

Национальная академия наук Украины  
Институт прикладной математики и механики

На правах рукописи

**ЛЕНЕНКО Дмитрий Давыдович**

**ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ВОЗМУЩАЮЩИХ МОМЕНТОВ**

01.02.01 - теоретическая механика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Донецк - 1996

ЛВ. 35.684

Работа выполнена в Институте проблем механики РАН и Одесской государственной академии холода.

Научные консультанты: академик, доктор физико-математических наук, профессор Черноусько Ф.Л.; доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Акуленко Л.Д.

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, профессор Белецкий В.В.
- доктор физико-математических наук, Вербова В.Е.
- доктор физико-математических наук, профессор Илшкин А.А.

Ведущая организация:

- Институт математики НАН Украины

Защита диссертации состоится "20" ноября 1996 года в 15 часов на заседании Специализированного Совета Д.06.01.01 по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук в Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, Донецк, ул.Р.Луксембург, 74.

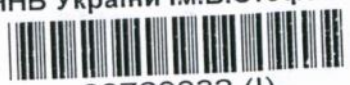
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Автореферат разослан "24" сентября 1996г.

Ученый секретарь  
Специализированного  
Совета  
кандидат физ.-мат. наук

*А.И.Марковский* А.И.Марковский

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00760032 (1)

### ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В работе исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела относительно неподвижной точки под действием моментов сил различной физической природы. Рассматриваются движения твердого тела, близкие к случаям Эйлера-Пуансо и Лагранжа, при наличии малых возмущающих моментов, обусловленных влиянием: а) сопротивляющейся среды; б) полостей, заполненной вязкой жидкостью; в) подвижной массы, соединенной с телом упругой связью с вязким или квадратичным трением; г) светового давления; д) момента, постоянного в связанных осях; е) распределения масс, близкого к случаю Лагранжа, и некоторых сочетаний вышеуказанных возмущающих факторов.

Также задачи возникают в связи с изучением движения спутников относительно центра масс, в вопросах ориентации и стабилизации космических аппаратов, в динамике гармокопов. Дифференциальные уравнения этих систем нелинейны и их последовательное рассмотрение серьезные математические трудности. Асимптотические методы являются мощным аппаратом исследования проблем динамики твердого тела.

Исследования в указанных направлениях ведутся в течение ряда лет. Задачам эволюции вращательного движения твердых тел (спутников) относительно центра масс под действием различных возмущений посвящены работы В.В.Белозерского, В.Г.Демина, В.И.Козлякова, В.В.Румишвара, В.А.Сарычева, Ф.И.Черноуцкого, Л.Д.Акулиничко, А.И.Кобрина, А.М.Ковалева, Е.Г.Мартыненко, А.Я.Сарченко, В.В.Сазонова, В.В.Сидоренко, В.А.Самсонова, Г.Г.Денисова, В.М.Урицына, А.И.Бейтштадта, М.И.Пивоварова, Кале Т. Р., Робертсон В.Р., Naseltine W.R., Thomas W.T., Colombo G. и других. Здесь упомянуты авторы лишь тех работ, к которым наиболее близка диссертация.

ИВ М. В. Стефанюк  
АН України

Цель работы заключается в исследовании эволюции возмущенных вращательных движений твердого тела, близких к случаям Эйлера-Пуансо и Лагранжа под действием моментов сил различной природы.

Методы исследования. Для анализа нелинейной системы уравнений движения применяется метод усреднения. Для использования метода усреднения уравнения движения твердого тела необходимо привести к стандартному виду систем с одной или несколькими вращающимися фазами, т.е. разделить все переменные на медленные и быстрые. Последующий анализ усредненной системы проводится при помощи качественных и аналитических методов теории дифференциальных уравнений и численного интегрирования.

Научная новизна полученных результатов состоит в следующем:

1. Изучено быстрое вращение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Обнаружены и исследованы квазистационарные движения.

Рассмотрено быстрое движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде несимметричного тяжелого твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости.

2. Проведен анализ движения твердого тела, несущего подвижную точечную массу, соединенную с телом упругой связью с квадратичным трением.

3. Исследовано вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления.

Изучена эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления в случае, когда форма космического аппарата представляет собой тело вращения. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом

произвольного порядка.

4. Предложена процедура усреднения по движению Лагранжа при произвольных начальных условиях для возмущений, допускающих усреднение по углу нутации. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений.

5. Исследованы возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Изучены случаи различных порядков малости и одинаковых порядков малости проекция вектора возмущающего момента. Рассмотрены примеры.

6. Проведено исследование возмущенных вращений твердого тела, близких к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации  $\theta$ . Рассмотрен пример восстанавливающего момента  $k(\theta)$  - линейная функция и тягость.

7. Исследованы задачи оптимального торможения вращений твердых тел с внутренними степенями свободы. Рассмотрено твердое тело  $\sigma$ : а) подвижной массой, соединенной с телом упругой связью с вязким или квадратичным трением; б) полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и некоторые сочетания приведенных возмущений.

