КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

Бавула Володимир Володимирович

УЗАГАЛЬНЕНІ АЛГЕБРИ ВЕЙЛЯ

(01.01.06 - алгебра і теорія чисел)

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі алгебри і мат
Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
професор **В.А.АРТАМОНОВ**,

доктор фізико-математичних наук,
професор **В.В.КИРИЧЕНКО**,

доктор фізико-математичних наук,
професор **А.В.ЯКОВЛЄВ**

Провідна організація: Ужгородський державний університет

Захист відбудеться " 18 " листопада 1996 р. о 14 год. на засіданні Спеціалізованої Ради Д 01.01.01 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ, пр.Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Автореферат розіслано "....." .... 1996 р.

Вчений секретар
Спеціалізованої Ради С.А.Овсієнко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Останні 20-30 років активно вивчаються нескінченовимірні алгебри. І однією з першочергових і важких задач є класифікація простих алгебр. На відміну від скінченовимірного випадку, де, як відомо, простих алгебр мало - це матричні алгебри $M_n(K)$, K - а.з. поле, існує багато класів простих нескінченовимірних алгебр і вони значно різняться за своєю будовою.

Історично одними з перших простих нескінченовимірних алгебр, що вивчалися (і інтенсивно вивчаються) є алгебри Вейля A_n, $char\, K = 0$. Їм присв'ячені роботи Аміцура, Бернштейна, Блока, Бйорка, Діксм'є, Габріеля, Макконела, Райнхарта, Ренчлера, Робсона, Руса, Стафорда та ін.

За останні десять років з'явилося багато нових класів алгебр, які умовно можна об'єднати під назвою "квантові групи". До них відносяться в першу чергу деформації класичних алгебр.

Виявляється, що багато з цих алгебр (та їх тензорні добутки) є узагальненими алгебрами Вейля.

Мета роботи. Класифікація простих модулів деяких Z-градуйованих алгебр та узагальнених алгебр Вейля. Обчислення гомологічної розмірності та розмірності Крулля узагальнених алгебр Вейля. Побудова теорії фільтрованої розмірності алгебр та модулів і доведення аналога нерівності Бернштейна для простих афінних алгебр. Доведення гіпотези Стафорда для широкого класу простих алгебр. Класифікація (простих) модулів над алгеброю Вейля $A_n(K)$, K - а.з. поле, $char\, K = 0$, що мають мінімально можливу розмірність Гельфанда-Кирилова n і мінімальну кратність 1. Доведення некомутативного аналога теореми Гільберта про сизигії. Вивчення взаємозв'язків функцій Гільберта і рядів Пуанкаре градуйованих та фільтрованих модулів.

Методика дослідження. В роботі використовуються сучасні методи гомологічної алгебри, теорії зображень, теорії розмірності кілець та модулів, теорії кілець та комутативної алгебри.

Наукова новина. В дисертаційній роботі отримані наступні нові результати для узагальнених алгебр Вейля:

1. Встановлено критерій простоти узагальнених алгебр Вейля.

2. Введена нова розмірність - фільтрована розмірність - алгебр та модулів та аналог кратності для цієї розмірності, Доведено аналог нерівності Бернштейна для простих афінних алгебр. Для широкого класу простих афінних алгебр доведено, що голономні модулі мають скінчену довжину.

3. Показано, що кожна Шурівська алгебра є тензорно-простою.

4. Класифіковано (прості) модулі над алгеброю Вейля A_n, що мають розмірність Гельфанда-Кирилова n і кратність 1.

5. Доведено аналог теореми Гільберта-Серра для більш загальної ситуації, встановлено існування поліномів (які були названі поліномами Гільберта), що узагальнюють класичний поліном Гільберта. Встановлено канонічний ізоморфізм алгебр функцій Гільберта і рядів Пуанкаре при якому інтегральна функція Гільберта відображається в ряд Пуанкаре. Для простих афінних алгебр встановлено нерівність, що пов'язує розмірності Крулля, Гельфанда-Кирилова та фільтровану розмірність.

6. Класифіковані прості модулі для деякого класу Z-градуйованих кілець, що включає багато відомих алгебр (напр., алгебру Вейля A_1, квантову алгебру Вейля $A_1(q)$, квантову площину, $Usl(2)$, $U_qsl(2)$, деформації Віттена, Вороновича, Сміта та ін.).

7. Введений та вивчається новий клас алгебр - тензорно гомологічно мінімальні алгебри. Встановлено цю властивість для відомих класів алгебр (напр., алгебр Вейля та деяких узагальнених алгебр Вейля і ін.). Узагальнено теорему Руса та

наведено некомутативні аналоги теореми Гільберта про сизигії.

8. Обчислено гомологічну розмірність та розмірність Крулля узагальнених алгебр Вейля.

