МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

Львівський державний університет
імені І.Франка

На правах рукопису

Собчук Олександр Васильович

БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ТА ДИСКРЕТНІ ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ

01.01.01. - математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Чернівецького державного університету ім. Ю.Федьковича.

Науковий керівник - кандидат фізико-математичних наук, доцент В.К.Маслюченко

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор М.М.Зарічний

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Д.І.Боднар

Провідна установа - Інститут математики Академії наук України

Захист відбудеться 21 листопада 1996 року о 15⁰⁰ на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.04.01 при Львівському державному університеті за адресою:

290001, м.Львів, вул. Університетська 1, ауд.377

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці ЛДУ (м. Львів, вул. Драгоманова, 5)

Автореферат розіслано "14" жовтня 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої

Вченої Ради Д.04.04.01. Я.В.Микитюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Питання берівської та борелівської класифікації нарізно неперервних функцій та їх аналогів, починаючи з класичних робіт Лебега (1898, 1905) активно досліджувалось математиками XX століття. Так, цим питанням займалися Г.Ган (1932), К.Куратовський (1931, 1935), М.Монтгомері (1935), Б.Джонсон (1969), В.Моран (1969), В.Рудін (1981), Г.Вера (1988) та інші. Паралельно розвивалися і споріднені напрямки: побудова нарізно неперервних функцій з даною діагоналлю (тут слід згадати імена Лебега (1905) та Гана (1932)) та обернені задачі, пов'язані з теоремами Осгуда про поточково збіжні та поточково обмежені послідовності неперервних функцій та теоремою Бера про функції першого класу.

При цьому, якщо в першому випадку дослідження були просунуті досить далеко для різних класів топологічних просторів, то в інших двох, як правило, тільки для функцій дійсних змінних, що лишало широке поле для діяльності. Втім, і в результатах про берівську та борелівську класифікацію обов'язковими умовами на простори були метризовність чи компактність, що виключало з розгляду багато важливих просторів функціонального аналізу, як, наприклад, строгі індуктивні границі метризовних локально опуклих просторів чи гаусдорфових локально опуклих просторів у слабкій топології, що, природно, викликало потребу в таких дослідженнях.

Метою роботи є дослідження належності до певних берівських класів нарізно неперервних функцій та їх аналогів, заданих на добутках топологічних просторів, побудова таких функцій із заданою діагоналлю, а також дослідження дискретних обернених задач.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи загальної топології та функціонального аналізу, зокрема, метод згущення особливостей та новий метод функціональної інтерполяції.

Наукова новизна роботи:

1) вперше розглянуто питання берівської класифікації нарізно неперервних функцій для досить широкого класу топологічних просторів, названих автором σ-метризовними, куди, зокрема входять локально опуклі простори у слабкій топології з сепарабельними метризовними спряженими та строгі індуктивні границі послідовностей локально опуклих метризовних сепарабельних просторів;

2) побудовано нарізно неперервну функцію із заданою діагоналлю на топологічному просторі, квадрат якого є нормальним;

3) досліджено дискретні обернені задачі у класі досконало нормальних просторів;

4) встановлено істотність умов досконалої нормальності при дослідженні таких задач;

5) отримано функціональні характеристики беровості у класі досконало нормальних просторів.

Наукова та практична цінність. Дисертація має теоретичний характер. Її результати можуть знайти застосування в загальній теорії функцій, функціональному аналізі і бути використані при читанні спецкурсів на математичних факультетах університетів.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист:

- класифікація нарізно неперервних функцій та їх аналогів на добутках σ-метризовних і досконало нормальних просторів;

- побудова нарізно неперервної функції із заданою діагоналлю на топологічному просторі, квадрат якого нормальний;

- розв'язання дискретних задач у класі досконало нормальних просторів.

