Національна академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

АЛЄКСЄЄВА Ірина Віталіївна

УДК 53.072

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1996

519.876.5
519.6

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00343894 (V)

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано в Національному технічному університеті України «КПІ».

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор НЕМІШ Ю. М.,
доктор фізико-математичних наук, професор САВЧЕНКО В. І.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор СКОПЕЦЬКИЙ В. В.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент ДОВГИЙ Б. П.

Провідна організація: Львівський державний університет ім. Ів. Франка.

Захист відбудеться «22» листопада 1996 р. о 11 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.39.02 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України за адресою:

252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «21» жовтня 1996 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

16 35.881

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В різних галузях сучасної техніки і народного господарства інтенсивно впроваджуються нові конструкційні матеріали, в тому числі композитні. Визначення напружено-деформованого стану таких кусково-однорідних тіл, що знаходяться під дією різних механічних навантажень є необхідною задачею для оцінки їх міцності. Природа неканонічних поверхонь поділу широка і різноманітна. Механізми їх утворення можливо умовно поділити на три категорії: природні, технологічні та інженерні. Їм відповідають різної форми поверхні чужерідних порід, порожнин, свердловин і виробок в гірських масивах; хвилясті поверхні поділу в складених матеріалах і виробах, утворених при зварюванні вибухом; границі виступів, виточок і некругових отворів в елементах конструкцій та ін.

Як показали теоретичні та експериментальні дослідження, форма поверхні поділу суттєво впливає на фізико-механічні явища (міцність з'єднання, концентрацію напружень, теплопровідність та ін.). Тому математичне моделювання задач та побудова їх аналітичних розв'язків для просторових неканонічних областей має теоретичне та прикладне значення. З теоретичної точки зору актуальність роботи визначається математичними труднощами аналітичного розв'язку в тривимірній постановці крайових задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл складної геометричної конфігурації.

Великий внесок в розвиток аналітичних методів розв'язку просторових задач теорії пружності зробили А.Я.Александров, В.Т.Грінченко, О.М.Гузь, В.Г.Карнаухов, А.Д.Коваленко, О.С.Космодаміанський, С.Г.Лехницький, А.І.Лур'є, Ю.М.Неміш, П.Ф.Папкович, Ю.М.Подільчук, В.Л.Рвачов, А.Ф.Улітко, Г.С.Шапіро та ін.

Розв'язок крайових задач для неканонічних областей проводять різними наближеними аналітичними, чисельними і чисельно-аналітичними методами. Для областей, що розглядаються в роботі, наближені аналітичні розв'язки просторових крайових задач статики одержані в основному для випадку пружного середовища з вільною від напружень порожниною або абсолютно жорстким включенням. Враховуючи, що математичні моделі цих задач виявляються нелінійними, застосування чисельних методів для їх розв'язку не завжди ефективно, а часто і принципово

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

неможливо. Застосування з цією метою наближених аналітичних м. годів, пов'язаних з великим обсягом громіздких аналітичних перетворень, ставить задачі використання як інструментальних засобів систем комп'ютерної алгебри, розробки комп'ютерних аналітичних методів, алгоритмів їх реалізації і створення відповідних програмних систем. Математичне моделювання задач теорії пружності з використанням комп'ютерних аналітичних методів вперше розвивається в цій дисертаційній роботі.

Напрямок досліджень, пов'язаний з підвищенням рівня машинного інтелекту, започатковано науковою школою академіка В.М.Глушкова створенням ЕОМ, орієнтованих на розв'язок задач чисельно-аналітичними методами. Для опису таких методів була розроблена мова програмування високого рівня АНАЛІТИК, що відрізняється функціональною повнотою аналітичних перетворень, розвинутим математичним інтелектом, зручними засобами діалогової взаємодії користувача з системою.

Метою дисертаційної роботи є розробка чисельно-аналітичних методів математичного моделювання, їх програмна реалізація з використанням систем аналітичних перетворень для широкого класу крайових задач теорії пружності для неканонічних областей і дослідження з їх допомогою осесиметричного напруженого стану кусково-однорідних тіл з поверхнями поділу, близькими до сферичних.

Методами досліджень є метод збурення форми границі, методи лінійної алгебри, комп'ютерної алгебри, обчислювальної математики та теорії рівнянь у частинних похідних.