9. Для широкого класу простих алгебр доведено гіпотезу Стаффорда про 2-породженість лівих і правих ідеалів. Вивчається модульна структура таких алгебр.

Теоретична та практична цінність. В роботі розроблено новий підхід до вивчення структури простих афінних алгебр та їх модулів, введена нова розмірність алгебр та модулів, розроблені методи для обчислення гомологічної розмірності алгебр і як наслідок отримано вичерпну відповідь у випадку узагальнених алгебр Вейля.

Робота має теоретичний характер. Результати можуть бути використані в теорії зображень нескінченовимірних алгебр та алгебр Лі, гомологічній алгебрі та теорії розмірності.

Апробація роботи.

Результати дисертації доповідалися на наступних Міжнародних конференціях: Оттава (Канада, 1992), Мехіко (Мексіка, 1994), Антверпен-Брюсель (Бельгія, 1994, 1996), Білефельд (Німеччина, 1994, 1996), Констанца (Румунія, 1995), Варшава (Польща, 1995), Гайренгер (Норвегія, 1996), Мішкольц (Угорщина, 1996), Москва (1990), Новосибірськ (1989), Казань (1990), Львів (1990), Барнаул (1991), Н.Новгород (1991), Ужгород (1993), а також на наступних наукових семінарах університетів: Антверпен, Білефельд, Гамбург, Казань, Київ, Москва, Паденборн, Ужгород, Хассельт та ін.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [Bav 1-23], приведених в кінці автореферату.

Структура і об'єм дисертації. Дисертаційна робота набрана у Latex і містить 311 сторінку. Вона складається з 9 частин та списка літератури з 100 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

Зауваження. Нумерація теорем, лем, ... в кожній частині диссертації своя.

Частина 1. Введено новий клас алгебр - узагальнені алгебри Вейля.

Узагальнена алгебра Вейля $A = D(\sigma, a)$ (УАВ) рангу n з *базисним* кільцем D - це кільце, породжене D і $2n$ твірними $X_1^+, ..., X_n^+$, $X_1^-, ..., X_n^-$, які підпорядковані наступним визначальним співвідношенням:

$$X_i^- X_i^+ = a_i, \qquad X_i^+ X_i^- = \sigma_i(a_i)$$

$$X_i^{\pm} \alpha = \sigma_i^{\pm 1}(\alpha) X_i^{\pm}, \forall \alpha \in D$$

$$[X_i^-, X_j^-] = [X_i^+, X_j^+] = [X_i^+, X_j^-] = 0, \forall i \neq j,$$

де $[x, y] = xy - yx$.

Вивчаються основні властивості узагальнених алгебр Вейля. Наведено критерій Нетеровості (Твердження 1.1). В розділі 1.3 показано, що Жорданові алгебри є УАВ спеціального виду і як наслідок багато відомих класичних алгебр є УАВ. В р.1.4 дається критерій простоти УАВ рангу 1 (Теорема 4.2) і рангу n (Теорема 4.5).

Теорема 4.2. Нехай $A = D(\sigma, a)$ - узагальнена алгебра Вейля рангу 1. Тоді A - проста тоді і тільки тоді коли наступні умови мають місце:

(i) D не має власних $\sigma-$стабільних ідеалів;

(ii) жоден автоморфізм σ^n, $n \geq 1$, кільця D не є внутрішнім;

(iii) для кожного натурального числа $n \in N$ элементи a, $\sigma^n(a)$ є твірними D як лівого (або правого) $D-$модуля;

(iv) a - не дільник нуля в D.

Частина 2. В р.2.1 введено нову розмірність алгебр та модулів - **фільтровану розмірність** (fil.dim) і доведено наступний аналог нерівності Бернштейна для простих афінних алгебр.

Теорема 1.2. Нехай A - проста афінна алгебра, тоді

$$\mathrm{GK}(A) \leq \mathrm{GK}(M)(\mathrm{fil.dim}\, A + \max\{\mathrm{fil.dim}\, A, 1\}) \qquad (1)$$

для довільного ненульового скінченнопородженого $A-$модуля M, де GK - розмірність Гельфанда-Кирилова.

Для алгебри Вейля A_n над полем характеристики нуль обчислено $\mathrm{fil.dim}\, A_n = 1$ (Теорема 1.10). Оскільки $\mathrm{GK}(A_n) = 2n$, то з (1) отримуємо **нерівність Бернштейна**: $\mathrm{GK}(M) \geq n$ для довільного с.п. A_n-модуля $M \neq 0$. За класичним означенням A-модуль M - голономний, якщо $\mathrm{GK}(M) = \mathrm{GK}(A)/2$, де A - проста алгебра. В р.2.2 побудовані приклади простих афінних алгебр як завгодно великої фільтрованої розмірності, а це значить, що класичне означення голономного модуля має вузьку сферу застосування (коли $fil.dim\, A \leq 1$). Нерівність (1) дає змогу дати більш коректне означення голономного модуля, а саме, коли (1) перетворюється на рівність.