Особистий внесок дисертанта. Всі наведені в дисертації основні результати одержані самостійно. Із спільних робіт використано лише ті результати, які одержані дисертантом.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися на міжнародній математичній конференції, присвяченій сторіччю народження С.Банаха, в м.Львові (1992), на міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Г.Гана, в м.Чернівці (1994), на семінарах з аналізу в Штіфт Цветлі (1994), та Шльос Вайнбергу (1995) в Австрії, на наукових сесіях НТШ (1993,1994,1995), на всеукраїнській конференції "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" у м.Києві (1994), на всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях", присвяченій 70-річчю від дня народження професора П.С.Казимірського, у м.Львові (1995), на науковому семінарі з питань загальної теорії функцій і функціонального аналізу в Чернівецькому університеті, на топологічному семінарі у Львівському університеті, на конференції пам'яті академіка Михайла Кравчука в Чернівецькому університеті.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у десяти роботах, список яких подано в кінці реферату. Зокрема, в роботах [1,2,3,5,6] Маслюченку В.К. належать постановки задач, Грушці Я.І. та Козьмі І.Д. - участь в обговоренні питань; в [1] В.Михайлюку - розробка розв'язання загальної оберненої задачі, в [10] - ідея доведення; все решта - автору. Робота [7] є оглядовою. Результати § 1 і пунктів 2.3, 2.4 параграфа 2 належать В.К.Маслюченку, результати §§ 3,4 - В.В.Михайлюку, решта - автору.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, розбитих на параграфи і списку літератури. Об'єм дисертації 82 сторінки машинописного тексту. Бібліографія складає 38 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

У вступі дисертації прослідковується історія досліджуваних питань, описуються раніше отримані на дану тематику результати і формулюються основні результати роботи.

В першому розділі дисертації досліджується питання берівської класифікації нарізно неперервних функцій та їх аналогів, визначених на добутках топологічних просторів, один з яких є σ-метризовним.

Простір X називається σ-метризовним, якщо його можна подати як об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів.

У параграфі 1.2 показано, що кожний σ-метризовний простір є досконалим, але не обов'язково нормальним, наведено приклади σ-метризовних просторів, а також просторів, які, крім того, є досконало нормальними.

Твердження I.2.I. Нехай X - строга індуктивна границя послідовності локально опуклих метризовних просторів X_n. Тоді X є σ-метризовним простором.

Твердження I.2.2. Нехай X - гаусдорфовий локально опуклий простір із спряженим X^*, який є метризовним і сепарабельним відносно сильної топології $\beta(X^*,X)$. Тоді простір X, наділений слабкою топологією $\sigma(X,X^*)$, є σ-метризовним.

Твердження I.2.5. Строга індуктивна границя X послідовності локально опуклих метризовних сепарабельних просторів є досконало нормальним простором.

Твердження I.2.6. Гаусдорфовий локально опуклий простір X, спряжений до якого у сильній топології є метризовним і сепарабельним, буде досконало нормальним відносно своєї слабкої топології.

У параграфі 1.3 дано узагальнення однієї теореми Рудіна.

Теорема I.3.2. Нехай X - метризовний простір Y - топологічний простір і $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ - функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді функція f є класу $\alpha+1$ за сукупністю змінних.

З допомогою цього узагальнення ми отримуємо основний результат першого розділу.

Теорема I.3.3. Нехай X - σ-метризовний простір, Y - досконало нормальний простір, такий, що добуток $X\times Y$ теж досконало нормальний і нехай $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ - функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді f є класу $\alpha+1$ за сукупністю змінних.

Враховуючи результати § 1.2, отримуються наступні наслідки цієї теореми.

Наслідок I.3.I. Нехай X та Y - строгі індуктивні границі послідовностей сепарабельних метризовних локально опуклих просторів і $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ - функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді f є класу $\alpha+1$ за сукупністю змінних.

Наслідок I.3.2. Нехай X та Y - гаусдорфові локально опуклі простори із сепарабельними і метризовними сильними спряженими, що наділені своїми слабкими топологіями і $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ - функція, неперервна по першій змінній і класу α по другій змінній. Тоді f є класу $\alpha+1$ за сукупністю змінних.

Наслідок 1.3.3. Якщо всі топологічні простори $X_1,\ldots,X_n$ або такі як у наслідку 1.3.1, або такі як у наслідку 1.3.2, то кожна нарізно неперервна функція $f:X_1\times\ldots\times X_n\to\mathbb{R}$ є класу n-1 за сукупністю змінних.

Завершується перший розділ теоремою, що випливає з одного результату В.Михайлюка.

Теорема 1.3.4. Нехай $X=\prod\limits_{s\in S} X_s$ - добуток метризовних просторів і кожна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих підмножин простору X є не більш ніж зліченною, Y - топологічний простір, в якому кожна точково зліченна сім'я непорожніх відкритих підмножин є не більш ніж зліченною, $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ - нарізно неперервна функція. Тоді f є першого класу Бера за сукупністю змінних.

Другий розділ дисертації присвячений побудові нарізно непервних функцій з даною діагоналлю. Усі попередні результати на цю тему були отримані лише для функцій дійсної змінної, причому їх доведення істотно використовували геометричну структуру простору $\mathbb{R}^2$. У параграфі 2.1 з допомогою методу функціональної інтерполяції для досить широкого класу топологічних просторів отримано наступний результат.