Наукова новизна роботи полягає в розробці нетрадиційної методики, що являє собою синтез узагальненого варіанту методу збурення форми границі (розвинутого для розв'язку крайових задач для неканонічних поверхонь, що описуються параметрично нелінійними рівняннями) і комп'ютерних аналітичних методів, реалізованих з використанням систем програмування АНАЛІТИК; дослідженні ефективності і практичної збіжності розвинутого методу; розробці алгоритму, який опирається на складну структуру даних; побудові наближених аналітичних розв'язків нових крайових задач про пружну рівновагу кусково-однорідних тіл обертання при крученні; дослідженні напруженого стану еформівних тіл з пружними неканонічними включеннями; виявленні характерних статичних механічних ефектів для

розглянутого класу кусково-однорідних тіл з поверхнями поділу, близькими до сферичних.

Достовірність отриманих результатів підтверджується дослідженням практичної збіжності числових результатів при розв'язку конкретних задач, а також порівнянням отриманих наближених розв'язків для еліпсоїдальних областей з відомими точними і наближеними значеннями.

Практична цінність роботи полягає в розробці і реалізації на мовах АНАЛІТИК-79 и АНАЛІТИК-91 алгоритмів, що з достатньою точністю забезпечують можливість розрахунку осесиметричного напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл та елементів конструкцій з неканонічними поверхнями поділу, що допускають зміну геометричних і механічних параметрів.

Апробація роботи і публікації. Наукові і практичні результати роботи доповідались і обговорювались на семінарі "Системы аналитических вычислений /методы компьютерной алгебры/ в механике деформируемого твердого тела" (Київ, 1988), на Всесоюзній конференції "Аналитические преобразования на ЭВМ в автоматизации научно-исследовательских работ" (Вільнюс, 1990), на науково-технічній конференції "Применение ЭВМ для решения задач механики" (Севастополь, 1991), на Всесоюзній конференції "Механика неоднородных структур" (Львів, 1991), на кафедрі вищої математики №1 Національного технічного університету України (Київ, 1996). Результати дисертаційної роботи відображені в 5 статтях і 3 тезах доповідей.

Особистий внесок дисертанта полягає в розробці чисельно-аналітичного методу математичного моделювання напруженого стану кусково-однорідних тіл обертання, алгоритмів його реалізації, розв'язку нових задач і участі в аналізі отриманих результатів; співавтору робіт [2,4,7,8] належить постановка задач і участь в аналізі одержаних аналітичних і числових результатів.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, поділених на 12 параграфів, заключення, списку літератури з 82 назв і двох додатків. Об'єм роботи – 126 сторінок тексту, 9 сторінок списку літератури і 25 сторінок додатків.

ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Вступ вміщує короткий огляд наближених чисельно-аналітичних методів, що використовуються для розв'язку

просторових задач теорії пружності для неканонічних областей, а також комп'ютерних систем аналітичних перетворень математичних формул. Обгрунтовується актуальність тематики дисертаційної роботи, формулюється мета досліджень і основні положення, що виносяться на захист, приводиться зміст всіх розділів дисертації.

В першому розділі наведені основні рівняння і співвідношення просторової теорії пружності, а також загальні розв'язки рівнянь рівноваги в сферичній системі координат в припущенні, что деформації в кусково-однорідним тілі, що перебуває під дією силових довільно розподілених навантажень, являються малими, тобто описуються лінійною теорією пружності.

Викладені основи застосованого в роботі узагальненого варіанту методу збурення форми границі для кусково-однорідних тіл з неортогональними поверхнями поділу, близькими до сферичних. Розвинутий підхід не залежить від рівнянь стану, що дозволяє застосовувати його для розв'язку широкого класу задач механіки суцільного середовища. Характерною особливістю цього методу є те, що він дозволяє звести поставлену крайову задачу для кусково-однорідної неканонічної області, близької до сферичної, до рекурентної послідовності відповідних крайових задач для сферичної області. В кожному наближенні рівняння рівноваги залишаються незмінними, а форма неканонічної поверхні поділу враховується тільки через крайові умови, причому кожне наступне наближення враховує розв'язки задачі в усіх попередніх.