Аналогічно теорії кратності в алгебраїчній геометрії в р.2.3 розробляється теорія "кратності" фільтрованої розмірності і розмірності Гельфанда-Кирилова. Для широкого класу простих афінних алгебр, що включає алгебри Вейля та деякі УАВ, доведено обмеженість знизу кратності довільного голономного модуля (Теорема 3.3). Це дало змогу показати, що кожен голономний модуль має скінченну довжину (Теорема 3.5).

Введено наступний клас алгебр.

- (S) A - проста афінна нескінченновимірна алгебра.
- (N) Існує стандартна скінченновимірна фільтрація $F = \{A_i\}$ така, що асоційована градуйована алгебра $\mathrm{gr}\, A := \oplus_{i\geq 0} A_i/A_{i-1}$, $A_{-1} = 0$, є Нетеровою.

- (D) $\mathrm{GK}(A) < \infty$, $\mathrm{fil.dim}\, A < \infty$, існують $l(A) = l_F(A)$ и $L(A) = L_F(A)$.
- (H) Для кожного голономного $A-$модуля M існує $l(M) = l_F(M)$.

З точністю до фіксованої константи $l(M)$ і $L(M)$ - це кратності розмірностей Гельфанда-Кириллова та фільтрованої розмірності відповідно.

Більш слабка форма умови (D).

- (D') $\mathrm{GK}(A) < \infty$, $d = \mathrm{fil.dim}\, A < \infty$, існує $l(A) = l_F(A)$ і число $c > 0$: $\tilde{\nu}(i) \leq ci^d$ для $i >> 0$, де $\tilde{\nu}$ - функція повернення $\nu_{F \otimes F^{op},1}$ $A \otimes A^{op}-$модуля A.

Теорема 3.3. Нехай алгебра A задовольняє умовам (S), (H), (D) відп. (D'). Тоді для кожного голономного $A-$модуля M:

$$l(A) \leq l^2(M)(L(A)L'(A))^{\mathrm{GK}\,(A)/(\mathrm{fil.dim}\, A+\max\{\mathrm{fil.dim}\, A,1\})},$$

де

$$L'(A) = \begin{cases} L(A), & \text{якщо } \mathrm{fil.dim}\, A > 1; \\ L(A) + 1, & \text{якщо } \mathrm{fil.dim}\, A = 1; \\ 1, & \text{якщо } \mathrm{fil.dim}\, A < 1; \end{cases}$$

відп.

$$l(A) \leq l^2(M)(c(c+1))^{\mathrm{GK}\,(A)/(\mathrm{fil.dim}\, A+\max\{\mathrm{fil.dim}\, A,1\})}.$$

Теорема 3.5. Нехай алгебра A задовольняє умовам Теореми 3.3. Тоді голономний $A-$модуль M має скінчену довжину $\leq l(M)/c_A$ (відп. $l(M)/c'_A$), де c_A і c'_A - фіксовані і явно обчислювані по A константи.

Частина 3. Алгебра - Шурівська, коли кожний її простий модуль - Шурівський (тобто його кільце ендоморфізмів - основне поле).

Алгебра A - **тензорно-проста** , якщо

$$\hat{A} \otimes \hat{B} \subseteq (A \otimes B)\hat{} \text{ для довільної алгебри } B,$$

тобто тензорний добуток $M \otimes N$ простих $A-$ і B- модулів M і N, відповідно, є простим $A \otimes B$- модулем (для довільної алгебри B і довільного простого B- модуля N).

Теорема 3.1. Кожна Шурівська алгебра є тензорно-простою.

Наслідок 3.2. Кожна афінна алгебра над а.з. незліченним полем є тензорно-простою.

Частина 4. В р.4.2 класифіковано (прості) модулі M над алгеброю Вейля A_n, що мають розмірність Гельфанда-Кирилова $\mathrm{GK}(M) = n$ і кратність $e(M) = 1$ (мінімальні можливі розмірність і кратність для с.п. $M \neq 0$).

Теорема 4.1. Скінченопороджений A_n- модуль M має размірність $\mathrm{GK}(M) = n$ і кратність $e(M) = 1$ тоді і тільки тоді, коли $M \approx {}^{\tau} W_n$ (підкручений модуль) для деякого автоморфізму $\tau \in Aut_B(A_n)$, що зберігає фільтрацію Бернштейна $B = \{B_i\}$ алгебри A_n, де $W_n = A_n/A_n(\partial_1, ..., \partial_n)$.

