КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

УДК 517.929.4

МУСТАФАЄВА Рахіма

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНТЕРВАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОБМІНУ РІДИНИ

01.05.04 - системний аналіз і теорія оптимальних рішень,
фізико-математичні науки

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

Мустаф-

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Київському університеті
імені Тараса Шевченка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор ХУСАІНОВ Денис Яхйович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор ВАЛЄЄВ Кім Галямович
кандидат фізико-математичних наук,
ст. наук. сп. ОБОЛЕНСЬКИЙ Анатолій Юрійович

Провідна организація: Інститут математики НАН України, м.Київ

Захист відбудеться "31" жовтня 1996 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.01.01.20 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ-127, проспект Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд.40.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету, м.Київ, в.Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "30" сентября 1996 р.

Вчений секретар
спеціализованої вченої ради ЗІНЬКО П.М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Задачі побудови систем керування, властивості яких мало змінювались би при невеликих відхиленнях параметрів, виникали вже на початку розвитку теорії систем. Особливо гостро це питання постало після розвитку теорії оптимальних систем. Чисельні методи оптимізації виявилися чутливими до малих відхилень прийнятих допущень від існуючих і непрацездатними. Методи, що були вільними від цього, були названі робастними, тобто грубими, малочутливими. Зараз термін робастність набув більш широкого смислу. Він характеризує збереження деяких властивостей цілої множини систем, в тому числі, систем з параметрами, що приймають значення з деяких заданих інтервалів.

Суттєвою проблемою якісного аналізу систем є дослідження стійкості та керованості. Одним з основних методів дослідження стійкості є прямий метод О.М.Ляпунова. Він використовується при дослідженні систем звичайних диференціальних, різницевих, диференціально-різницевих рівнянь, рівнянь в частинних похідних, систем стохастичних рівнянь, процесів в загальних динамічних системах і т.д. Суттєвий вклад в його розвиток внесли М.Г.Четаєв, І.Г.Малкін, Є.А.Барбашин, М.М.Красовський, С.К.Персидський. Численні питання стійкості стохастичних систем, систем функціонально-диференціальних рівнянь, систем з розподіленими параметрами розглядалися в роботах К.Г.Валеєва, В.Б.Колмановського, Д.Г.Кореніввського, В.К.Ясинського, А.Ю.Оболенського. Дослідження систем великої розмірності проводилось у роботах В.М.Матросова, А.А.Мартинюка. Проблеми керування та стабілізації систем за допомогою прямого методу О.М.Ляпунова розв'язувались у роботах Б.М.Бублика, М.Ф.Кириченка, Ф.Г.Гаращенка, В.М.Кунцевича.

Дослідження стійкості систем, коефіцієнти яких можуть приймати значення з деяких фіксованих інтервалів, одержало широкий розвиток після публікації робіт В.Л.Харитонова. Ним були одержані красиві умови стійкості лінійних стаціонарних диференціальних рівнянь з інтервально заданими коефіцієнтами. Однак розповсюдження одержаних ним результатів на системи рівнянь, а також на рівняння інших видів зустріло значні труднощі.

Метою дисертації є розробка ефективних умов інтервальної стійкості систем лінійних звичайних диференціальних, різницевих та диференціально-різницевих рівнянь з запізненням та нейтрального типу; одержання оцінок інтервальної керованості диференціальних систем; розробка моделей динаміки обміну рідини екологічних систем та дослідження їх стійкості та керованості.

Наукова новизна. Одержані нові конструктивні умови інтервальної стійкості лінійних систем. Розглянуті задачі оцінки одержаних умов за допомогою оптимальних функцій Ляпунова. Досліджена задача керування лінійними системами за допомогою квадратичної функції Ляпунова.

Методи дослідження. Основним методом дослідження є другий метод О.М.Ляпунова з функцією квадратичного вигляду. При одержанні конкретних умов та розробці алгоритмів застосовувалися методи лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь та методів нелінійного програмування.

Теоретична і практична цінність роботи. Основні дослідження проводились у рамках науково-дослідної теми "Розробка та дослідження стійкості нетрадиційних динамічних систем", що проводилась згідно постанови Міністерства освіти України № 44 від 18 червня 1992 р.

Одержані в дисертації результати будуть використані при конструюванні систем водопостачання та керуванні режимами водообміну в Республіці Каракалпакстан.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на Українських конференціях "Моделювання та дослідження стійкості систем" (Київ, 1993, 1994, 1995, 1996), Міжнародній конференції пам'яті Г.Хана (Чернівці, 1994), Другій Кримській Міжнародній школі "Метод функцій Ляпунова та його застосування" (Симферополь, 1995), Республіканському семінарі з проблеми "Кібернетика" "Моделювання та оптимізація складних систем" (н.к. член.-кор. НАН України, проф. Бублик Б.М., проф. Наконечний О.Г.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 10 роботах.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновку та списку використаної літератури з 138 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі формулюється мета дисертаційної роботи, її актуальність. Обгрунтовується наукова та практична цінність питань, що розглянуті в роботі. Даються короткі огляди розвитку теорії стійкості систем диференціальних рівнянь з інтервально заданими параметрами, другого методу О.М.Ляпунова, теорії систем з відхиленням аргументу. Стисло викладається зміст дисертації за розділами.