Загальний розв'язок осесиметричних рівнянь теорії пружності, що використовуються в роботі, виражається через поліноми Лежандра та їх похідні. Наводяться властивості поліномів Лежандра та їх рекурентні співвідношення. Записано розклад тригонометричних функцій за поліномами Лежандра або їх похідними.

Коротко викладені основні властивості останніх версій родини алгоритмічних мов АНАЛІТИК. Функції і операції, що реалізовані в системі АНАЛІТИК, в основному орієнтовані на використання чисельно-аналітичних методів, тобто на роботу з інформаційними об'єктами, близькими до виразів математичного аналізу. Мова АНАЛІТИК, як універсальна мова програмування, може формально використовуватися для задач, які розв'язуються за допомогою таких популярних мов, як ФОРТРАН, ПАСКАЛЬ та інших, але ефективність її застосування виявляється при розв'язку задач, що

пов'язані з такими складними об'єктами, як десяткові числа з великою кількістю знаків мантиси, раціональні і цілі числа довільної довжини, різні символьні ієрархічні структури. Основна увага була приділена розробці алгоритмів, що реалізують найбільш типові для чисельно–аналітичних методів перетворення, пов'язані з нелінійними задачами механіки, фізики, небесної механіки, астрономії та іншими, при розв'язку яких використовуються методи малого параметру або довгі відрізки функціональних рядів.

В другому розділі наводиться постановка задачі про пружну рівновагу при крученні кругового циліндру з пружним включенням неканонічної форми, в припущенні, що зовнішні (циліндрична і торцеві) поверхні знаходяться на достатній відстані від включення і суттєво не впливають на напружений стан поблизу неканонічних поверхонь. Поверхня поділу S задається в сферичних координатах r,θ,α (r – безрозмірна змінна, що відноситься до характерної довжини r_0, θ – кут широта, α – кут довготи) параметрично нелінійним рівнянням

$$r = r_1 + \sum_{k=0}^{2} \varepsilon^{k+1} f_k(\theta) + O(\varepsilon^4) \quad (r_1 = const), \tag{1}$$

де досить гладкі функції $f_k(\theta)$ характеризують форму S, а малий параметр ε ($\varepsilon << 1$) – величину її відхилення від сфери $r = r_1 = 1$.

В припущенні, що на поверхні поділу S відбувається ідеальний контакт (повне механічне зщеплення) умови спряження мають вигляд

$$u_{\alpha,1}\big|_S = \left(u_{\alpha,2} + \hat{u}_\alpha\right)_S ; \tag{2}$$

$$\left(\sigma_{r\alpha,1} n_r + \sigma_{\theta\alpha,1} n_\theta\right)_S = \left[\left(\sigma_{r\alpha,2} + \hat{\sigma}_{r\alpha}\right) n_r + \left(\sigma_{\theta\alpha,2} + \hat{\sigma}_{\theta\alpha}\right) n_\theta\right]_S .$$

Тут $u_{\alpha,l}$, $\sigma_{i\alpha,l}$ ($l = 1,2$; "1" відповідає включенню, а "2" – зовнішньому середовищу) переміщення і напруження збуреного стану розглянутого тіла, що задовільняють однорідним рівнянням рівноваги, n_j – направляючі косинуси нормалі $\vec{n}$ до поверхні S, $\hat{u}_\alpha, \hat{\sigma}_{i\alpha}$ – компоненти основного (номінального) напружено–деформованого стану, що відповідають заданому зовнішньому навантаженню.

При такому заданні поверхні S змінні в умовах (2) не відокремлюються через складну форму поверхні S. Тому, розв'язок

шукається в вигляді рядів за додатніми степенями малого параметра ε

$$u_{\alpha,l} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{\alpha,l}^{(n)}; \qquad (3)$$

$$\sigma_{l\alpha,l} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{l\alpha,l}^{(n)};$$