Наступна теорема характеризує будову простого голономного A_n-модуля M, ($\mathrm{GK}(M) = n$). Нехай $L = K(X_1, ..., X_n)$ - поле раціональних функцій і $S = K[X_1, ... X_n]$ - кільце многочленів.

Теорема 4.2. Для кажного простого голономного A_n-модуля M існує автоморфізм $\tau \in Aut_B(A_n)$ такий, що підкручений модуль ${}^{\tau}M$ є A_n-підмодулем модуля $L \otimes_S {}^{\tau}M$ і $dim_L(L \otimes_S {}^{\tau}M) \leq e(M)$ (кратність модуля M).

Частина 5. Нехай $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ - градуйоване комутативне Нетерове кільце. Тоді кільце A_0 - Нетерове і A_0-алгебра A

породжена деякими елементами $x_1, \ldots, x_s$ степенів $k_1, \ldots, k_s$, відповідно. Нехай l - адитивна функція на множині с.п. A_0-модулів.

В р.5.2 (Теорема 2.3) узагальнюється теорема Гільберта-Серра.

Теорема 2.3. Нехай M - с.п. градуйований A-модуль, $k =$ НСК$(k_1, \ldots, k_s)$ Тоді

1. існує k многочленів $\psi_0, \ldots, \psi_{k-1} \in Q[t]$ степені $\leq d-1$ з коефіцієнтами в $[k^{d-1}(d-1)!]^{-1}Z$ таких, що

   $$\lambda_M(n) = \psi_j(n), \text{ для всіх } n \gg 0 \text{ таких, що } n \equiv j(\bmod k);$$

2. існує k многочленів $\gamma_0, \ldots, \gamma_{k-1} \in Q[t]$ степені $\leq d$ з коефіцієнтами в $[k^d d!]^{-1}Z$ таких, що

   $$\chi_M(n) = \gamma_j(n), \text{ для всіх } n \gg 0 \text{ таких, що } n \equiv j(\bmod k);$$

   де λ_M і χ_M - відповідно функція і інтегральна функція Гільберта модуля M.

3. якщо λ - невід'ємна, то всі многочлени γ_j мають однакову степінь $d(=$ кратність полюса ряду Пуанкаре $P(M,t)$ в точці $t=1)$ і однакові старші коефіцієнти.

В класичній ситуації $k_1 = \ldots = k_s = 1$, Теорема 2.3 наз. теоремою Гільберта-Серра, а єдиний многочлен γ_0 - многочленом Гільберта.

В р.5.2 вводиться і вивчається новий клас градуйованих кілець - KCF-кільця та KCF-розширення. Він включає клас комутативних Нетерових градуйованих кілець і для нього доведені аналоги теореми Гільберта-Серра (Теореми 2.5, 2.6 і Наслідки 2.7, 2.9).

Нехай $\mathcal{AGCN}$ і $\mathcal{SC}$ - відповідно клас афінних градуйованих комутативних Нетерових алгебр і майже комутативних алгебр. Нехай $\mathcal{H}$ і $\mathcal{P}$ - відповідно алгебри, породжені усіма функціями Гільберта і рядами Пуанкаре с.п. модулів над алгебрами з одного із класів вище. Теорема 3.9 стверджує, що існує ізоморфізм алгебр $\mathcal{H} \simeq \mathcal{P}$ (який будується явно) при якому інтегральна функція Гільберта переходить в ряд Пуанкаре. Цей явний ізоморфізм дає змогу відновити (інтегральну) функцію Гільберта по ряду Пуанкаре і навпаки.

Теорема 4.1. Нехай A - скінченовиділена проста афінна алгебра з $GK(A) < \infty$. Тоді її розмірність Крулля (у сенсі Габріеля-Ренчлера)

$$K.dim(A) \leq GK(A)(1 - 1/(\mathrm{fil.dim}\, A + \max\{\mathrm{fil.dim}\, A, 1\})).$$

Як стверджують Макконел і Робсон в своїй книзі “Некомутативні Нетерові кільця” (с.238): “не відомо прикладів не скінченовиділених алгебр”.

Частина 6. Нехай $R = \oplus_{i \in Z} R_i$ - Z-градуйоване кільце, $R_0 = D$, таке, що $R_i = Dv_i$, $v_i \in R_i$, - лівий вільний D-модуль рангу 1, $v_0 = 1$, існує автоморфізм σ кільця D такий, що

$$\alpha v_i \beta v_j = \alpha \sigma^i(\beta) c(i,j) v_{i+j}$$

для всіх $\alpha, \beta \in D$ і $i, j \in Z$ і деякого відображення (“2-коцикла ”) $c : Z \times Z \to Z(D)$, центр кільця D. УАР рангу 1 є прикладом R. Ціль р.2.6 - класифікувати (з точністю до незвідних елементів деякого Евклідового кільця) прості R-модулі у випадку, коли D - Дедекіндове кільце і $c(i,j) \neq 0$ для всіх $i, j \in Z$ (і також у випадку N-градуйованого кільця R). Як наслідок отримано класифікацію простих модулів багатьох відомих алгебр (напр., алгебри Вейля A_1, квантової алгебри Вейля $A_1(q)$, $Usl(2)$, $U_q sl(2)$, квантової площини, алгебри Сміта, першої деформації Віттена і деформації Вороновича, квантової группи $O_{q^2}(so(k,3))$, квантової алгебри Гейзенберга та ін.).