Практическая ценность диссертации заключается в том, что в ней дан качественный и количественный анализ движения твердого тела под действием ряда возмущений, встречающихся на практике в динамике спутников и гироскопов. Результаты диссертации могут найти приложения при исследовании движений спутников и гироскопов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзных научных конференциях "Проблемы нелинейных колебаний механических систем" (Киев - 1974, 1978), на универ-

битетской школе МГУ "Методы исследования стационарных движений механических систем" (Колыбакино - 1979), на II и III республиканских симпозиумах по дифференциальным и интегральным уравнениям (Одесса - 1978, 1982), на II и IV республиканских совещаниях по динамике твердого тела (Донецк - 1981, 1984), на Гагаринских научных чтениях по космонавтике и авиации (Москва - 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1988), на IV и VI Всесоюзных конференциях по управлению в механических системах (Москва - 1982, Львов - 1988), на Всесоюзной конференции "Современные вопросы математики и механики и приложения" (Москва - 1983), на X Международной конференции по нелинейным колебаниям (Варна - 1984), на Всесоюзных конференциях "Современные проблемы информатики, вычислительной техники и автоматизации" (Москва - 1985, 1988, 1991), на Всесоюзных и Всероссийской конференциях "Современные проблемы механики и технологии машиностроения" (Москва - 1986, 1989, 1992), на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент - 1986), на Всесоюзных конференциях "Нелинейные колебания механических систем" (Горький - 1987, 1988), на республиканской научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (Одесса - 1987), на XII, XIII, XIX и XX Научных чтениях по космонавтике (Москва - 1988, 1994, 1995, 1996), на Международной научной школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Иркутск - 1989), на Всесоюзной конференции "Современные проблемы физики и ее приложения" (Москва - 1990), на республиканской конференции "Динамика твердого тела и устойчивость движения" (Донецк - 1990), на научных семинарах кафедры теоретической механики МГУ под руководством академика В.В.Румянцова, профессора В.В.Белешко, на научном семинаре по теории управления и оптимизации Института проблем механики РАН под ру-

ководством академика Ф.Л.Черноустько.

Публикации. Основные результаты диссертации публиковались в работах [1 - 17].

Структура и объем работы. Диссертация содержит 328 страниц машинописного текста. Основной текст диссертации состоит из введения, шести глав, заключения и приложений на 262 страницах. Диссертация содержит также приложение (5 страниц), список литературы из 226 наименований и 51 фигуру.

#### Содержание работы

Во введении дается обзор работ, близких по теме к данной диссертации, а также обсуждается круг вопросов, рассматриваемых в диссертации.

В первой главе исследуются быстрые вращения твердого тела под действием внешних и внутренних диссипативных моментов. В качестве невозмущенного движения во всех задачах данной главы рассматривается свободное движение Эйлера-Пуансо, влияние возмущений учитывается методом усреднения по движению Эйлера-Пуансо. Рассматриваются возмущения, обусловленные влиянием: диссипативного момента, возникающего при вращении тела в среде с линейным сопротивлением, момент силы тяжести, а также момент сил, обусловленных наличием вязкой жидкости в полости твердого тела.

В § 1 проведена оценка влияния моментов возмущающих сил, действующих на вращающееся твердое тело. Рассматриваются моменты гравитационных сил и сила светового давления. Даны оценки возмущений, обусловленных: 1) вязкой жидкостью в полости тела; 2) подвижной массой, соединенной с телом упругой связью с вязким трением; 3) динамической несимметрией тела.

В § 2 рассматривается быстрое движение вокруг неподвижной

точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Движение тела состоит из движения Эйлера-Пуансо вокруг вектора кинетического момента с медленно убывающей величиной кинетического момента и кинетической энергией, и из движения самого вектора кинетического момента. Изменение кинетической энергии и модуля кинетического момента зависят только от сопротивления среды. Угловая скорость вращения вектора кинетического момента зависит от действия силы тяжести и силы сопротивления среды.

В результате применения метода усреднения получается автономное уравнение для модуля эллиптических функций  $k$ , описывающее движение конца вектора кинетического момента  $G$  на сфере радиуса  $G$

$$\frac{dk^2}{d\xi} = (1-\varepsilon)(1-k^2) - [(1-\varepsilon) + (1+\varepsilon)k^2] \frac{E(k)}{K(k)} \quad (1)$$

Здесь величина  $\varepsilon$  зависит от главных моментов инерции тела и диагональных коэффициентов матрицы момента сопротивления вращения,  $\xi$  - безразмерная переменная,  $K(k)$ ,  $E(k)$  - полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Анализ этого уравнения позволяет найти квазистационарные движения, в которых движение в целом затухает (кинетический момент и кинетическая энергия стремятся к нулю), но характер движения тела вокруг вектора кинетического момента остается неизменным.

В § 3 исследуется быстрое движение вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде несимметричного тяжелого твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Анализ усредненных уравнений движения показывает, что кинетическая энергия  $T$  и величина кинетического момента тела  $G$  строго убывают. Система усредненных уравнений для  $G$  и  $k^2$  ( $k$  - модуль эллиптических функций) интегрируется численно. Проведен численный

анализ скорости стремления к нулю величин  $k^2$  и  $G$  при различных начальных значениях переменной  $k^2$ . Рассматривается также случай осесимметричного тела.