Припускаючи, що компоненти напружено-деформованого стану допускають розклад в ряди Тейлора в околі $r = r_1$, і представляючи відповідні компоненти, що входять в (2), ь ряди за степенями ε, одержимо наступні умови спряження на границі поділу S в довільному наближенні

$$\left[u_{\alpha,1}^{(n)} - u_{\alpha,2}^{(n)}\right]_{r=r_1} = \sum_{k=1}^{n} L^{(k)}\left[u_{\alpha,2}^{(n-k)} - u_{\alpha,1}^{(n-k)}\right]_{r=r_1} + L^{(n)}\hat{u}_\alpha\Big|_{r=r_1};$$

$$\left[\sigma_{r\alpha,1}^{(n)} - \sigma_{r\alpha,2}^{(n)}\right]_{r=r_1} = \sum_{k=1}^{n}\left\{D_1^{(k)}\left[\sigma_{r\alpha,2}^{(n-k)} - \sigma_{r\alpha,1}^{(n-k)}\right] + \right.$$

$$\left. + D_2^{(k)}\left[\sigma_{\theta\alpha,2}^{(n-k)} - \sigma_{\theta\alpha,1}^{(n-k)}\right]\right\}_{r=r_1} + \left[D_1^{(n)}\hat{\sigma}_{r\alpha} + D_2^{(n)}\hat{\sigma}_{\theta\alpha}\right]_{r=r_1}. \qquad (4)$$

Диференціальні оператори в перших чотирьох наближеннях мають вигляд

$$L^{(0)} = D_1^{(0)} = 1, D_2^{(0)} = 0.$$

$$L^{(1)} = D_1^{(1)} = f_0(\theta)\frac{\partial}{\partial r}, \qquad D_2^{(1)} = -\frac{1}{r_1} f_0'(\theta); \qquad (5)$$

$$L^{(2)} = f_1(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} f_0^2(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \qquad D_1^{(2)} = L^{(2)} - \frac{1}{2r_1^2} f_0'^2(\theta);$$

$$D_2^{(2)} = -\frac{1}{r_1} f_0'(\theta) L^{(1)} + \frac{1}{r_1}\left[\frac{1}{r_1} f_0'(\theta) f_0(\theta) - f_1'(\theta)\right];$$

$$L^{(3)} = f_2(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + f_0(\theta) f_1(\theta)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{6} f_0^3(\theta)\frac{\partial^3}{\partial r^3};$$

$$D_1^{(3)} = L^{(3)} - \frac{1}{2r_1^2} f_0'^2(\theta) L^{(1)} + \frac{1}{r_1^2} f_0'(\theta)\left[\frac{1}{r_1} f_0'(\theta) f_0(\theta) - f_1'(\theta)\right];$$

$$D_2^{(3)} = -\frac{1}{r_1} f_0'^2(\theta) L^{(2)} + \frac{1}{r_1}\left[\frac{1}{r_1} f_0'(\theta) f_0(\theta) - f_1(\theta)\right] L^{(1)} - \frac{1}{r_1} f_2(\theta) +$$

$$+\frac{1}{r_1^2}\left[f_1'(\theta)f_0(\theta)+f_0'(\theta)f_1(\theta)\right]+\frac{1}{2r_1^3}f_0'(\theta)\left[f_0'^2(\theta)-2f_0^2(\theta)\right].$$

Компоненти $u_{j,l}^{(n)}$, $\sigma_{ij,l}^{(n)}$ записуються на основі загального розв'язку в формі П.Ф.Папковича–Г.Нейбера однорідних рівнянь рівноваги в сферичних координатах

$$u_{\alpha,1}^{(n)}=-\frac{1}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,1}^{(n)}r^m\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta};$$

$$\sigma_{r\alpha,1}^{(n)}=-\frac{G_1}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)B_{m,1}^{(n)}r^{m-1}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta};$$

$$\sigma_{\theta\alpha,1}^{(n)}=\frac{G_1}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,1}^{(n)}r^{m-1}\left[m(m+1)P_m(\cos\theta)+2ctg\theta\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\right];$$

$$u_{\alpha,2}^{(n)}=-\frac{1}{r_0}\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,2}^{(n)}r^{-m-1}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta};\qquad(6)$$

$$\sigma_{r\alpha,2}^{(n)}=\frac{G_2}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}(m+2)B_{m,2}^{(n)}r^{-m-2}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta};$$

$$\sigma_{\theta\alpha,2}^{(n)}=\frac{G_2}{r_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,2}^{(n)}r^{-m-2}\left[m(m+1)P_m(\cos\theta)+2ctg\theta\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\right],$$

де $P_m(\cos\theta)$ – поліноми Лежандра m – го порядку, $B_{m,l}^{(n)}$ – довільні сталі, які необхідно визначити з умов (4).