Локалізація $B = S^{-1}R = k[X, X^{-1}; \sigma]$ кільця R по $S := D \setminus \{0\}$ є кільцем косих Лоранівських многочленів з коефіцієнтами в полі $k = S^{-1}D$. R - область лівих і правих головних ідеалів. Задача класифікації простих R-модулів розпадається на дві:

$$\hat{R} = \hat{R}(\text{з } D - \text{скрутом}) \cup \hat{R}(\text{без } D - \text{скруту}).$$

Перша носить більш "геометричний" характер, друга - "арифметичний". Модулі з першого класу є в точності ваговими і в р.6.3 класифіковані $\hat{R}$(вагові), де D - довільне комутативне кільце.

Циклічна группа $G = <\sigma>$, діє очевидним чином на множині Specm (D) максимальних ідеалів D. Максимальний ідеал p і орбіта $\mathcal{O}(p) = \{\sigma^i(p), i \in Z\}$ наз. циклічними, якщо остання - скінчена, і лінійними - в іншому випадку.

Теорема 5.14. $\hat{R}$(без $D-$скруту) $\neq \emptyset$ тоді і тільки тоді, коли існує лише скінчена кількість циклічних максимальних ідеалів кільця D.

Для $\alpha, \beta \in S$ ми пишемо $\alpha < \beta$, якщо не існує максимальних ідеалів p и q із D, які належать лінійній орбіті і таких, що $\alpha \in p$, $\beta \in q$ і $p = \sigma^i(q)$ для деякого $i \geq 0$. Элемент $b = v_{-m}\beta_{-m} + \cdots + \beta_0 \in R$, всі $\beta_i \in D$, $\beta_{-m} \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $m > 0$, наз. **l-нормальним** , якщо $\beta_0 < \beta_{-m}$, і $\beta_0 < c(-1, 1)$. Для циклічної орбіти $\mathcal{O}$ позначимо через $\theta(\mathcal{O})$ добуток усіх ідеалів з $\mathcal{O}$.

Теорема А. **Нехай b - l-нормальний незвідний в B елемент з умовою**

(CO) $\quad R = R\theta(\mathcal{O}) + R \cap Bb$ *для довільної циклічної орбіти* $\mathcal{O}$.

Тоді $R/R \cap Bb$ - **простий** R-модуль без D-скруту ($= \mathrm{Soc}_R(B/Bb)$). **З точністю до ізоморфізму кожний** простий R-модуль без D-скруту **виникає таким чином**, де b - визначений однозначно з **точністю до подібності в B.**

Прикладом R є деяка природна фактор-алгебра V універсальної обгортуючої алгебри Вірасоро. В р.6.7 класифіковані усі прості V-модулі (побудовано нові серії простих не вагових модулів над алгеброю Вірасоро).

В р.6.8 класифіковані прості модулі у випадку N-градуйованого кільця R. В р.6.9 відп. 6.10 класифіковані прості модулі кільця косих Лоранівських многочленів з коефіцієнтами в Дедекіндово- му кільці відп. прості модулі квантової площини.

Частина 7. Нехай d=wd - слабка гомологічна розмірність або d=lgd - ліва гомологічна розмірність. Введено новий клас алгебр, а саме.

Алгебра A - **тензорно d- мінімальна** відносно деякого класу алгебр Ω, якщо

$$\mathrm{d}(A \otimes B) = \mathrm{d}A + \mathrm{d}B, \text{ для довільної алгебри } B \in \Omega.$$

Взагалі, ліва частина не менша за праву. У випадку d=wd (=lgd) алгебру A будемо наз. тензорно слабко мінімальною = ТСМ (тензорно гомологічно мінімальною = ТГМ). Теорема 7.4 дає достатню умову тензорної d-мінімальності. Вона використовується для доведення цієї властивості для тензорних добутків УАВ, а також для обчислення їх гомологічної розмірності (Наслідок 7.5, Теорема 7.6).

Якщо кільце R - комутативне, то wd $R = \sup\{\mathrm{wd}\,R_m \mid m \in \mathrm{Specm}\,R\}$, де R_m - локалізація кільця R по максимальному ідеалу m. Ж.-Е. Рус узагальнив цей результат на клас некомутативних кілець для яких існує "досить багато" локалізацій. Наступна теорема показує як обчислювати $wd\,A$ коли локалізацій "мало".

