nu}^r, & v = 1, 2, \dots, \mu_{j\nu}; \quad l = 0; \\ \frac{r! \vartheta_{\nu i}^{r-2}}{(r-2)!}, & v > \mu_{j\nu}, \quad l = 2 \quad r \geq l; \\ 0, & v > \mu_{j\nu}, \quad l = 2, \quad r < l. \end{cases}$$

Для рівнянь третього порядку, що не містять окремих похідних невідомих, в роботі розроблено узагальнені методи ФДН, які враховують специфіку цих рівнянь і дозволяють уникнути виконання додаткових операцій з першими та другими похідними невідомих.

В цьому розділі розроблено також діакоптичний підхід до математичного моделювання глобального кругообігу вуглецю в біосфері, який базується на умовному розбитті планети на ряд регіонів і описі кожного з них своєю математичною моделлю. Враховується зв'язок сусідніх регіонів через атмосферу. Запропонований підхід розширює область адекватності моделі, дає можливість враховувати неоднорідність протікання біохімічних процесів у різних регіонах планети.

Запропоновано метод формування математичної моделі регіонального кругообігу вуглецю, який базується на розбитті кожного регіону на ряд трав'яних і лісових підсистем та враховує потоки вуглецю між окремими блоками цих підсистем. В модель входять також блоки, які відображають антропогенні і неантропогенні викиди вуглецю в атмосферу, а також притік вуглецю із сусідніх регіонів.

Розроблено метод формування математичної моделі глобального кругообігу вуглецю на основі регіональних моделей та рівнянь зв'язку, які відображають взаємний зв'язок сусідніх регіонів через атмосферу. При формуванні рівнянь зв'язку використовуються дані про "рози вітрів" в точках границі поділу регіонів. Для числового розв'язування рівнянь моделі пропонується використовувати алгоритм, який враховує латентність — суттєві відмінності в швидкостях протікання окремих складових досліджуваних процесів.

Розроблений діакоптичний підхід до моделювання кругообігу вуглецю дає можливість враховувати сезонні зміни параметрів моделі, специфічні відмінності окремих регіонів, а також дає можливість здійснювати імітаційне моделювання: впливу екологічних катастроф в окремих регіонах на клімат планети; результатів керованого і некерованого антропогенного впливу на природу; впливу на клімат планети таких факторів, як зміна площ сільськогосподарських угідь, вирубування лісів, лісові пожежі, меліоративні роботи та інші.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

В дисертації запропоновано і розвинуто новий науковий напрям — створення методів та засобів математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ на основі диференціальних рівнянь вищих порядків, які полягають у застосуванні нових підходів до формування моделей та нових числових способів розв'язування рівнянь вищих порядків без зведення їх до системи рівнянь першого порядку в нормальній формі. В рамках цього наукового напрямку отримано такі основні результати:

1. Показано, що існує ряд задач математичного моделювання (в механіці, електромеханіці, електротехніці та інших областях), в яких моделі досліджуваних процесів чи явищ зручно представляти у вигляді звичайних диференціальних рівнянь з похідними вищих порядків з заданими початковими умовами. На прикладі розв'язування задачі моделювання перехідного процесу в складному нелінійному електричному колі розглянуто нові діакоптичні підходи до побудови математичної моделі у вигляді рівнянь вищих порядків. При цьому:

- розроблено метод побудови математичної моделі багатополосної підсхеми у вигляді рівнянь вищих порядків, невідомими в яких виступають виключно зовнішні по відношенню до підсхеми величини; метод базується на диференціюванні та алгебраїчному перетворенні рівнянь змінних стану і дозволяє звести число рівнянь у моделі до мінімуму, що дорівнює числу незалежних полюсів підсхеми;

- розроблено метод одержання математичної моделі кола, як об'єднання підсхем, при описі їх рівняннями вищих порядків; розроблено алгоритм формування і розв'язування рівнянь для визначення початкових умов на основі початкових значень змінних стану.

2. Для математичних моделей з похідними вищих порядків розроблено новий клас гнучких багатокрокових числових методів, які базуються на узагальнених формулах диференціювання з різницями назад (узагальнені методи ФДН) і використовують апроксима-

цію невідомих інтерполяційними многочленами з кратними вузлами. Методи допускають неявну форму представлення моделей і відрізняються від відомих відсутністю процедури зведення рівнянь вищих порядків до системи рівнянь з похідними тільки першого порядку, яка веде до суттєвого збільшення розмірності задачі. На базі інтерполяційних многочленів Ерміта одержано вирази для наближених дискретних значень похідних. Дана оцінка локальної похибки узагальнених методів ФДН, яка встановлює зв'язок між параметрами інтерполяційної сітки та порядком апроксимації числового методу. Розроблено методику визначення областей стійкості узагальнених методів ФДН, знайдено границі областей стійкості низки варіантів цих методів.