В **першому розділі** одержані достатні умови інтервальної стійкості деяких типів динамічних систем.

У першому параграфі розглядається лінійна стаціонарна система вигляду

$$\dot{x} = (A+D)x, \ x \in R^n. \tag{I}$$

Тут $A = \{a_{ij}\}$ матриця з сталими коефіцієнтами, $D = \{d_{ij}\}$ матриця з коефіцієнтами, які можуть приймати значення з деякого матричного інтервалу $|d_{ij}| \leqslant \delta_{ij}$, $i,j = \overline{1,n}$.

Система (I) називається інтервально стійкою, якщо вона стійка при довільних матрицях D із заданого матричного інтервалу. Одержані наступні умови стійкості.

Т е о р е м а I. Нехай існує симетрична додатно визначена матриця H, для якої виконується нерівність

$$\frac{\lambda_{min}(-A^{T}\mathrm{H}-\mathrm{H}A)}{\lambda_{max}(\mathrm{H})} > 2\|D\|, \quad \|D\| = \max_{|d_{ij}|\leqslant\delta_{ij}} \Big\{|D|\Big\}.$$

Тоді система (I) інтервально стійка.

Тут і далі $\lambda_{max}(\cdot)$, $\lambda_{min}(\cdot)$ - екстремальні власні числа відповідних матриць, $\varphi(\mathrm{H}) = \lambda_{max}(\mathrm{H})/\lambda_{min}(\mathrm{H})$.

Конструктивність одержаної теореми залежить від вибору матриці H. Її знаходження зводиться до розв'язку оптимізаційної задачі:

$$\mathrm{H}^{*} = \arg \sup_{\mathrm{H}\in G(\mathrm{H})} \Big\{\varphi(\mathrm{H})\Big\}, \ \varphi(\mathrm{H}) = \frac{\lambda_{min}(-A^{T}\mathrm{H}-\mathrm{H}A)}{\lambda_{max}(\mathrm{H})}, \tag{2}$$

$$G(\mathrm{H}) = \Big\{ \mathrm{H}\colon \lambda_{min}(\mathrm{H})>0, \ \ \lambda_{min}(-A^{T}\mathrm{H}-\mathrm{H}A) > 0\Big\}.$$

Розглядається допоміжна задача

$$H_0 = \arg \sup_{H \in \bar{G}_1(H)} \left\{ \varphi_0(H) \right\}, \ \varphi_0(H) = \lambda_{min}(-A^T H - HA), \tag{3}$$

$$\bar{G}_1(H) = \left\{ H: \lambda_{min}(H) \geqslant 0, \ \lambda_{min}(-A^T H - HA) \geqslant 0, \ \lambda_{max}(H) \leqslant 1 \right\}.$$

Л е м а I. Якщо H^* розв'язок задачі (2), а H_0 розв'язок задачі (3), то $H_0 = \alpha H^*$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Л е м а 2. Задача оптимізації (3) має розв'язок.

Для розв'язку задачі (3) використовується функція Лагранжа

$$\mathfrak{J}(H, \beta) = \varphi_0(H) + \beta_1 \varphi_1(H) + \beta_2 \varphi_2(H), \tag{4}$$

$$\varphi_1(H) = \lambda_{max}(H) - 1, \ \varphi_2(H) = -\lambda_{min}(H), \ \beta_1 \geqslant 0, \ \beta_2 \geqslant 0.$$

Л е м а 3. Точка H_0 є розв'язком задачі (3) тоді і тільки тоді, коли існують $\beta_1^0 \geqslant 0$, $\beta_2^0 \geqslant 0$, при яких $(H_0, \beta_1^0, \beta_2^0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа (4).