Теорема 2.1.1. Нехай X - топологічний простір з нормальним квадратом $X^2=X\times X$, такий, що множина $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ є типу G_δ в X^2 і $g:X\to\mathbb{R}$ - функція першого класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f:X^2\to\mathbb{R}$, для якої $f(x,x)=g(x)$ для кожного $x\in X$.

Спроба розв'язати задачу побудови нарізно неперервних функцій n-змінних з даною діагоналлю наштовхнулась на певні труднощі, хоча дозволила отримати таку теорему.

Теорема 2.2.2. Нехай простір X задовольняє умови теореми 2.1.1 і $g:X\to\mathbb{R}$ - функція $m+1$-го класу Бера. Тоді існує функція $f:X^2\to\mathbb{R}$, неперервна по першій змінній і класу m другій змінній, така, що $f(x,x)=g(x)$ для кожного $x\in X$.

У параграфі 2.2 ми даємо спочатку, з методичною метою, доведення цієї теореми у випадку $m=1$, а вже потім розглядаєм випадок довільного $m\in\mathbb{N}$.

У третьому розділі роботи досліджуються обернені дискретні задачі. Нехай A та B підмножини топологічного простору X. Потрібно побудувати:

а) поточково збіжну до неперервної функції $f:X\to\mathbb{R}$ послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, у якої множина точок нерівномірної збіжності $N(f_n:n\in\mathbb{N})$ рівна B;

б) поточково обмежену послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, для якої множина точок нерівномірної обмеженості $L(f_n:n\in\mathbb{N})$ рівна B.

в) функцію $f:X\to\mathbb{R}$ першого класу Бера з множиною точок розриву $D(f)$, рівною A;

г) поточково збіжну до функції $f:X\to\mathbb{R}$ послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, для яких множина точок розриву функції f рівна A і множина точок нерівномірної збіжності послідовності (f_n) рівна B;

Так у параграфі 3.2 дається розв'язання задачі а) для довільної F_σ- множини першої категорії у досконало нормальному просторі.

Теорема 3.2.1. Нехай B - множина першої категорії і типу F_σ у досконало нормальному просторі X. Тоді існує послідовність (g_n) неперервних функцій $g_n:X\to\mathbb{R}$, яка поточково збігається до нуля і для неї $N(g_n:n\in\mathbb{N})=B$.

А також задачі б) для довільної замкненої множини першої категорії в досконало нормальному просторі.

Теорема 3.2.2. Для кожної замкненої множини B першої категорії в досконало нормальному просторі X існує поточково обмежена послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, для якої $L(f_n:n\in\mathbb{N})=B$.

Розв'язання задач в) і г) подано у параграфі 3.3.

Теорема 3.3.1. Нехай A - множина першої категорії і типу F_σ у досконало нормальному просторі X. Тоді існує зростаюча послідовність (h_n) неперервних функцій $h_n:X\to\mathbb{R}$, що поточково збігається до деякої функції $f:X\to\mathbb{R}$ і при цьому $D(f)=N(h_n:n\in\mathbb{N})=A$.

Теорема 3.3.2. Нехай A і B F_σ-множини першої категорії в досконало нормальному просторі X і $A\subseteq B$. Тоді існує така послідовність неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$, що поточково збігається до деякої функції $f:X\to\mathbb{R}$, і при цьому $D(f)=A$ і $N(f_n:n\in\mathbb{N})=B$.

Істотність умов досконалої нормальності на прикладі задачі в) показано в параграфі 3.4.

Теорема 3.4.1. Нехай $X=[0,1]^{T}$ тихоновський куб незліченної ваги і $x_0 \in X$. Тоді не існує такої функції $f:X\to\mathbb{R}$ першого класу, у якої $D(f)=\{x_0\}$.

Теорема 3.4.2. Нехай X сепарабельний простір, що містить континуальний замкнений і ніде не щільний в X дискретний підпростір D (наприклад, площина Немицького чи квадрат прямої Зоргенфрея). Тоді існує така замкнена ніде не щільна множина A в X, що $D(f)\neq A$ для кожної функції $f:X\to\mathbb{R}$ першого класу.

На завершення параграфа 3.4 і, власне, дисертаційної роботи, з допомогою теорем параграфів 3.2 і 3.3 отримуються наступні функціональні характеризації беровості у класі досконало нормальних просторів.