3. Показано, що в залежності від параметрів інтерполяційних сіток, які використовуються для апроксимації невідомих, можливі різноманітні варіанти реалізації узагальнених методів ФДН стосовно розв'язування моделей з похідними вищих порядків. Розроблено ряд часткових варіантів узагальнених методів ФДН: однокрокові варіанти; варіанти, які забезпечують найшвидший ріст степеня інтерполяційного многочлена; варіанти з мінімальним числом кроків назад; варіанти з постійною кратністю вузлів інтерполяції. Запропоновано спрощену реалізацію узагальненого методу ФДН для лінійних моделей вищих порядків. Показано, що розроблені методи є узагальненням відомих методів ФДН на рівняння вищих порядків і співпадають з ними в частковому випадку — варіант з постійною кратністю вузлів інтерполяції рівною одиниці при розв'язуванні рівнянь першого порядку.

4. Для моделей вищих порядків розроблено узагальнені методи ФДН, які базуються на апроксимації на кожному кроці інтегрування найстарших похідних інтерполяційними поліномами заданого степеня. Невідомі та молодші похідні апроксимують при цьому відповідними інтегралами вказаних поліномів. Методи відносяться до класу неявних багатокрокових методів, допускають неявну форму

запису рівнянь і є узагальненням відомих числових методів Адамса-Мултона на рівняння вищих порядків. Розроблено однокроковий варіант та варіанти, в яких для знаходження невідомих на біжучому кроці використовують значення старших похідних на кількох попередніх кроках, а також значення невідомих та їх молодших похідних на останньому кроці. Дана оцінка локальної похибки методів та визначено області стійкості ряду варіантів.

5. На основі запропонованих підходів до математичного моделювання динаміки фізичних процесів і явищ з використання диференціальних рівнянь вищих порядків розроблено алгоритми та програмні засоби для побудови моделей та їх числового розв'язування. Розроблено алгоритм формування моделі перехідного процесу у складному нелінійному електричному колі на основі опису підсхем макромоделями у вигляді рівнянь вищих порядків відносно виключно незалежних зовнішніх величин. При цьому число рівнянь і число невідомих в моделі зводиться до мінімуму, що дорівнює загальному числу незалежних полюсів усіх підсхем. Розроблено алгоритми числового інтегрування нелінійних і лінійних моделей вищих порядків на основі узагальнених методів ФДН. Алгоритми допускають розв'язування жорстких систем рівнянь та алгебро-диференціальних рівнянь вищих порядків. Одержано вирази, які дозволяють оцінити число арифметичних операцій, що виконуються на кожному кроці числового інтегрування лінійних однорідних математичних моделей узагальненими методами ФДН та рядом відомих числових методів. Показано, що переваги розроблених методів зростають із збільшенням числа рівнянь в системі та з ростом максимальних порядків похідних.

6. На прикладі розв'язування задач математичного моделювання перехідних процесів у складних нелінійних електричних колах проілюстровано використання запропонованого підходу, який базується на діакоптичних принципах формування моделі у вигляді рівнянь вищих порядків та на новому класі числових методів розв'язування

таких рівнянь без зведення до нормальної форми Коші. Використовуючи моделі вищих порядків одержано такі результати:

- розроблено метод одержання початкових умов при перетворенні операторних макромоделей лінійних підсхем у диференціальні рівняння; при цьому не використовуються в ролі проміжних рівняння змінних стану;

- для кіл із значною частиною лінійних елементів розроблено метод формування моделі на основі макромоделей лінійних і нелінійних частин кола у вигляді рівнянь вищих порядків відносно зовнішніх величин, який дає можливість суттєво зменшити розмірність моделі;

- розроблено метод формування дискретних макромоделей багатополосних підсхем, який базується на використанні узагальнених формул диференціювання з різницями назад; метод дає можливість представити макромоделі нелінійних підсхем у вигляді різницевих рівнянь, які пов'язують дискретні значення невідомих на біжучому та на попередніх кроках інтегрування.

- на прикладі розв'язування відомих тестових задач проілюстровано особливості та переваги розробленого підходу; показано, що запропоновані методи ефективні для класу структурно-регулярних електричних кіл, які складаються з ряду ідентичних частин, та високочастотних електричних кіл, в схемах заміщення яких різко зростає число реактивних елементів.