<u>Теорема 7.2.</u> Нехай $\{A \to A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ - множина плоских розширень кільця A таких, що wd $A < \infty$, $\nu = \sup\{\mathrm{wd}\,A_\alpha \mid \alpha \in I\} < \infty$, $\mu = \sup\{\mathrm{fd}_A M \mid M$ - циклічний A- модуль такий, що $A_\alpha \otimes_A M = 0$ для всіх $\alpha \in I\}$; множина I - скінчена або A когерентно зправа. Тоді

1. або $\mathrm{wd}\ A = \mu$ або $\mu < \mathrm{wd}\, A \leq \nu$.

2. Якщо, додатково, $\nu \leq \mathrm{wd}\, A$ (напр., всі кільця A_α - локалізації кільця A), то $\mathrm{wd}\ A = \max\{\mu, \nu\}$.

Частина 8. Обчислено гомологічну розмірність УАВ $A = D(\sigma, a)$ рангу 1. Нехай $n = \mathrm{lgd}\, D$ - ліва гомологічна розмірність кільця D.

Теорема 2.7. Тоді $\mathrm{lgd}\, A = n$, $n + 1$ або ∞.

Теорема 2.10. Нехай D - Нетерове і $\mathrm{gld}\, A < \infty$. Тоді гомологічна розмірність $\mathrm{gld}\, A = \max\{n, \mu'\}$, де $\mu' = \sup\ \{M|\ {}_AM$ – простий с.п. D – модуль$\}$.

Наслідок 2.12. Нехай D - напівпервинне Нетерове кільце, $n < \infty$, $\mathrm{gld}\, A < \infty$, тоді $\mathrm{gld}\, A = n + 1$ тоді і тільки тоді коли існує простий A-модуль M, скінченнопороджений над D і $\mathrm{pd}_D M = n$.

Теорема 3.5. Нехай D - комутативна Нетерова область скінченої гомологічної розмірності n, $a \neq 0$. Тоді $\mathrm{gld}\, A < \infty$ тоді і тільки тоді коли $A/A(X, p) < \infty$ для всіх первинних ідеалів p кільця D, що містять a.

Теорема 3.7. Нехай D - комутативне Нетерове кільце, $n < \infty$, a - регулярний, $\mathrm{gld}\, A < \infty$. Тоді $\mathrm{gld}\, A = n + 1$ тоді і тільки тоді коли існує циклічний максимальний ідеал кільця D висоти n або існують максимальні ідеали p, q кільця D висоти n такі, що $\sigma^i(p) = q$ для деякого $i \neq 0 \in Z$ і $a \in p, q$.

Доведено аналог теореми Гільберта про сизигії для алгебри Вейля A_n (та інших відомих УАВ):

$$\mathrm{lgd}\, A_n \otimes B = \mathrm{lgd}\, A_n + \mathrm{lgd}\, B.$$

для довільної зліченопороджекої Нетерової алгебри B, (основне поле - а.з. і незлічене).

Частина 9. Алгебра Вейля $A_n = A_1 \otimes \cdots \otimes A_1$, (n разів, $char\, K = 0$) - це тензорний добуток алгебр Вейля A_1, які є простими Нетеровими областями з обмеженою умовою мінімальності (о.у.м., тобто A_1 - не Артінове кільце, але кожний власний лівий і правий фактор модуль - Артіновий). Стафford показав, що кожний лівий і правий ідеал із A_n має не більше ніж 2 твірні і висунув гіпотезу, що аналогічний результат справедливий для більш загального класу алгебр, а саме простих Нетерових алгебр, що "побудовані" з простих алгебр з о.у.м.

В ч.9 такий клас алгебр знайдено (Теорема 9.2). На цьому шляху введено два нові класи алгебр - сильно прості і спеціальні.

K-алгебра A - **сильно проста** , якщо для довільних K-лінійно незалежних елементів $a_1, \ldots, a_r \in A$:

$$A(a_1, \ldots, a_r)A = A^{(r)} := A \oplus \cdots \oplus A.$$

Алгебра A наз. **спеціальною** , якщо для довільних скінченовимірних підпросторів V і U із A таких, що $VU \neq 0$ існують відповідно їх бази $\{a_i\}$ і $\{b_j\}$ такі, що ранг набора векторів $\{a_i b_j\}$ - строго більший за ранг $\{a_i b_j\} \backslash \{a_1 b_1\}$.

В р.9.2 показано, що багато відомих класів алгебр є спеціальними (Лема 2.2), напр., алгебри Вейля, універсальні обгортуючі алгебри алгебр Лі та ін., але матричні алгебри $M_n(K)$, $n \geq 2$, - не спеціальні. Наступна теорема дає відповідь на запитання Стафford.