Во второй главе изучаются различные случаи движения твердого тела с внутренними степенями свободы. В § 1 исследуется движение несимметричного твердого тела вокруг центра инерции, к которому в точке, расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи с вязким трением подвижная точечная масса. Результаты численного интегрирования полученных усредненных уравнений движения показывают, что движение тела стремится к вращению вокруг оси с наибольшим моментом инерции. Определено характерное время нелинейного процесса перестройки движения при наличии внутренних упругих и диссипативных сил.

В § 2 рассматривается движение свободного твердого тела, к которому в точке, неподвижно связанной с телом, прикреплена при помощи упругой связи с квадратичным трением подвижная масса. Получено векторное уравнение, описывающее изменение вектора абсолютной угловой скорости тела  $\vec{\omega}$ , в системе координат, связанной с телом

$$J_0^* \cdot \dot{\vec{\omega}} + (\vec{\omega} \times J_0^* \cdot \vec{\omega}) = \vec{\Phi}(\vec{\omega}) + O(\Omega^{-4}) \quad (2)$$

здесь  $J_0^*$  - тензор инерции твердого тела и массы  $m$ , функция  $\vec{\Phi}(\vec{\omega})$  является полиномом, содержащим четвертые и восьмые степени  $\vec{\omega}$ ,  $\Omega^2 = c/m$ ,  $c$  - коэффициент жесткости возвращающей упругой силы.

В § 3 рассматривается движение динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную массу, прикрепленную при помощи упругой связи с вязким трением к точке на оси симметрии. При помощи стандартной процедуры асимптотических разложений без

учета пограничных эффектов получены возмущенные уравнения вращений, близкие к случаю Эйлера для осесимметричного тела. Возмущающие моменты получаются путем сложения известных выражений; порядки малости величин возмущающих моментов различной природы предполагаются одинаковыми. Показано, что уравнения движения системы имеют первый интеграл, выражающий постоянство модуля вектора  $\vec{G}$  кинетического момента твердого тела с подвижной массой, совмещенной с точкой на оси симметрии, и затвердевшей жидкостью. Во всех случаях ось кинетического момента твердого тела в системе координат, связанной с телом, приближается к оси наибольшего момента инерции. В качестве частного случая изучается случай полной симметрии тела.

В § 4 рассматривается совместное влияние вязкой жидкости в полости и подвижной массы, соединенной с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией, на движение динамически симметричного твердого тела. Находится первый интеграл движения — модуль кинетического момента  $\vec{G}$ . Полученное дифференциальное уравнение для угла нутации интегрируется численно на ЭЦМ. Из приведенных графических зависимостей  $\theta(t)$  следует, что направление вектора кинетического момента в связанной с телом системе координат стремится к стационарному состоянию: к направлениям осей, соответствующим наибольшим моментам инерции.

В третьей главе исследуется влияние момента сил светового давления на вращение спутника относительно центра масс.

В § I изучается вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Проводится усреднение по движению Эйлера-Пуансо для нерезонансного случая. Показано, что момент сил светового давления совпадает с

моментом, действующим на спутник в гравитационном поле, при определенных значениях главных центральных моментов инерции

$$A' = B' = \frac{a_1 R_0^2 R_1^3}{3\mu R^2}, \quad C' = \frac{2a_1 R_0^2 R_1^3}{3\mu R^2} \quad (3)$$

Здесь  $A', B', C'$  - главные центральные моменты инерции спутника, находящегося в гравитационном поле,  $\mu$  - произведение постоянной всемирного тяготения на массу Земли,  $a_1$  - первая гармоника коэффициента момента сил светового давления,  $R$  - текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника,  $R_0$  - фиксированное значение  $R$ , например, в начальный момент времени,  $R_1$  - расстояние от центра Земли до центра масс спутника.

В § 2 с помощью метода усреднения исследуется эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления в случае, когда космический аппарат представляет собой тело вращения. При этом коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом произвольного порядка. Найден первый интеграл системы усредненных уравнений первого приближения для углов нутации  $\theta$  и собственного вращения  $\psi$

$$c = \sin^2 \theta (\mu - \sin^2 \psi) - 4\sigma_e \beta^{-1} G_0^2 f(\theta, \delta_0) \quad (4)$$

$$f(\theta, \delta_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+1} \sum_{k=0}^m A_{lmk} \left[ \frac{m}{2} \sum_{i=0}^{l-m} C_{l-m}^i \times \right. \\ \left. \times \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i} - \frac{1}{2} (l+1) \sum_{i=0}^{l-m} \frac{(-1)^i (\sin \theta)^{2(m+i)}}{m+i+1} \right] \times \\ \times (\sin \delta_0)^{2(l+1-m+k)} (\cos \delta_0)^{2(m-k)}$$

$$\sigma_e = \frac{a_{2e+1} R_0^2 (1-e^2)^{3/2}}{2(\ell+1)P^2}, \quad \mu = -\gamma/\beta$$

$$\beta = A^{-1} - B^{-1}, \quad \gamma = B^{-1} - C^{-1}$$

$$A_{\ell m k} = C_{2(\ell+1)}^{2m} C_m^k \frac{(2m-1)!!(2k-1)!![2(\ell+1-m)-1]!!}{(2m)!![2(k+\ell+1-m)]!!}$$

Здесь  $a_{2e+1}$  - нечетная гармоника коэффициента момента сил светового давления,  $e$  и  $P$  - эксцентриситет и фокальный параметр орбиты,  $A, B, C$  - главные центральные моменты инерции спутника.