При чисельній реалізації задачі оптимізації використовується метод узагальненого градієнту. Градієнтна множина функції $\varphi_0(H)$ складається з матриць F_0 вигляду

$$F_0 = \begin{bmatrix} y_0^T C[\Delta_{11}] y_0 & \cdots & y_0^T C[\Delta_{1n}] y_0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ y_0^T C[\Delta_{1n}] y_0 & \cdots & y_0^T C[\Delta_{nn}] y_0 \end{bmatrix},$$

$C[\Delta_{ij}] = -A^T \Delta_{ij} - \Delta_{ij} A$, Δ_{ij} - матриця, у якої (i,j) і (j,i) - елементи дорівнюють одиниці, а інші дорівнюють нулю, y_0- одиничний вектор, при якому квадратична форма $y_0^T C[H_0] y_0$ приймає мінімальне значення. Градієнтна множина $G_{\mathfrak{J}}$ функції Лагранжа (4) складається з матриць $F_0 + \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2$: $F_1 = x_1 x_1^T$, $F_2 = x_0 x_0^T$, x_0, x_1 - одиничні вектори, при яких $x^T H_0 x$ приймає мінімальне та максимальне значення.

Л е м а 4. Точка H_0 є розв'язком задачі (3) тоді і тільки тоді, коли існують β_1^0, β_2^0, при яких виконуються наступні умови.

I) Градієнтна множина $G_{\mathfrak{J}}^0$ функції Лагранжа $\mathfrak{J}(H, \beta)$ містить нульову матрицю, тобто $0 \in G_{\mathfrak{J}}^0$.

2) Виконуються умови $\beta_1^0\varphi_1(H_0) = 0$, $\beta_2^0\varphi_2(H_0) = 0$.

У другому параграфі розглядається система різницевих рівнянь

$$x_{k+1} = (A+D)x_k, \quad k = 0,1,2\ldots \tag{5}$$

Одержані такі умови інтервальної стійкості.

Л е м а 5. Нехай існує додатно визначена матриця H, для якої виконується нерівність

$$\frac{\lambda_{min}(H - A^T HA)}{\lambda_{max}(H)} > \|D\|(\|D\| + 2|A|).$$

Тоді система (5) інтервально стійка.

Знаходження матриці H зводиться до розв'язку оптимізаційної задачі

$$H^* = arg \sup_{H\in L(H)} \left\{ \varphi(H)\right\}, \quad \varphi(H) = \frac{\lambda_{min}(H - A^T HA)}{\lambda_{max}(H)}, \tag{6}$$

$$L(H) = \left\{ H: \lambda_{min}(H) > 0,\ \lambda_{min}(H - A^T HA) > 0\right\}.$$

Для її розв'язку розглядається допоміжна задача

$$H_0 = arg \sup_{H \in \bar{L}_1} \left\{ \varphi_0(H)\right\}, \ \varphi_0(H) = \lambda_{min}(H - A^T HA), \tag{7}$$

$$\bar{L}_1(H) = \left\{ H: \lambda_{min}(H) \geqslant 0,\ \lambda_{min}(H - A^T HA) \geqslant 0,\ \lambda_{max}(H) \leqslant 1\right\}.$$

Л е м а 6. Якщо H^* розв'язок задачі (6), а H_0 розв'язок (7), то $H_0 = \alpha H^*$, де $0 < \alpha \leqslant 1$.

Л е м а 7. Задача оптимізації (6) має розв'язок.

Для знаходження H_0 використовується функція Лагранжа та методи, що подібні до одержаних для диференціального рівняння (I).

В третьому параграфі розглядається інтервальна система диференціально-різницевих рівнянь з запізненням

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)x(t-\tau), \tag{8}$$

де $\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}$, $\Delta B = \{\Delta b_{ij}\}$ матриці, елементи яких можуть знаходитися в заданих інтервалах

$$|\Delta a_{ij}| \leqslant r_{ij}, \ |\Delta b_{ij}| \leqslant s_{ij}, \ i,j=\overline{1,n}.$$

Розв'язок $x(t)$ системи (8) називається асимптотично стійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що $|x(t)| < \varepsilon$, $t > 0$, лише $\|x(0)\|_\tau < \delta$ і $\lim\limits_{t \Rightarrow \infty} |x(t)| = 0$.

Тут

$$|x(t)| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}, \ \|x(0)\|_\tau = \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\left\{|x(s)|\right\}.$$

Система (8) називається асимптотично стійкою, якщо стійкий її нульовий розв'язок. Система (8) називається інтервально стійкою, якщо вона асимптотично стійка при довільних матрицях ΔA і ΔB із заданих інтервалів.

Одержані такі умови інтервальної стійкості.

Т е о р е м а 2. Нехай $A + B$ асимптотично стійка матриця і існує додатно визначена матриця H, при якій виконується нерівність

$$\lambda_{min}\left[-(A+B)^{T}H - H(A+B)\right] - 2\left[\|H(B-\Delta A)\| + \|H(B+\Delta B)\|\sqrt{\varphi(H)}\right] > 0, \quad (9)$$

$$\|H(B-\Delta A)\| = \max_{|\Delta a_{ij}|\leqslant r_{ij}}\left\{|H(B-\Delta A)|\right\}, \ \|H(B+\Delta B)\| = \max_{|\Delta b_{ij}|\leqslant s_{ij}}\left\{|H(B+\Delta B)|\right\}.$$

Тоді система (8) інтервально стійка при довільному запізненні $\tau > 0$, причому $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{\varphi(H)}$.