Теорема 0.2. Нехай A_i $(i = 1, \ldots, n)$ - центральна спеціальна проста алгебра з о.у.м. . Нехай $A = A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$ і існує підалгебра C із A, що є тензорним добутком $C = C_1 \otimes \cdots \otimes C_n$ підалгебр C_i із A_i таких, що

1. для $i = 1, \ldots, n-1$ існує локалізація $S_i := T_i^{-1}T_{i-1}$ кільця $T_{i-1} = C_1 \otimes \cdots \otimes C_{i-1} \otimes A_i \otimes \cdots \otimes A_n$ по T_i з о.у.м. і існують $R_i = T_i^{-1}A$;

2. для $i = 2, \ldots, n$ існують повні кільця часток $E_i := \mathcal{D}(C_1 \otimes \cdots \otimes C_{i-1})$ і $F_i := \mathcal{D}(C_1 \otimes \cdots \otimes C_{i-1} \otimes A_{i+1} \otimes \cdots \otimes A_n)$ і кільце $\mathcal{D}(C_1 \otimes \cdots \otimes C_{i-1}) \otimes A_i$ є з о.у.м. .

Нехай $I = aA + bA + cA$ - правий ідеал із A і нехай d_1, d_2 - довільні відмінні від нуля элементи A. Тоді існують f і g із A такі, що

$$I = (a + cfd_1) + (b + cgd_2)A.$$

Значить, довільний скінченопороджений правий ідеал із A має не більше ніж 2 твірні. Якщо крім того A - Нетерова, то це вірно для довільного правого або лівого ідеалу.

Нехай алгебра A_i, $i = 1, \ldots n$, є простою УАВ однією з наступних двох типів:

1. $K[H](\sigma, a)$, $\sigma(H) = H - \mu$, $\mu \neq 0 \in K$, $char\, K = 0$;

2. $K[H, H^{-1}](\sigma, a)$, $\sigma(H) = lH$, $l \neq 0 \in K$.

Тоді їх тензорний добуток задовольняє умові Теореми 0.2 (Твердження 3.2)

В р.9.4 вивчається структура скінченопороджених A-модулів.

Нехай M - скінченопороджений A-модуль, A - з Теореми 0.2.

Теорема 4.2. Тоді $M \simeq M' \oplus A^{(s)}$, де M' - модуль рангу ≤ 1. Якщо M - без скруту, то M' - ізоморфний лівому ідеалу з A.

Теорема 4.4. Нехай ранг $M \geq 2$ і $M \oplus A \simeq N \oplus A$ для деякого модуля N. Тоді $M \simeq N$.

ПУБЛІКАЦІЇ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ

[Bav 1] В. В. Бавула, Конечномерность Ext^n-ов и Tor_n-ов простых модулей над одним классом алгебр. Функц. анал. и его прилож., **25** (1991), N 3, 80–82.

[Bav 2] В. В. Бавула, Простые $D[X, Y; \sigma, a]$-модули, Укр. мат. журн. 44 (1992), 1628–1644.

[Bav 3] V. V. Bavula, Generalized Weyl algebras, kernel and tensor-simple algebras, their simple modules, Representations of algebras. Sixth International Conference, August 19–22, 1992. CMS Conference proceedings (V.Dlab and H.Lenzing Eds.), v. 14 (1993), 83–106.

[Bav 4] В. В. Бавула, Обобщенные алгебры Вейля и их представления. Алгебра и анализ. 4 (1992), N 1, 75-97.

[Bav 5] V. V. Bavula, Tensor homological minimal algebras, global dimension of the tensor product of algebras and of generalized Weyl algebras, Bielefeld, preprint, 1994; Bull. de Sci. Math. **120** (1996), N 3, 293–335.

[Bav 6] V. V. Bavula, Global dimension of generalized Weyl algebras. Proccedings of the 7th Int. Conf. on Represent. of Algebras, August 22–26, 1994. CMS Conference proceedings (R. Bautista, R. Martinez-Villa and J. A. de la Pena Eds), **18** (1996), 81–107.

[Bav 7] В. В. Бавула, Описание двусторонних идеалов в одном классе некоммутативных колец, I. Укр. мат. журн. **45** (1993), N 2 ,223–234.

[Bav 8] В. В. Бавула, Описание двусторонних идеалов в одном классе некоммутативных колец, II. Укр. мат. журн. **45** (1993) N 3, 329–334.

[Bav 9] V. V. Bavula, Each Schurian algebra is tensor simple, Comm. Algebra, **23** (4) (1995), 1363–1368.

[Bav 10] В. В. Бавула, Крайние модули над алгеброй Вейля A_n. Укр. мат. журн. 45 (1993), N 9, 1195–1205.