7. Розвинуті в роботі діакоптичні підходи до формування моделей та розроблені числові методи для рівнянь вищих порядків використано для розв'язування задач небесної механіки та екології:

- для задач моделювання у небесній механіці розроблено числові методи, які не використовують перших похідних невідомих і базуються на узагальнених формулах диференціювання з різницями назад; для рівнянь третього порядку, що не містять окремих похідних невідомих, розроблено узагальнені методи ФДН, які враховують специфіку цих рівнянь і дозволяють уникнути виконання

додаткових операцій з першими та другими похідними;

- розроблено діаоптичний підхід до моделювання глобального кругообігу вуглецю в біосфері, який базується на розбитті планети на ряд регіонів і описі кожного з них своєю математичною моделлю; розроблено метод формування моделі регіонального кругообігу, а також метод побудови моделі глобального кругообігу на основі регіональних моделей та рівнянь зв'язку, які відображають взаємний зв'язок сусідніх регіонів через атмосферу; запропонований підхід розширює область адекватності моделі, дає можливість враховувати неоднорідність протікання біохімічних процесів у різних регіонах планети.

Розроблені в роботі методи та алгоритми дають можливість формувати моделі динамічних процесів у вигляді рівнянь вищих порядків і розв'язувати їх без зведення до системи першого порядку більшої розмірності, а тим самим вони зменшують обсяги обчислювальних затрат, спрощують процес числового моделювання і роблять його результати більш наочними.

Основні положення дисертації опубліковано в роботах:

1. Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Семотюк В.Н. Моделирование электрических цепей методом подсхем.- Киев: Наук. думка, 1991.- 176 с.
2. Bun R.A. Information technologies for the simulation of complex non-linear electrical circuits // Pattern Recognition and Image Analysis.- 1994.- V. 4.- N. 3.- P. 309-316.
3. Bun R.A., Vasil'yev Ye.D. A numerical method for solving differential equations with derivatives of any order // Computation Mathematics and Mathematical Physics.- 1992.- N. 3.- V. 32.- P. 317-330.
4. Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Дуценко В.К. Моделирование и оптимизация крутизны характеристики мощного СВЧ МДП-транзистора // Электронное моделирование.- 1993.- N 6.- С. 84-86.
5. Бунь Р.А. Дискретные макромодели многополюсных подсхем на основе одношагового варианта метода ОФДН // Электронное моделирование.- 1994.- N 2.- С. 29-33.

6. Бунь Р.А., Васильев Е.Д. Моделирование электрических цепей методом подсхем на основе дифференциальных уравнений высокого порядка // Изв. вузов СССР. Электромеханика.- 1991.- N 9.- С. 45-46.
7. Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Дущенко В.К. Залежність крутизни характеристики потужного НВЧ польового транзистора від його фізико-топологічних параметрів // Теоретич. електротехніка. - Вип. 52.- 1995.- С. 121-133.
8. Бунь Р.А. Числове моделювання електричних кіл методом УФДН з постійною кратністю вузлів інтерполяції // Теоретич. електротехніка.- Вип. 52.- 1995.- С. 19-30.
9. Бунь Р.А. Определение начальных условий в случае описания цепи математической моделью, составленной на основе макромоделей подсхем // Теоретич. електротехніка.- 1987.- Вип. 43.- С. 148-154.
10. Блажкевич Б.И., Бунь Р.А. Формирование макромоделей нелинейных многополюсных подсхем, дополненных уравнениями начальных условий, на основе их математических моделей в виде уравнений переменных состояния // Теорет. електротехніка.- 1987.- Вип.42.- С. 68-75.
11. Бунь Р.А. Анализ локальной погрешности метода ОФДН // Отбор и обработка информации.- 1993.- Вип.9.- С. 32-37.
12. Бунь Р.А., Васильев Е.Д., Семотюк В.Н. Моделирование электрических цепей на основе макромоделей линейных и нелинейных подсхем в виде дифференциальных уравнений повышенного порядка // Отбор и обработка информации.- Вип 6.- 1991.- С. 34-38.
13. Бунь Р.А. Преобразование операторных макромоделей линейных подсхем в дифференциальные уравнения, дополненные уравнениями начальных условий // Отбор и передача информации.- 1987.- Вип. 76.- С. 68-72.
14. Босик Л.В., Бунь Р.А. Одношаговый метод ОФДН для решения системы линейных дифференциальных уравнений высших порядков // Отбор и обработка информации.- 1993.- Вип.9.- С. 23-27.
15. Васильев Е.Д., Бунь Р.А. Формирование математической модели электрической цепи на базе макромоделей многополюсных подсхем // Отбор и обработка информации.- 1988.- Вип. 1.- С. 52-54.