В качестве примеров рассматривается учет нулевой и первой гармоник, четных и третьей гармоник коэффициента момента сил светового давления. Проведен численный и качественный анализ фазовой плоскости, выявлены новые качественные эффекты вращений спутника.

В четвертой главе исследуются возмущенные движения тяжелого твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. В § I описываются общие свойства усреднения по движению Лагранжа в случае возмущений произвольной природы. В отличие от методики усреднения по движению Эйлера-Пуансо, усреднение по движению Лагранжа позволяет рассматривать в качестве порождающего решения движение с немалыми по величине моментами внешних сил. Достаточными условиями возможности усреднения уравнений медленных переменных  $G_z, H, z$  только по углу нутации  $\theta$  для возмущенного движения Лагранжа являются требования

$$M_1 = pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^* \quad (5)$$

или

$$M_1 = F \sin \psi, M_2 = F \cos \psi, M_3 = M_3^* \quad (6)$$

налагаемые на моменты приложенных сил. Произвольные функции

$f, F, M_3^*$  имеют вид

$$f = f(G_z, H, z, \theta), F = F(G_z, H, z, \theta) \quad (7)$$

$$M_3^* = M_3^*(G_z, H, z, \theta)$$

и периодичны по  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . Здесь  $G_z$  - проекция вектора кинетического момента на вертикаль  $Oz$ ,  $H$  - полная энергия тела,  $z$  - проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии,  $\psi$  - угол собственного вращения.

Описана процедура усреднения уравнений для медленных переменных в первом приближении. Оказывается, что ряд прикладных задач допускает усреднение по одной переменной  $\theta$ .

Так, в § 2 рассматривается возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. В результате численного решения полученных усредненных уравнений показано, что под действием внешней диссипации твердое тело стремится к единственному устойчивому (нижнему) положению равновесия. Получено количественное описание нелинейного переходного процесса.

В § 3 в качестве примеров усреднения по движению Лагранжа рассматриваются движение твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и движение твердого тела под действием малого постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии.

В главе V исследуются возмущенные движения твердого тела; близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа при различных

$$M_1 = f(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = f(1) = f(\theta), M_2 = f(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = f(\cos 2\theta), M_3 = f(\sin 2\theta)$$

наборах и предположениях относительно порядка малости и величин возмущающих моментов. В § I рассматривается возмущенное движение Лагранжа при следующих исходных предположениях:

$$p^2 + q^2 \ll z^2, C z^2 \gg k, |M_i| \ll k (i=1,2), M_3 \sim k. \quad (8)$$

которые означают, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья - одного с ним порядка. В отличие от главы IV изучается случай быстро вращающегося тела, поэтому порождающим решением является не траектория движения в случае Лагранжа, а некоторое более простое решение. Неравенства (8) позволяют ввести малый параметр

$\varepsilon$  и положить

$$p = \varepsilon P, q = \varepsilon Q, k = \varepsilon K, \varepsilon \ll 1 \quad (9)$$

$$M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P, Q, z, \psi, \theta, \gamma, t) (i=1,2), M_3 = \varepsilon M_3^*$$

Соответствующая стандартная система является двухчастотной, причем отношение частот постоянно. Это позволяет применять метод усреднения аналогично случаю постоянных частот и рассматривать случаи нерезонансных и резонансных движений. В нерезонансном случае усредненная система первого приближения для медленных переменных имеет вид

$$\dot{\alpha} = \varepsilon A^{-1} M_1 - \varepsilon K C^{-1} z^{-1} b \cos \theta + \varepsilon K C^{-2} z^{-2} \sin \theta M_3^S \quad (10)$$

$$\dot{\beta} = \varepsilon A^{-1} M_2 + \varepsilon K C^{-1} z^{-1} a \cos \theta - \varepsilon K C^{-2} z^{-2} \sin \theta M_3^C$$

$$\dot{z} = \varepsilon C^{-1} M_3, \dot{\psi} = \varepsilon K C^{-1} z^{-1}, \dot{\theta} = 0$$

$$M_1(a, b, z, \psi, \theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_1^0 \cos \gamma + M_2^0 \sin \gamma) d\alpha d\beta$$

$$M_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (M_2^0 \sin \gamma - M_2^0 \cos \gamma) d\alpha d\gamma$$

$$M_3 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 d\alpha d\gamma, \quad M_3^S = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \sin \alpha d\alpha d\gamma$$

$$M_3^C = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} M_3^0 \cos \alpha d\alpha d\gamma$$

Здесь  $\alpha = P_0 - K C^{-1} z_0^{-1} \sin \theta_0 \sin \psi_0$ ,  $\beta = -Q_0 +$   
 $+ K C^{-1} z_0^{-1} \sin \theta_0 \cos \psi_0$ ,  $\gamma_0 = \text{not}$ ,  $n_0 = (C-A) A^{-1} z_0 \neq 0$ ,  
 $|n_0/z_0| \leq 1$ ,  $\psi, \theta, \varphi$  - углы Эйлера.  $P_0, Q_0, z_0, \theta_0, \psi_0$  -  
 начальные значения соответствующих переменных.