Т е о р е м а 3. Нехай $A + B$ асимптотично стійка матриця і існує додатно визначена матриця H, при якій виконується нерівність

$$\lambda_{min}\left[-(A+B)^{T}H - H(A+B)\right] - 2\|H(\Delta A+\Delta B)\| > 0,$$

$$\|H(\Delta A+\Delta B)\| = \max_{|\Delta a_{ij}|\leqslant r_{i},\,|\Delta b_{ij}|\leqslant s_{ij}}\left\{|H(\Delta A + \Delta B)|\right\}.$$

Тоді при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{\lambda_{min}\left[-(A+B)^{T}H-H(A+B)\right] - 2\|H(\Delta A+\Delta B)\|}{2\|H(B+\Delta B)\|\left[\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|\right]\sqrt{\varphi(H)}}, \quad (10)$$

система (8) інтервально стійка. Причому

$$\delta(\varepsilon,\tau) = \frac{e^{-\|A+\Delta A\|\tau}}{1 + \|B + \Delta B\|\tau} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(H)}}, \quad \|A+\Delta A\| = \max_{\Delta a_{ij}} \left\{|A+\Delta A|\right\},$$

$$\|B+\Delta B\| = \max_{\Delta b_{ij}} \left\{|B+\Delta B|\right\}, \quad \|\Delta A+\Delta B\| = \max_{\Delta a_{ij}, \Delta b_{ij}} \left\{|\Delta A + \Delta B|\right\}.$$

У п'ятому параграфі розглядається інтервальна система диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу

$$\dot{x}(t) = (D+\Delta D)\dot{x}(t-\tau)+(A+\Delta A)x(t)+(B+\Delta B)x(t-\tau). \tag{II}$$

Розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (II) асимптотично стійкий, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$ такі, що $|x(t)|_1 < \varepsilon$, $t > 0$, як тільки $\|x(0)\|_\tau < \delta_1$, $\|\dot{x}(0)\|_\tau < \delta_2$ і $\lim\limits_{t\Rightarrow\infty} |x(t)|_1 = 0$.

Тут $|x(t)|_1 = \max\left\{|x(t)|, \ |\dot{x}(t)|\right\}$.

Одержані такі умови інтервальної стійкості.

Т е о р е м а 4. Нехай $A + B$ асимптотично стійка матриця та існує додатно визначена матриця H, для якої виконується нерівність

$$L(H) - 2\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^T H(B+\Delta B)\right\|(1 + \sqrt{\varphi(H)}) -$$

$$- 4\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^T H(D+\Delta D)\right\| \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1 - \|D+\Delta D\|} \sqrt{\varphi(H)} > 0,$$

$$L(H) = \lambda_{min}\left[-(A+B)^T H(E-D) - (E-D)^T H(A+B)\right] -$$

$$-2\left\|(A+B)^T H\Delta D - (\Delta A+\Delta B)^T H\left[(E-D)-\Delta D\right]\right\|, \quad \|D+\Delta D\| < 1.$$

Тоді система (II) інтервально стійка при довільному відхиленні аргументу $\tau > 0$, причому $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{\varphi(H)}$,

$$\delta_2(\varepsilon) = \left[\frac{L(H) - 2\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^T H(B+\Delta B)\right\|(1+\sqrt{\varphi(H)})}{4\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^T H(D+\Delta D)\right\|} - \right.$$

$$- \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1 - \|D+\Delta D\|} \sqrt{\varphi(\mathrm{H})} \Bigg] \frac{\varepsilon R}{\sqrt{\varphi(\mathrm{H})}} ,$$

$$R = min\left\{1, \left[\frac{L(\mathrm{H})-2\left\|\left[(E-D)-\Delta D)\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}(B+\Delta B)\right\|(1+\sqrt{\varphi(\mathrm{H})})}{4\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}(D+\Delta D)\right\|} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +(\sqrt{\varphi(\mathrm{H})} - 1) \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1 - \|D+\Delta D\|}\right]^{-1}\right\}.$$

Т е о р е м а 5. Нехай $A + B$ асимптотично стійка матриця та існує додатно визначена матриця H, для якої виконуеться $L(\mathrm{H}) > 0$. Тоді при $\tau < \tau_0$, де

$$\tau_0 = \frac{L(\mathrm{H})(1-\|D+\Delta D\|)}{2(\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|)\sqrt{\varphi(\mathrm{H})}} \left[\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}(B+\Delta B)\right\|+ \right.$$

$$\left. + \left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]\mathrm{H}(D+\Delta D)\right\| \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1 - \|D+\Delta D\|} \right]^{-1}.$$