16. Бунь Р.А., Васильев Е.Д. Алгоритм анализа электронных схем с инжекционным питанием по постоянному току // Отбор и передача информации.- 1983.- Вып. 68.- С. 37-41.
17. Бунь Р.А. Численный метод моделирования электрических цепей, основанный на описании подсхем уравнениями относительно внешних величин / Теория и математические модели электрических цепей и интегральных схем.- Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1988.- С. 55-64.
18. Блажкевич Б.И., Бунь Р.А., Васильев Е.Д. Численный метод решения дифференциальных уравнений с высшими производными / Теория и применение моделирующих систем : Труды Всес. науч.-техн. конф. "Моделирование - 85: Теория. Средства. Применение". Киев: Наук. думка, 1986.- С. 65-75.
19. Бунь Р.А., Семикіна А.В. Стійкість числових методів розв'язування рівнянь вищих порядків / Проблеми фізическої і біомедицинської електроніки: Сб. докл. Міжнарод. науч.-техн. конф.- Київ, 1996.- С. 169-172.
20. Блажкевич Б.И., Бунь Р.А. Численный метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольным порядком производных.- Львов, 1986.- 64 с.- (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т; N 111).
21. Бунь Р.А., Шереметьев С.С. Числовий метод розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків на основі апроксимації вищих похідних поліномами Ерміта.- Львів: ФМІ, 1993.- 28 с.- (Деп. в ДНТБ України 18.10.93, N 2014 Ук93).
22. Васильев Е.Д., Бунь Р.А. Программа решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих производные высокого порядка.- Киев, 1988.- 97 с.- (Деп. в ГосФАП СССР 30.12.88, N 50890000688).
23. Программа анализа интегральных схем с инжекционным питанием в режиме постоянного тока / Е.Д.Васильев, И.В.Мелехов, Р.А.Бунь и др. // АН УССР. Ин-т кибернетики. Физ.-мех. ин-т.- Киев, 1984.- 170 с.- (Рук. деп. в ГосФАП СССР 05.04.84, N П007360).
24. Программа решения системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих производные высокого порядка / Б.И.Блажкевич.

Е.Д.Васильєв, Р.А.Бунь и др.// АН УССР. Ин-т кибернетики. Физ.-мех. ин-т.- Киев, 1987.- 125 с.- (Рук. деп. в ГосФАП СССР 10.09.87, N. 50880000230).

25. Bun R.A. Numerical methods for modelling electrical circuits on the basis of high-order differential equations / The New Information Technologies in Science, Education, Medicine and Business: The XXIst International Conference, Gurzuf, 1994.- Moscow, 1994.- P. 117-118.
26. Bun R., Sheremetyev S. Generalized BDF methods for equations that don't include derivatives of the first or the second order / Second Ukrainian Conference on Automatic Control.- V. 2.- Lviv, 1995.- P. 17-18.
27. Vasilyev Ye. D., Bun R.A. Radioelectronic circuits modelling on the basis of high-order differential equations / The Integration of Purpose Specialists' Training Systems and Automation Technical Systems of Various Purpose: The Intern. Conf., Alushta, 1990.- Moscow, 1990.- P. 75.
28. Бунь Р.А. Моделювання нелінійних електричних кіл на підставі звичайних диференціальних рівнянь високих порядків / Перша міжнар. наук.-техн. конф. "Математичне моделювання в електротехніці й електроенергетиці": Тез. доп.- Львів, 1995.- С. 30-31.
29. Бунь Р.А. Діакоптичний підхід до числового моделювання передніх процесів у нелінійному електричному колі з використанням макромоделей підсхем / Інформаційні технології і системи: Перша міжнар. конф.- Т.1.- Львів: ФМІ НАН України, 1994.- С. 99-101.
30. Бунь Р.А. Моделювання нелінійних електричних кіл з використанням дискретних макромоделей підсхем / I-а Українська конференція з автоматичного керування: Київ, 18-23 травня 1994: Тез. доп.- Київ: Ін-т кибернетики, 1994.- Т.2.- С. 266.
31. Бунь Р.А. Одношаговий варіант реалізації метода ОФДН / Распараллеливание обработки информации: Шестая Всес. школа-семинар: Львов, 1987: Тез. докл.- Львов: Физ.-мех.ин-т, 1987.- Ч.1.- С.117-118.
32. Бунь Р.А., Дачук В.С. Діакоптичний підхід при моделюванні кругообігу біосферного вуглецю в задачах управління екологічними системами / Друга українська конференція з автоматичного керування "Автоматика-95": Праці.- Т. 2.- Львів, 1995.- С. 15-16.