Переменные  $\gamma, \alpha$  определяются следующим образом

$$\dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad \alpha = \gamma + \varphi \quad (II)$$

Через  $M_i^0$  обозначены функции, полученные из  $M_i^*$  (см. (9))

$$M_i^0(\alpha, \beta, z, \psi, \theta, \alpha, \gamma, t) = M_i^*(P, Q, z, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i=1, 2, 3) \quad (12)$$

В качестве примеров развитой методики воспользуемся возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды, движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии, а также движение тела при распределении масс, близком к случаю Лагранжа.

В § 2 изучаются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии и возмущающие моменты малы по

сравнению с восстанавливающим. Вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Нерезонансное решение первого приближения дает тривиальный результат, оно затем уточняется путем расчета второго приближения. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений отвечающие: 1) случай тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости; 2) линейным внешним диссипативным моментам; 3) случай малого момента, постоянного в связанных осях; 4) распределению масс, близкому к случаю Лагранжа.

В § 3 описываются общие свойства усреднения по движению Лагранжа в случае псевдoreгулярной прецессии под действием возмущений произвольной природы. Исследуются движения, близкие к псевдoreгулярной прецессии в случае Лагранжа: а) в среде с линейной диссипацией; б) под действием постоянного момента, приложенного вдоль оси симметрии. Определена эволюция медленных переменных усредненной системы: осевой скорости вращения тела  $Z$ , проекции вектора кинетического момента на вертикаль  $G_2$ , полной энергии тела  $H$ . Найдены выражения корней кубического многочлена  $u_1, u_2$ .

В § 4 изучаются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярно прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации  $k(\theta)$ . Это обстоятельство не осложняет применения асимптотических подходов, поскольку угол нутации является медленной переменной. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Соответствующая порождающая система является двухчастотной и полностью интегрируется. Заметим, что отношение частот оказывается постоянным, что позволяет без затруднений обосновать применение метода усреднения в нерезонансном и резонансном случаях. Рассмотрен конкретный пример восстанавливающего момента,

зависящего от медленной переменной - угла нутации, линейная пружина и тяжесть. Проведено усреднение и проинтегрированы усредненные уравнения для медленных переменных, характеризующих эволюцию вращения твердого тела для конкретных случаев возмущающих моментов: а) постоянного момента, направленного вдоль оси;

б) момента сил симметричной линейной диссипации со стороны внешней среды. Получены аналитические выражения для составляющих

$P, Q$  вектора угловой скорости тела. Так, например, в случае б)

$$P = \exp(-\varepsilon I_1 A^{-1} t) [p_0 \cos(\gamma - \eta) - q_0 \sin(\gamma - \eta) + k_0 C^{-1} z_0^{-1} \sin \theta_0 \sin(\gamma - \eta - \varphi_0) + k C^{-1} z_0^{-1} \times \exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) \sin \theta_0 \sin \varphi] \quad (13)$$

Здесь  $A$  - экваториальный, а  $C$  - осевой моменты инерции относительно неподвижной точки,  $\varphi$  - угол собственного вращения,  $\varepsilon$  - малый параметр,  $I_1, I_3$  - некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела,

$$\gamma = \frac{c}{I_3} \frac{C-A}{A} \frac{z_0}{\varepsilon} [1 - \exp(-\varepsilon I_3 C^{-1} t)],$$

$$\eta = z_0^{-1} I_3^{-1} (K \cos \theta + 1/2 \sin \theta dK/d\theta) [\exp(\varepsilon I_3 C^{-1} t) - 1], \quad k(\theta) = \varepsilon K(\theta)$$

Согласно (13) и формуле для  $Q$  такого же вида слагаемые проекций  $P, Q$ , обусловленные начальными значениями  $p_0, q_0$ , затухают по экспоненте. В то же время проекция  $P, Q$  содержат экспоненциально возрастающие члены, пропорциональные восстанавливающему моменту  $k$ , что приводит к экспоненциаль-

ному росту величины  $(p^2 + q^2)^{1/2}$ .

В случаях а) и б) проведен полный анализ движений и отмечены качественные особенности движения.

§ 5 посвящен исследованию возмущенных вращательных движений, близких к регулярной прецессии в случае Лагранжа, в предположении, что восстанавливающий момент зависит от угла нутации и проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции одного порядка малости с восстанавливающим моментом. Получены и исследуются усредненные системы уравнений движения первого и второго приближений. Для движения тела в сопротивляющейся среде и под действием момента, постоянного в связанных осях, определена эволюция углов прецессии и нутации во втором приближении. При движении тела в сопротивляющейся среде выражение для угла прецессии можно записать в виде

$$\Psi_\varepsilon^\vee(t) = \Psi_0 + \varepsilon K_0 C^{-1} z_0^{-1} t + S^{(4)} \quad (14)$$

$$S^{(4)} = \varepsilon^2 t K_0^2 C^{-3} z_0^{-3} \cos \theta_0 + 1/2 \varepsilon^3 K_0 C^{-2} z_0^{-1} I_3 t^2 -$$