Таким чином, розв'язок поставленої задачі зведено до розв'язку послідовності відповідних граничних задач для циліндра зі сферичним включенням.

Припускається, що форма розглянутої поверхні обертання S така, що її меридіональний переріз описується за допомогою функції конформного відображення

$$r_0^{-1}\omega(\zeta)=\zeta+\varepsilon f(\zeta)=re^{i\theta}\quad\left(\xi=\rho e^{i\gamma}\right),\qquad(7)$$

причому S співпадає з координатною поверхнею $\rho=1$.

На основі (7) змінні r,θ виражаються через функцію $\omega(\zeta)$ за формулами

$$r=r_0^{-1}\sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}};\qquad\theta=arctg\frac{\operatorname{Im}\omega(\zeta)}{\operatorname{Re}\omega(\zeta)}.\qquad(8)$$

Розглядається клас поверхонь, які описуються функцією (7), де

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} a_j \zeta^{-j} . \tag{9}$$

Якщо рівняння цих поверхонь в сферичних координатах представити в вигляді (1), то функціональні коефіцієнти $f_k(\theta)$ ($k = 0,1,2$) для функції (7) будуть мати слідуючу аналітичну структуру

$$f_0(\theta) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(j+1)\theta ; \tag{10}$$

$$f_1(\theta) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j a_k \frac{2j+1}{4}\left[\cos(j+k+2)\theta - \cos(j-k)\theta\right];$$

$$f_2(\theta) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_j a_k a_m \left\{\left[\frac{1-j+k}{8} + \frac{j+1}{2}\left(\frac{j+1}{4} - \frac{k}{2}\right)\right]\times\right.$$

$$\times\cos(j-k-m-1)\theta + \left[\frac{j-k-1}{8} - \frac{j+1}{2}\left(\frac{j+1}{4} - \frac{k}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\cos(j-k+m+1)\theta + \left[\frac{j+k+1}{8} - \frac{j+1}{2}\left(\frac{j+1}{4} + \frac{k}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\cos(j+k-m+1)\theta + \left[-\frac{j+k+1}{8} + \frac{j+1}{2}\left(\frac{j+1}{4} + \frac{k}{2}\right)\right]\times$$

$$\left.\times\cos(j+k+m+3)\theta\right\}.$$

При розгляді крайових задач про пружну рівновагу тіл у випадку складних поверхонь поділу (особливо, коли вони описуються нелінійними рівняннями відносно малого параметру), одержання аналітичного розв'язку з високою степенню точності ускладнено в зв'язку з великою кількістю аналітичних перетворень. В дисертаційній роботі ці труднощі частково долаються. Для одержання розв'язку в аналітичному вигляді запропоновано алгоритм, що базується на спільному застосуванні методу збурення форми границі і можливостей системи програмування АНАЛІТИК. Граничні умови (4) перетворюються до вигляду, зручного для програмування на ЕОМ. При розв'язку граничних задач методом збурення форми границі для складання систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно довільних сталих $B_{m,l}^{(n)}$ в кожному наближенні виникає необхідність перерозкладати добутки

тригонометричних функцій на поліноми Лежандра та їх похідні в ряди тільки за першими похідними від поліномів Лежандра.

Необхідний розклад одержуємо, використовуючи експоненціальну форму запису тригонометричних функцій. Для задач, що розглядаються в цій роботі побудована таблиця розкладу тригонометричних функцій за похідними від поліномів Лежандра $dP_m(\cos\theta)/d\theta$. Враховуючи одержані розклади, приходимо до систем лінійних алгебраїчних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від G_1 и G_2 (модулей зсуву включення і циліндру). Розв'язок систем знаходимо за методом Крамера.

Цей алгоритм програмно реалізований на мові АНАЛІТИК–79, з його допомогою можна досліджувати досить широкий клас просторових крайових задач для складних поверхонь поділу.