33. Бунь Р.А., Дачук В.С. Математичне моделювання кругообігу вуглецю в біосфері / Всеукр. наук. конф. "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях": Тези доп.- Львів, 1995.- Ч. 3.- С. 17-18.
34. Бунь Р.А. Распараллеливание алгоритма при численном решении дифференциальных уравнений, содержащих производные высокого порядка, с использованием интерполлиционного полинома Эрмита / Распараллеливание обработки информации: Пятая Всес. школа-семинар, Львов, 1985: Тез. докл.- Львов: Физ.-мех. ин-т, 1985.- Ч. IV.- С. 109-110.
35. Бунь Р.А. Численные методы решения дифференциальных уравнений высших порядков в задачах нелинейной электротехники / Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. IV науч.-техн. конф.- Киев: Ин-т проблем моделир. в энергет. АН Украины, 1992.- С. 83-84.
36. Бунь Р.А., Шереметьев С.С. Дискретні макромоделі багатополосних підсхем на основі узагальнених методів ФДН / Міжнар. наук.-техн. конф. "Проблеми фізичної і біомедичної електроніки".- Київ, 1995.- С. 77-78.

Особистий внесок автора. В роботах, написаних у співавторстві, здобувачу належить: в роботах [1,6,12,15] – основні положення методів математичного моделювання з використанням рівнянь вищих порядків; в роботі [3] – основні положення узагальнених методів ФДН; в роботах [14,19,21,26,36] – постановка задачі і здійснення основних теоретичних досліджень; в роботах [4,7] – одержані математичні моделі та результати числових експериментів; в роботах [32,33] – підходи до побудови моделі глобального кругообігу вуглецю на базі моделей регіонального кругообігу; в роботах [22-24] – розробка основних алгоритмів та їх програмна реалізація; в роботах [10,16,18,20,27] автори мали однаковий творчий доробок.

Bun R.A. Mathematical modelling dynamics of physical processes

and phenomena on the basis of higher-order differential equations. The thesis of a doctor degree of technical sciences on speciality 05.13.02 – mathematical simulation in scientific researches. Physical and Mechanical Institute of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 1996.

The thesis is devoted to elaboration of a new approach — a creation of methods and software for mathematical modelling dynamics of physical processes and phenomena on the basis of higher-order differential equations. New diaoptical methods for forming higher-order models, and new class of multistep implicit numerical methods for solving such equations without transformation to a system of the first order equations are created. The methods are based on generalized backward differentiation formula, and use polynomial interpolation with multipole nodes. Main variants of these methods realization are carried out. Their local errors are investigated, and their stability domains are found. The suggested approaches are applied for creation of mathematical models of transient processes in electrical circuits, solving equations for problems of celestial mechanics, and diaoptical modelling carbon cycle in the biosphere.

Бунь Р.А. Математическое моделирование динамики физических процессов и явлений на основании дифференциальных уравнений высших порядков. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.02 – математическое моделирование в научных исследованиях. Физико-механический институт НАН Украины, Львов, 1996.

Диссертация посвящена разработке нового научного направления — создание методов и программных средств математического моделирования динамики физических процессов и явлений на основании дифференциальных уравнений высших порядков. При этом разработаны новые диаоптические методы формирования моделей высших порядков и новый класс многошаговых неявных численных

методов решения таких уравнений без сведения к системе уравнений первого порядка. Методы основаны на обобщенных формулах дифференцирования с разностями назад и используют полиномиальную интерполяцию с кратными узлами. Разработаны основные варианты реализации методов, исследованы их локальные погрешности и найдены области устойчивости. Предложенные подходы использованы для создания математических моделей переходных процессов в электрических цепях, для решения уравнений небесной механики и для диакоптического моделирования кругооборота биосферного углерода.

Ключові слова: математичне моделювання, динаміка, диференціальне рівняння, похідна вищого порядку, числовий метод.



АВ 35.657

Підп. до друку 5.09.96 Формат 60×84/16 Папір 8/мх. Друк офсетний
Умовн. друк. арк. Обл. вид. арк. Зам. № 313 Тираж 100

Віддруковано у виробничо-поліграфічному відділі Льв ЦНТЕІ