[Bav 11] V. V. Bavula, Generalized Weyl algebras, Bielefeld, preprint, 1994.

[Bav 12] B. B. Бавула, Композиционные произведения модулей расширений простых весовых $sl(2)$-модулей. Межд. конф. по алгебре, Новосибирск, 1989, с. 15.

[Bav 13] B. B. Бавула, О некоторых обобщениях критерия Эйзенштейна, Укр. мат. журн. **42** (1990), N 7 , 983–985.

[Bav 14] B. B. Бавула, Классификация простых $sl(2)$-модулей и конечномерность модуля расширений простых $sl(2)$-модулей. Укр. мат. журн. **42** (1990), N 9, 1174–1180.

[Bav 15] V. V. Bavula, The bilateral ideals of $Usl(2)$. Abstracts of 2nd All-Union Conf. on Algebra, Altai Univ. Press, Barnaul, 1991, p. 137 (English).

[Bav 16] B. B. Бавула, Размерность модулей над фильтрованными кольцами. Респ. научно-метод. конф., Одесса, 1992, с. 3.

[Bav 17] B. B. Бавула, Вычисление $H^*(sl(2), M)$ с коэффициентами в простом $sl(2)$-модуле. Функц. анал. и его прилож. **26** (1992), N 1, 57-58.

[Bav 18] B. B. Бавула, Тождественность функции Гильберта и ряда Пуанкаре, размерность модулей над фильтрованными кольцами. Извест. РАН, **58** (1994), N 2, 19-39.

[Bav 19] B. B. Бавула, О конечномерности производных функторов. Доп. АН України, **8** (1994), 7–10.

[Bav 20] V. V. Bavula and V. I. Bekkert, Indecomposable representations of generalized Weyl algebras, Preprint, Univ. Bielefeld, 1994.

[Bav 21] V. V. Bavula, Filter dimension of algebras and modules, a simplisity criterion of generalized Weyl algebras, Comm. Algebra, **24** (1996), N 6, 1971–1992.

[Bav 22] B. B. Бавула, Классификация модулей размерности Гельфанда-Кириллова n и кратности 1 над алгеброй Вейля A_n. Извест. РАН, **60** (1996), N 3.

[Bav 23] V. V. Bavula, Module structure of the tensor product of simple algebras of Krull dimension 1. An. Št. Univ. Ovidius, Constanza, **4** (1996), N 2, 7–21.

Бавула В.В. Обобщенные алгебры Вейля. Диссертация (рукопись) на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел, Киевский университет им. Тараса Шевченко, г. Киев, 1996.

Вводятся и изучаются обобщенные алгебры Вейля (ОАВ), доказывается критерий их простоты. Вводится новая размерность алгебр и модулей - фильтрованная размерность. Доказывается аналог неравенства Бернштейна для простых аффинных алгебр. Для простых афинных алгебр устанавливается неравенство связывающее три размерности: размерность Крулля, Гельфанда-Кириллова и фильтрованную размерность. Доказывается, что каждая Шуровская алгебра есть тензорно-простой. Классифицированы простые модули над некоторыми Z-градуи- рованными кольцами. Над алгеброй Вейля A_n классифицируются модули размерности Гельфанда-Кириллова n и кратности 1. Обобщается теорема Руса, доказываются некоммутативные аналоги теоремы Гильберта о сизигиях. Вычисляется гомологическая и размерность Крулля ОАВ. Для широкого класса простых алгебр доказана гипотеза Стаффорда о 2-порждаемости левых идеалов. Основные результаты опубликованы в 23 работах.

Bavula V.V. Generalized Weyl algebras. A dissertation (manuskript) is presented for obtaining of the degree of a doctor of science by speciality 01.01.06 - algebra and number theory, Taras Shevchenko Kiev University, Kiev, 1996.

Generalized Weyl algebras (GWA) are introduced and studied. A simplicity criterion is proved. A new dimension of algebras and modules is introduced - the filter dimension. For simple affine algebras an inequality is established which connect three dimensions: the Krull, Gelfand-Kirillov and filter dimension. It is proved an analog of the Bernstein's inequality for simple affine algebras. It is proved that each Schurian algebra is tensor simple. The simple modules of certain Z-graded rings are classified. Over

the Weyl algebra A_n the modules of Gel [illegible] n and multiplicity 1 are classified. Roos's theorem is generalized and non-commutative analogues of the Hilbert syzygy theorem are proved. The Krull and global dimension of generalized Weyl algebras are calculated. For a large class of simple algebras the Stafford's hypothesis is proved. The main results are published in 23 papers.

Ключові слова: узагальнена алгебра Вейля, фільтрована та гомологічна розмірність, тензорно гомологічно мінімальна алгебра, простий модуль.

Підп. до друку 02.10.96. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,9.
Тираж 100 пр. Зам. 180. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3