$$- \varepsilon C^{-1} A z_0^{-1} \operatorname{cosec} \bar{\theta}_0 \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) (a^{02} + b^{02})^{1/2} \times$$

$$\times \sin(\alpha^{(4)} + \sigma)$$

$$\alpha^{(4)} = CA^{-1} z_0 t - \varepsilon t K_0 C^{-1} z_0^{-1} \cos \theta_0 - 1/2 \varepsilon^2 A^{-1} I_3 \times$$

$$\times z_0 t^2 + \Psi_0, \quad \cos \sigma = b^{(4)} \exp(\varepsilon A^{-1} I_1 t) (a^{02} + b^{02})^{-1/2},$$

$$b^{(4)} = \exp(-\varepsilon A^{-1} I_1 t) (b^0 \cos \omega t + a^0 \sin \omega t),$$

$$\omega = 1/2 \varepsilon C^{-1} z_0^{-1} (2K \cos \theta + \sin \theta dK/d\theta)_{\theta=\theta_0}$$

В изученных случаях формулы для углов прецессии и нутации не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться нахождением первого приближения. Таким образом, построение второго приближения является существенным. Найденное слагаемое  $S^{(1)}$  в (14) и полученное слагаемое при исследовании движения тела под действием момента, постоянного в связанных осях, дополняют известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии  $\omega_p = K_0 C^{-1} z_0^{-1}$ .

В главе VI изучаются задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы. § I посвящен решению задачи активного торможения свободного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом вязкоупругой связью. Считается, что торможение вращений осуществляется при помощи управляющего момента, ограниченного по модулю, причем величина ограничения может быть переменной во времени. Показано, что оптимальный вектор тормозящего момента максимален по величине и направлен против вектора кинетического момента. Стабилизация твердого тела происходит за конечное время, величина которого определена явно.

В § 2 рассматривается случай связи между телом и массой с помощью линейной пружины жесткости  $C$  и демпфера с квадратичным трением. Определен оптимальный синтез управления торможением вращений тела. Установлено, что модуль кинетического момента системы убывает до нуля за конечное время. С помощью численного интегрирования уравнения для угла нутации показано, что вектор кинетического момента в связанной с недеформированным телом системе координат стремится к оси наибольшего момента инерции.

В § 3 исследуется задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Исследуются слу-

чая осесимметричного и несимметричного в невозмущенном состоянии тел. Определяются оптимальный закон управления  $\vec{u}$ , траектория  $\vec{\omega}(t)$  и время быстрогодействия  $T$ .

В § 4 изучается задача оптимального по быстроддействию торможения вращений динамически симметричного тела со сферической полостью, целиком заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса). Кроме того, тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется точечной массой, прикрепленной демпфером к точке на оси симметрии. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Рассматриваемая модель обобщает исследованные нами в § 1 и § 3 этой главы. Определены прецессионные вращения квазитвердого тела относительно оси в экваториальной плоскости. Для угла нутации  $\theta(t)$  получено представление

$$\theta' = \gamma (1-\tau)^2 \sin\theta \cos\theta [k(1-\tau)^2 \cos^2\theta + h] \quad (15)$$

$$\tau = t/T_0 \in [0, 1], \quad T_0 = G^0/\nu$$

$$k = G^{05} |A-C| \alpha / \nu, \quad h = G^{03} |A-C| \eta / \nu$$

$$0 \leq k, h < \infty, \quad \gamma = \text{sign}(A-C) = \pm 1$$

Здесь  $G^0$  - начальное значение модуля вектора кинетического момента,  $T_0$  - оптимальный момент времени,  $\nu = \text{const}$ ,  $A$  и  $C$  моменты инерции невозмущенного тела,  $\alpha$  и  $\eta$  положительные постоянные, характеризующие наличие вязкоупругого элемента и полости с вязкой жидкостью соответственно. Численным интегрированием уравнения (15) показано, что вектор кинетического момента в связанной с недеформированным телом системе координат стремится к оси наибольшего момента инерции.

В § 5 исследуется задача об оптимальном торможении вращений свободного твердого тела, несущего элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами. Предполагается, что тело содержит сферическую полость, заполненную жидкостью большой вязкости, и подвижную точечную массу, соединенную с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а масса лежит на оси симметрии. Асимптотическими методами нелинейной механики построена математическая модель управляемых движений гибридной системы: в квазистатическом приближении. Проведены анализ осевого вращения для управляемого движения тела и анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Получены качественные и количественные характеристики поведения угла нутации.

Основные результаты диссертации и ее положения, выносимые на защиту, сформулированы в заключении.

Таким образом, в диссертации решен ряд задач эволюции движения твердого тела под действием моментов сил различной природы. Проведено систематическое изучение влияния моментов внешних и внутренних сил, осуществлено развитие применения асимптотических подходов в динамике твердого тела. Основным аппаратом исследования явился метод усреднения, позволивший проанализировать существенно нелинейные движения. Предложены различные способы введения малого параметра при усреднении по движениям Эйлера-Пуансо и Лагранжа.