система (II) інтервально стійка, причому

$$\delta_1(\varepsilon,\tau) = min\left\{ \frac{e^{-\|A+\Delta A\|\tau}}{1 + 2\|D+\Delta D\|+\|B+\Delta B\|\tau}, \frac{L(\mathrm{H})(1-\xi)\zeta}{8\|D+\Delta D\|} * \right.$$

$$* \left[\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}(B+\Delta B)\right\|+\left\|\left[(E-D)-\Delta D\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}(D+\Delta D)\right\| * \right.$$

$$\left.\left. * \frac{\|A+\Delta A\| + \|B+\Delta B\|}{1 - \|D+\Delta D\|} \right]^{-1}\right\} \frac{R}{\sqrt{\varphi(\mathrm{H})}} \varepsilon,$$

$$\delta_2(\varepsilon,\tau) = \frac{L(\mathrm{H})(1 - \xi)(1 - \zeta)}{8\|D+\Delta D\|\left\|\left[(E-D)-\Delta D)\right]^{\mathrm{T}}\mathrm{H}(D+\Delta D)\right\|} \frac{R}{\sqrt{\varphi(\mathrm{H})}} \varepsilon.$$

$$R = min\left\{ 1, \left[\frac{L(\mathrm{H})(1-\xi)(1-\zeta)}{8\|D+\Delta D\| \left\| \left[(E-D)-\Delta D \right]^{T} \mathrm{H}(D+\Delta D) \right\| \sqrt{\varphi(\mathrm{H})}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\|A+\Delta A\|+\|B+\Delta B\|}{1 - \|D+\Delta D\|} \sqrt{\varphi(\mathrm{H})} \right]^{-1} \right\} .$$

$\xi = \tau/\tau_0$, $0 < \zeta < 1$ - довільна стала.

Другий розділ присвячений керованості інтервальних систем. Розглядається система

$$\dot{x} = Ax + bu \ , \ u = c^T x. \qquad (12)$$

Нехай замкнена система

$$\dot{x} = (A + bc^T)x \qquad (13)$$

має характеристичне рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Позначимо

$$\Omega(a) = \left\{ a_i\colon a^i_{min} \leqslant a_i \leqslant a^i_{max},\ i = \overline{1,n} \right\},$$
$$\Omega(\overline{c}) = \left\{ \overline{c}_i\colon \overline{c}^i_{min} \leqslant \overline{c}_i \leqslant \overline{c}^i_{max},\ i = \overline{1,n} \right\},$$
$$a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ c^T = (c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Система (12) інтервально керована, якщо для довільного $a \in \Omega(a)$ існує $\overline{c} \in \Omega(\overline{c})$, що замкнена система (13) має коефіцієнти характеристичного рівняння $a \in \Omega(a)$.

Нехай характеристичне рівняння системи (12) з нульовим керуванням має вигляд

$$\det(\lambda E-A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ . \ . \ . + p^n.$$

Позначимо

$$p^T = (p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n),\ S = (b,\ Ab, \ldots,\ A^{n-1}b),$$

$$G(p) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ -p_{n-1} & -p_{n-2} & \cdots & -p_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Т е о р е м а 6. Для того, щоб система (I2) була інтервально керованою, необхідно і достатньо, щоб $rang\ S = n$. Причому $\Omega(c)$ має вигляд

$$\overline{c}^{s}_{min} = min\left\{\left[S^{-1}G^{-1}(p)(a-p)\right]_s : a_i = a^i_{min},\ a^i_{max},\ i = \overline{1,n}\right\},$$
$$\overline{c}^{s}_{max} = max\left\{\left[S^{-1}G^{-1}(p)(a-p)\right]_s : a_i = a^i_{min},\ a^i_{max},\ i = \overline{1,n}\right\},$$

де $[\ \cdot\ ]_s$– s-а компонента відповідного вектора.

Розглядається інтервальна система

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + bu,\ u = c^T x. \tag{I4}$$