Теорема 3.4.3. Нехай X досконало нормальний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:

(*i*) X - берівський простір;

(*ii*) множина всіх точок рівномірної обмеженості кожної поточково обмеженої послідовності неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$ всюди щільна в X;

(*iii*) множина всіх точок рівномірної збіжності кожної поточково збіжної послідовності неперервних функцій $f_n:X\to\mathbb{R}$ всюди щільна в X;

(*iv*) множина всіх точок неперервності кожної функції $f:X\to\mathbb{R}$ першого класу Бера всюди щільна в X.

ВИСНОВКИ.

В дисертаційній роботі дано класифікацію нарізно неперервних функцій на добутках σ-метризовних і досконало нормальних просторів, побудовано нарізно неперервну функцію із заданою діагоняллю на топологічному просторі, квадрат якого нормальний, розв'язано дискретні обернені задачі у класі досконало нормальних просторів, отримано характеризацію беровості у класі досконало нормальних просторів.

Список опублікованих робіт по темі дисертації.

1. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн.- 1992.- Т.44,№9.- С.1209-1220.

2. Маслюченко В.К., Собчук О.В. Берівська класифікація і σ-метризовні простори// Мат. студії.- 1994.- 3.-С. 95-102

3. Грушка Я.І., Маслюченко В.К., Собчук О.В. До теорем Бера і Осгуда // Чернівець. ун-т.- Чернівці, 1990.- 12с.- Деп. в УкрНДІНТІ, №903-Ук90.

4. Козьма І.Д., Маслюченко В.К., Собчук О.В. Ще раз до теорем Бера і Осгуда// Чернівець. ун-т.- Чернівці, 1992.- 6с.- Деп в УкрІНТЕІ, № 1649-Ук92.

5. Собчук О.В. Нарізно неперервні функції на просторі фінітних послідовностей// Чернівець. ун-т.- Чернівці, 1993.- 5 с.- Деп.в ДНТБ України, # 1701-Ук93.

6 Маслюченко В.К., Собчук О.В. Досконала нормальність простору фінітних послідовностей// Чернівець. ун-т.- Чернівці, 1991. - 6 с.- Деп. в УкрНДІНТІ, # 1610-Ук91

7. Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. Дослідження про нарізно неперервні відображення// Матеріали міжнародної тематичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.- Чернівці:Рута, 1995.- с.192-246.

8. Maslyuchenko V.K. Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. On separately continuous mappings // Тези міжнародної конференції, присвяченої сторіччю народження С.Банаха (6-8 травня 1992 року).- Львів, 1992.- С.27.

9. Собчук О. Нарізно неперервні функції з заданою діагоналлю// Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (10-15 жовтня 1994 року, Чернівці).- Тези доповідей.- Чернівці:Рута, 1994.- с.139.

10. Михайлюк В., Собчук О. Функції з діагоналлю скінченного класу// Всеукраїнська наукова конференція "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях", присвячена 70-річчю від дня народження професора П.С.Казимірського (5-7 жовтня 1995 р.).- Тези доповідей.- Ч.I.-Львів, 1995.-с.82.

Собчук А.В. Бэровская классификация раздельно непрерывных отображений и дискретные обратные задачи. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.01. - математический анализ. Львовский государственный университет, Львов, 1996.

Исследуются задачи бэровской классификации раздельно непрерывных отображений и их аналогов, построение таких функций с заданной диагональю, обратные дискретные задачи, связанные с теоремами Бэра и Осгуда. Получены положительные результаты для широкого класса топологических пространств в первых двух случаях. Обратные дискретные задачи решены в классе совершенно нормальных пространств, кроме того, показано существенность условия совершенной нормальности и получены функциональные характеризации бэровости в классе совершенно нормальных пространств.

Sobchuk O.V. Baire's classification of separately continuous mappings and discrete inverse problems. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph. D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 - Mathematical Analysis. L'viv state university, L'viv, 1996.

One investigates the problems of Baire's classification of separately continuous mappings and their analogous, construction of such functions with given diagonal, discrete invers problems which connect with Baire's and Osgood's theorems. Positive results have been obtained for wide class of topological spaces in the first two cases. Discrete invers problems have been solved in the class of perfectly normal spaces, besides esential of condition of perfect normality have been shoun and functional characteristic that the topological space is Baire have been obtained in the class of perfectly normal spaces.

Ключові слова: нарізно неперервні відображення, берівські класи.

Підписано до друку 23.09.96.
Формат 60x84/16. Папір друкарський.
Друк офсетний. Ум.друк.арк. 0,9.
Обл.-вид.арк. 0,9. Тираж 100 прим.
Зам. 288.

Друкарня видавництва "Рута" Чернівецького держуніверситету
274012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2