Основные результаты диссертации и ее положения, выносимые на защиту, состоят в следующем:

I. Исследовано быстрое вращательное движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Обнаружены квазистационарные движения, в которых

движение в целом затухает (кинетический момент и кинетическая энергия стремятся к нулю), но характер движения тела вокруг фактора кинетического момента остается неизменным.

2. Изучено совместное влияние сопротивляющейся среды и полости, заполненной жидкостью большой вязкости, на быстрое движение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела.

3. Исследовано движение несимметричного твердого тела вокруг центра инерции, к которому в точке, расположенной на одной из главных осей инерции, прикреплена при помощи упругой связи с вязким трением подвижная точечная масса.

Рассмотрено движение свободного твердого тела, к которому в точке, неподвижно связанной с телом, прикреплена при помощи упругой связи с квадратичным трением подвижная масса.

4. Исследовано движение динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и несущего подвижную массу, прикрепленную при помощи упругой связи с вязким трением к точке на оси симметрии.

Изучено совместное влияние вязкой жидкости в полости и подвижной массы, соединенной с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией, на движение динамически симметричного твердого тела.

5. С помощью метода усреднения исследовано вращательное движение динамически несимметричного спутника с осесимметричной поверхностью относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Показано, что момент сил светового давления совпадает с моментом, действующим на спутник в гравитационном поле, при определенных значениях главных центральных моментов инерции.

Изучена эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления. Рассматривается случай, когда форма космического аппарата представляет собой тело вращения. Коэффициент момента сил светового давления аппроксимируется тригонометрическим полиномом произвольного порядка. Найден первый интеграл системы усредненных уравнений первого приближения для углов нутации и собственного вращения.

6. Исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа. Приведены условия возможности усреднения уравнений движения по углу нутации, получена усредненная система уравнений. Рассмотрена модель возмущений, отвечающая движению тела в среде с линейной диссипацией.

7. Изучены возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Рассмотрен случай различных порядков малости проекций вектора возмущающего момента. Соответствующая стандартная система является двухчастотной, причем отношение частот постоянно. Это позволяет применять метод усреднения аналогично случаю постоянных частот и рассматривать нерезонансные и резонансные движения. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении. Рассмотрены примеры.

Исследован случай одинаковых порядков малости проекций вектора возмущающего момента. Специальным образом введен малый параметр, применен метод усреднения. Нерезонансное решение первого приближения дало тривиальный результат, оно уточнено путем расчета второго приближения. Рассмотрены конкретные механические модели возмущений.

8. Исследованы возмущенные движения твердого тела, близкие

к псевдорегулярной прецессии в случае Лагранжа.

9. Изучены возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент зависит от угла нутации. Рассмотрен случай различных порядков малости проекций вектора возмущающего момента. Обосновано применение метода усреднения в нерезонансном и резонансном случаях. Исследован конкретный пример восстанавливающего момента, зависящего от угла нутации, линейная пружина и тягость. Проведено усреднение и проинтегрированы усредненные уравнения для медленных переменных в случаях: а) постоянного момента, направленного вдоль оси; б) момента сил симметричной линейной диссипации со стороны внешней среды.

Изучен случай одинаковых порядков малости проекций вектора возмущающего момента. Получены и исследованы усредненные системы уравнений движения первого и второго приближений. Для движения тела в сопротивляющейся среде и под действием момента, постоянного в связанных осях, определена эволюция углов прецессии и нутации во втором приближении. Формулы для этих углов не содержат параметров возмущающих моментов, если ограничиться нахождением первого приближения. Полученные слагаемые дополняют известные из приближенной теории гироскопов выражения для угловой скорости прецессии.

10. Исследованы задачи оптимального торможения вращений твердых тел с внутренними степенями свободы. Решена задача активного торможения свободного твердого тела с подвижной массой, соединенной с телом вязкоупругой связью. Рассмотрен случай связи между телом и массой с помощью линейной пружины и демпфера с квадратичным трением. Исследована задача об оптимальном по быстройдействию торможении вращений свободного твердого тела со

сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости. Рассмотрены случаи осесимметричного и несимметричного в невозмущенном состоянии тел.

II. Изучена задача оптимального торможения вращений динамически симметричного тела, содержащего вязкоупругий элемент и полость, заполненную жидкостью большой вязкости. Управление вращениями производилось с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Получены качественные и количественные характеристики поведения угла нутации. Определены прецессионные вращения квазитвердого тела относительно оси в экваториальной плоскости. Исследована задача об оптимальном по быстрдействию торможении вращений динамически симметричного твердого тела со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, и подвижной массой, соединенной с телом посредством упругой связи с квадратичной диссипацией. Асимптотическими методами нелинейной механики построена математическая модель управляемых движений гибридной системы в квазистатическом приближении. Проведены анализ осевого вращения для управляемого движения тела и анализ вращений тела в экваториальной плоскости. Показано, что вектор кинетического момента в связанной с недеформированным телом системе координат стремится к оси наибольшего момента инерции.

По теме диссертация имеется 56 публикаций. Основные результаты опубликованы в следующих статьях:

1. Лешенко Д.Д. О движении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Прикл. механика. - 1975. - Т. II, в 3. - С. 89-94.
2. Лешенко Д.Д. О движении твердого тела с подвижной точечной массой // Изв. АН СССР. МТТ. - 1976. - в 3. - С. 37-40.
3. Акуленко Л.Д., Лешенко Д.Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой // Изв. АН СССР. МТТ. - 1978. - в 5. - С. 29-34.