Замкнена система має вигляд

$$\dot{x} = (A + \Delta A + bc^T)x. \tag{I5}$$

Система (I4) цілком інтервально керована, якщо для довільного $a \in \Omega(a)$ існує таке $\overline{c} \in \Omega(\overline{c})$, що система (I5) має коефіцієнти характеристичного рівняння $a \in \Omega(a)$, при будь-яких $|\Delta a_{ij}| \leqslant \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n}$. Позначимо

$$\Omega(a) = \left\{a_k : a^k_{min} \leqslant a_k \leqslant a^k_{max}\ ,\ k = \overline{1,n}\right\},$$
$$\Omega(\overline{c}) = \left\{\overline{c}_k : \overline{c}^k_{min} \leqslant \overline{c}_k \leqslant \overline{c}^k_{max}\ ,\ k = \overline{1,n}\right\},$$
$$\overline{a}^k_{min} = min\left\{a^k_{min},\ p^k_{min}\right\},\quad \overline{a}^k_{max} = max\left\{a^k_{max},\ p^k_{max}\right\},$$
$$p^k_{min} = \min_{\Delta a_{ij} = \pm\delta_{ij}}\left\{p_k(\Delta A)\right\},\quad p^k_{max} = \max_{\Delta a_{ij} = \pm\delta_{ij}}\left\{p_k(\Delta A)\right\},$$
$$det(\lambda E - A - \Delta A) = \lambda^n + p_1(\Delta A)\lambda^{n-1} + \ldots + p_n(\Delta A),$$
$$S(\Delta A) = \left\{b,\ (A+\Delta A)b,\ \ldots\ ,\ (A+\Delta A)^{n-1}b\right\}.$$

Т е о р е м а 7. Для того, щоб система (I4) була цілком інтервально керованою необхідно і достатньо, щоб $rang\ S(\Delta A) = n$. Причому $\Omega(c)$ має вигляд

$$\overline{c}^{s}_{min} = min\left\{\left[S^{-1}(\Delta A)G^{-1}(p(\Delta A))(a - p(\Delta A))\right]_s :\right.$$
$$\left. a_k = \overline{a}^k_{min},\ \overline{a}^k_{max}\ ;\ |\Delta a_{ij}| \leqslant \delta_{ij},\ k = \overline{1,n},\ i,j = \overline{1,n}\right\},$$
$$\overline{c}^{s}_{max} = max\left\{\left[S^{-1}(\Delta A)G^{-1}(p(\Delta A))(a - p(\Delta A))\right]_s :\right.$$

$$a_k = \bar{a}^k_{min},\ \bar{a}^k_{max}\ ;\ |\Delta a_{ij}| \leqslant \delta_{ij},\ k = \overline{1,n},\ i,j = \overline{1,n}\ \Big\}.$$

Власні числа не завжди добре оцінюють динаміку системи. Існують системи, що мають однакові власні числа при різних значеннях параметрів. Тому в ряді випадків має сенс розглядати керованість системою за допомогою функції Ляпунова.

Система (I3) керована за допомогою функції $V(x) = x^{\mathrm{T}}Hx$ з показником γ , якщо існує вектор параметрів керування c, при якому

$$\dot{V}(x(t)) = -\gamma V(x(t)).$$

Позначимо:

$$H_1 = S^{-1}HS,\ H_1 = \{h^1_{ij}\},\ i,j = \overline{1,n}.$$

$$\overset{\omega}{R}_1 = \begin{bmatrix} 2h^1_{11} & 0 & 0 \dots & 0 & \gamma h^1_{11} + h^1_{12} + h^1_{21} \\ h^1_{12} & h^1_{11} & 0 \dots & 0 & \gamma h^1_{12} + h^1_{13} + h^1_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h^1_{1n} & 0 & 0 \dots & h^1_{11} & \gamma h^1_{1n} + h^{\mathrm{T}}_1 p + h^1_{2n} \end{bmatrix},$$

$$\overset{\omega}{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2h^1_{12} & 0 & \dots 0 & \gamma h^1_{22} + h^1_{23} + h^1_{32} \\ 0 & h^1_{13} & h^1_{12} & \dots 0 & \gamma h^1_{23} + h^1_{24} + h^1_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & h^1_{1n} & 0 & \dots h^1_{12} & \gamma h^1_{2n} + h^{\mathrm{T}}_2 p + h^1_{3n} \end{bmatrix},$$

$$\overset{\omega}{R}_n = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0 & \dots & 2h^1_{1n} & \gamma h^1_{nn} + 2h^{\mathrm{T}}_n\, p \end{bmatrix},$$

$$h^{\mathrm{T}}_i = (h^1_{i1}, h^1_{i2}, \dots, h^1_{in}),\quad \overset{\omega}{R}{}^{\mathrm{T}} = (\overset{\omega}{R}{}^{\mathrm{T}}_1, \overset{\omega}{R}{}^{\mathrm{T}}_2, \dots, \overset{\omega}{R}{}^{\mathrm{T}}_n),$$

Т е о р е м а 8. Система (I2) керована за допомогою $V(x) = x^{\mathrm{T}}Hx$ з показником γ тоді і тільки тоді, коли

$$rang\ S = n \quad і \quad rang\ \overset{\omega}{R}{}^{\mathrm{T}} = n.$$

В ряді випадків має сенс розглядати більш слабкий вид керованості.