4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа // ПММ. - 1979. - Т.43, № 5. - С.771-778.
5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ.-1982. - № 3. - С.5-13.
6. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата в сопротивляющейся среде // Прикл. механика. - 1982. - Т.18, № 7. - С.102-107.
7. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Некоторые задачи стабилизации тел с внутренними степенями свободы // Механика гироскопических систем. Республик. междуведомств. научно-техн. сборник. Киев. - 1983. - Вып.2. - С.90-97.
8. Лещенко Д.Д., Шамеев А.С. О движении спутника относительно центра масс под действием моментов сил светового давления // Изв. АН СССР. МТТ. - 1985. - № 1. - С.14-21.
9. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. - 1986. - № 5. - С.3-10.
10. Лещенко Д.Д., Шамеев А.С. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа // Изв. АН СССР. МТТ. - 1987. - № 6. - С.8-17.
11. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // ПММ. - 1990. - Т.54, № 2. - С.224-232.
12. Лещенко Д.Д., Саллам С.Н. Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. - 1990. - № 5. - С.16-23.
13. Leshchenko D.D. Perturbed rotational motion of a rigid body // The Lyapunov functions method and applications, J.Baltzer AG,

14. Лещенко Д.Д., Салтам С.Н. Некоторые задачи движения твердого тела с внутренними степенями свободы // Прикл. механика. - 1992. - Т.28, № 8. - С.81-86.
15. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1995. - № 2. - С.115-122.
16. Лещенко Д.Д. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. Теория и системы управления. - 1996. № 1. - С.80-85.
17. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Эволюция вращений трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием моментов сил светового давления // Изв. РАН. МТ. - 1996. - № 2. - С.3-12.

*Лещенко*

Лещенко Д.Д. Эволюция вращений твердого тела под действием возмущающих моментов.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 - теоретическая механика, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1996, рукопись.

Защищаются 17 работ, содержащие исследование эволюции возмущенных вращательных движений твердого тела, близких к случаям Эйлера-Пуансо и Лагранжа, под действием моментов сил различной природы. Такие задачи возникают в связи с изучением движения спутников относительно центра масс, в вопросах ориентации и стабилизации космических аппаратов, в динамике гироскопов.

Для анализа нелинейных систем уравнений движения применяется метод усреднения.

Изучено быстрое вращение вокруг неподвижной точки несимметричного тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде. Рассмотрено движение свободного твердого тела, несущего подвижную точку массы, соединенную с телом упругой связью с квадратичным трением. Исследована эволюция вращений динамически несимметричного спутника и трехосного спутника, близкого к динамически-сферическому, под действием момента сил светового давления. Рассматривается случай, когда форма космического аппарата представляет собой тело вращения. Разработан новый подход к исследованию возмущенных движений гироскопа Лагранжа для возмущений, допускающих усреднение по углу нутации. Изучены возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, когда восстанавливающий момент постоянен или зависит от угла нутации. Исследованы задачи оптимального торможения вращений твердых тел с внутренними степенями свободы.

Leshchenko D.D. The evolution of the rotations of a rigid body under the action of perturbed moments.

The competition Dissertation for the academic degree of the Doctor of the physico-mathematical sciences in speciality 01.02.01 - of the theoretical mechanics, Institute of the applied mathematics and mechanics NAS, Ukraine, Donetsk, 1996, the manuscript.

The 17 scientific papers carrying on the research of evolution of perturbed rotational motions of a rigid body that are close to Euler-Poinso or Lagrange cases when the body is under the action of moments of different nature forces are defended. Such problems take place in the investigation of the motion of satellite around its center of mass, in dynamics of gyroscopes.

The averaging method is employed for analysis of nonlinear systems of equations of motion. The high-speed rotation of an asymmetric heavy rigid body with a fixed point in a viscous medium is investigated. The motion of a free rigid body with a moving mass connected to the body by an elastic coupling with a square-law friction is considered. The evolution of rotations of an asymmetric satellite and tri-axial satellite that are close to dynamically spherical one under the action of solar radiation pressure is investigated. The case when the shape of the spacecraft is a body of revolution is analyzed.

A new approach is developed for the investigation of perturbed motions of Lagrange gyroscope for perturbations which assume averaging taking into account the angle of nutation. Perturbed rotational motions of a rigid body that are close to regular precession in the Lagrange case when the restoring moment is constant or depends on the nutation angle are considered. The problems of optimal braking of the rotations of the rigid bodies with internal degrees of freedom are investigated.

Ключові слова: тверде тіло, еволюція обертань, збурені моменти, метод усереднення, випадки Ейлера-Пуансо і Лагранжа, оптимальне гальмування.

*Diley*

АВ 22 804

Подписано к печати 19.06.96 г. Формат 1/16.  
Объем 2 п.л. Заказ № 416. Тираж 100.  
Напечатано на фабрике "Олимпия".

113201

AB 35.684

AB 35.684

*Index*

Литература по вопросам  
Оценки и учета в лесном хозяйстве  
Литература по вопросам "Оценки"