Система (I2) керована за допомогою функції $V(x(t) = x^{\mathrm{T}}Hx$ з показником не менше, ніж γ, якщо існує вектор параметрів c, при якому

$$\dot V(x(t)) < -\gamma V(x(t)).$$

Позначимо

$$H_3 = \left\{ h^3_{ij} \right\},\ h^3_{ij} = -\gamma h^1_{ij} - h^2_{ij},\ i,j = \overline{1,n},$$

$$H_2 = \left\{ h^2_{ij} \right\},\ h^2_{ij} = h^1_{j,i+1} + h^1_{i,j+1},\ i,j = \overline{1,n},\quad h^1_{i,n+1} = h^T_i p,$$

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} h^3_{11}-2d_1h^1_{11} & h^3_{12}-d_1h^1_{12}-d_2h^1_{11} & \dots & h^3_{1i}-d_1h^1_{1i}-d_ih^1_{11} \\ h^3_{12}-d_2h^1_{11}-d_1h^1_{12} & h^3_{22}-2d_2h^1_{22} & \dots & h^3_{2i}-d_2h^1_{2i}-d_ih^1_{12} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ h^3_{i1}-d_ih^1_{11}-d_1h^1_{1i} & h^3_{i2}-d_ih^1_{12}-d_2h^1_{2i} & \dots & h^3_{ii}-2d_ih^1_{ii} \end{bmatrix}.$$

Т е о р е м а 9. Система (I2) керована за допомогою $V(x) = x^T Hx$ з показником не менше, ніж γ тоді і тільки тоді, коли $rang\ S = n$ і система нерівностей

$$\det\,[\,\Delta_i(d_1, d_2, \dots, d_i)] > 0,\ i = \overline{1,n}.$$

має непустий розв'язок відносно змінних $d_i = [S^Tc]_i$, $i = \overline{1,n}$, $[S^Tc]_i$ – i-а компонента відповідного вектора.

Третій розділ присвячений розробці моделі динаміки обміну рідини. Розглядається ієрархічна система n- зв'язаних підсистем S_i, кожна з яких складається з m- водоймищ. Динаміка обміну рідини спрямована зверху-вниз. Введемо такі позначення:

P_i – матриця надходжень з підсистеми S_i в S_{i+1},

$x^T_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ – вектор вмісту рідини в S_i,

$x^T_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m})$ – вектор надходжень в S_1,

q^s_{ik} – інтенсивність витікання рідини з A_{is} в A_{ik},

$q_i^{*^T}(t) = (q_{i1}^*(t),\ q_{i2}^*(t), \ldots,\ q_{im}^*(t))$ – зовнішні надходження,

$$R_i = \begin{bmatrix} r_{i1}^1 & r_{i1}^2 \ldots & r_{i1}^m \\ r_{i2}^1 & r_{i2}^2 \ldots & r_{i2}^m \\ \cdot & \cdot \ \cdots & \cdot \\ r_{im}^1 & r_{im}^2 \ldots & r_{im}^m \end{bmatrix}, \quad Q_i = \begin{bmatrix} 0 & q_{i2}^1 & q_{i3}^1 & \cdots & q_{im}^1 \\ q_{i1}^2 & 0 & q_{i3}^2 & \cdots & q_{im}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q_{i1}^m & q_{i2}^m & q_{i3}^m & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^m q_{is}^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{s=1}^m q_{is}^2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & & \sum_{s=1}^m q_{is}^m \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

При зроблених припущеннях математична модель динаміки обміну рідини описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = R_0 x_0 + (\tilde{Q}_1 - Q_1^T - R_1)x_1 + q_1, \\ \dot{x}_2 = R_1 x_1 + (\tilde{Q}_2 - Q_2^T - R_2)x_2 + q_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n = R_{n-1} x_{n-1} + (\tilde{Q}_n - Q_n^T - R_n)x_n + q_n. \end{cases}$$

Розрахований стаціонарний режим обміну рідини. Він має вигляд

$$x_1^* = (R_1 + Q_1^T - \tilde{Q}_1)^{-1} \ (R_0 x_0 + q_1^*),$$

$$x_2^* = (R_2 + Q_2^T - \tilde{Q}_2)^{-1} \ (R_1 x_1^* + q_2^*),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_n^* = (R_n + Q_n^T - \tilde{Q}_n)^{-1} \ (R_{n-1} x_{n-1}^* + q_n^*).$$

Розглядається задача синтезу параметрів керування системою водопостачання. Необхідно знайти R_i, при яких забезпечується необхідний режим обміну рідини $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Розв'язок має вигляд

$$R_1 = \left[(R_0x_0 + q_1^*) - (Q_1^T - \tilde{Q}_1)\bar{x}_1^T\right]\bar{x}_1^T/|\bar{x}_1|^2,$$

$$R_2 = \left[(R_1x_1 + q_2^*) - (Q_2^T - \tilde{Q}_2)\bar{x}_2\right]\bar{x}_2^T/|\bar{x}_2|^2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$R_n = \left[(R_{n-1}x_{n-1}+q_n^*)-(Q_n^T - \tilde{Q}_n)\bar{x}_n\right]\bar{x}_n^T/|\bar{x}_n|^2.$$

Досліджена задача стійкості побудованої моделі динаміки обміну рідини. Для стійкості функціонування всієї системи S необхідно і достатньо, щоб була стійкою кожна S_i, тобто

$$Re\ \lambda_j\left[\tilde{Q}_i - Q_i^T - R_i\right] < 0,\ j = \overline{1,m},\ i = \overline{1,n}.$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Одержані достатні умови інтервальної стійкості систем лінійних стаціонарних диференціальних і різницевих рівнянь.
2. Проведено дослідження інтервальної стійкості систем диференціально-різницевих рівнянь з запізненням та нейтрального типу.
3. Одержані оцінки параметрів інтервальної керованості диференціальних систем.
4. Розв'язані задачі стабілізації лінійних систем за допомогою функції Ляпунова.
5. Розроблена математична модель динаміки обміну рідини на основі лінійних диференціальних і різницевих рівнянь. Проведено дослідження її стійкості та керованості.

За темою дисертації опубліковані такі роботи.

1. Мустафаева Р. Исследование робастной устойчивости линейных систем. - Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем", Киев, 24-28 мая 1993 г. Тезисы докладов, Киев.- 1993.- С.34.
2. Мустафаева Р. Оценка величины запаздывания интервальных систем. - Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем", Киев, 16-20 мая 1994 г. Тезисы докладов.- Киев, 1994.- С.119.

3. Мустафаева Р. Оценка допустимого запаздывания в системах с отклоняющимся аргументом. - Международная конференция памяти Ганса Гана, Черновцы I0-I5 октября I994 г. Тезисы докладов, Черновцы, I994. - С.25.
4. Хусаiнов Д.Я., Мустафаева Р. Математичне моделювання процесiв обмiну рiдини // Вiсник Киiвського унiверситету. Серiя фiзико-математичнi науки, Мiносвiти Украiни, Киiв. - I994. - С.224-229.
5. Мустафаева Р. Моделирование динамики рек // Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем", Киев, I5-I9 мая I995 г. Тезисы докладов.- Киев.- I995. - С.I30.
6. Хусаинов Д.Я., Мустафаева Р. Робастная устойчивость систем с запаздыванием // Украинский математический журнал, Т.47., №6. - I995. - С.859-863.
7. Мустафаева Р. Использование прямого метода А.М.Ляпунова для получения условий робастной устойчивости дискретных систем. - Вторая Крымская международная школа по методу функций Ляпунова и его приложениям, СГУ. - Алушта.- I995.- С.I7.
8. Мустафаева Р. Исследование интервальной устойчивости дискретных систем./ К. I995. - I0 с.- Деп.в ГНТБ Украины, № I053 Ук - 95 Деп.
9. Мустафаева Р. Об одной математической модели динамики водоемов./ К. I995. - I2 с.- Деп.в ГНТБ Украины, № 2084 Ук - 95 Деп.
I0. Кожаметов А.Т., Мустафаева Р. Управление до заданной функции Ляпунова. - Украинская конференция " Моделирование и исследование устойчивости систем", Киев, 20-24 мая I996 г. Тезисы докладов.- Киев.- I996. - С.66.

Мустафаева Р. Исследование интервальной устойчивости динамических систем и моделирование процессов водообмена. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 0I.05.04 - системный анализ и теория оптимальных решений. Киевский национальный университет. Киев, I996.

Получены достаточные условия интервальной устойчивости динамических систем, описываемых системами линейных дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений запаздывающего и нейтрального типов. Решена задача стабилизации линейной дифференциальной системы с помощью квадратичной функции Ляпунова. Разработана математическая модель динамики водообмена. Проведено исследование устойчивости и управляемости полученной модели.

Mustafaeva R. Investigation of interval stability of dynamic systems and simulation of processes water-exchange. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, the speciality 01.05.04 - system analysis and theory of optimal solutions. Kiev, 1996.

The sufficient conditions of interval stability of dynamic systems, described by systems of linear differential, difference and difference-differential equations delay and neutral types are received.

The task of stabilization of linear differential system with help by quadratic Liapunov function is resolved. The mathematical model of dynamics of water-exchange is developed. Stability investigation and controllability of received model is conducted.

Ключові слова: лінійна диференціальна система, функція Ляпунова, інтервальна стійкість, запізнення, керування, динамічна система, моделювання.