Структура даних, яка підтримує процес розв'язку задач, що розглядаються в дисертаційній роботі, являє собою набір файлів і каталогів, в яких зберігається вся необхідна інформація для виконання символьних обчислень. Ця інформація ділиться на дві структурно незалежні частини, перша з яких є незмінний набір вираз в для всіх класів задач і існує під час розв'язку всіх задач, а друга відноситься до конкретної задачі і існує тільки під час розв'язку цієї задачі. До першої частини відносяться самі многочлени Лежандра, їх різні види для різних етапів розв'язку, в тому числі експоненціальна форма і форма розкладу поліномів Лежандра через тригонометричні функції. До другої частини відносяться коефіцієнти диференціальних операторів в різних видах – тригонометричному і експоненціальному, робочі коефіцієнти для обчислення правих частин систем лінійних рівнянь, різні форми визначника системи лінійних рівнянь, а також результати обчислень.

Структура програм базується на описаній структурі даних і адаптована до технічних можливостей системи програмування АНАЛІТИК. Одною з основних вимог до структури програмного комплексу є надання користувачу можливості продовжувати символьні обчислення з любої контрольної точки. При цьому контрольні точки створюються у всіх місцях програмної системи, де формуються проміжні результати аналітичних перетворень.

Специфіка розв'язку на ЕОМ математичних задач аналітичними методами пов'язана з особливостями інформаційних об'єктів, що описують ці задачі. Такими об'єктами є математичні

вирази і формули, довжина яких не може бути обмежена і суттєво змінюється в процесі перетворень. Ці обставини роблять неможливим статичний розподіл оперативної пам'яті даних і ставить проблему динамічної організації пам'яті. Проблема ускладнюється тим, що перетворення порівняно невеликих вхідних формул приводить до проміжних результатів величезних розмірів. Така специфіка задач враховується в структурі програмного комплексу, де проблема динамічної організації пам'яті посідає одне з основних місць. Передбачена в структурі комплексу можливість перетворення громіздких виразів частинами з запам'ятовуванням проміжних результатів в дисковій пам'яті і наступною збіркою виразів – кінцевих результатів дозволяє розв'язати протиріччя між обмеженим (хоча можливо і достатньо великим) об'ємом оперативної пам'яті і швидким ростом розмірів проміжних результатів.

Ключевою процедурою в цьому програмному комплексі є ділення поліномів з багатьма змінними. Це випливає з алгоритму знаходження загального розв'язку задачі, який базується на розв'язку методом Крамера систем лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами яких є математичні (символьні) вирази.

Ділення поліномів з багатьма змінними в загальній постановці є складною математичною і алгоритмічною проблемою, але звузивши постановку задачі ділення на клас поліномів, що виникають при розв'язку задач теорії пружності, в дисертаційній роботі побудовано і програмно реалізовано ефективно діючий алгоритм ділення поліномів. Алгоритм ділення поліномів базується на властивостях множення поліномів і фактично є розв'язком систем лінійних рівнянь з числом рівнянь, більшим від числа змінних.

Розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають в цій задачі, представляють собою дроби, чисельниками і знаменниками яких є поліноми. Тому виникає необхідність перевірки ділимості націло полінома – чисельника розв'язку поставленої крайової задачі на поліном – знаменник, що є визначником основної матриці системи.

Для задач, що розглядаються в цій роботі знаменники являються добутком двочленів виду

$$(m-1)G_1+(m+2)G_2 \qquad (11)$$

для різних значень m (m – порядок полінома Лежандра).

Добуток поліному, що має бути визначеним

$$\sum_{i_1=0}^{n_1}\sum_{i_2=0}^{n_2} K_{i_1 i_2} G_1^{i_1} G_2^{i_2} \tag{12}$$

на двочлен (11) можна записати в вигляді

$$\sum_{i_1=0}^{n_1+1}\sum_{i_2=0}^{n_2+1} G_1^{i_1} G_2^{i_2} \tilde{K}_{i_1 i_2}, \tag{13}$$

де

$$\tilde{K}_{i_1 i_2} = K_{i_1-1\ i_2}(m-1) + K_{i_1\ i_2-1}(m+2),\ i_1 \geq 1 \text{ и } i_2 \geq 1;$$

$$\tilde{K}_{i_1 0} = (m-1) K_{i_1-1\ 0}, \qquad i_1 \geq 1;$$

$$\tilde{K}_{0 i_2} = (m+2) K_{0\ i_2-1}, \qquad i_2 \geq 1;$$

$$\tilde{K}_{00} = 0.$$

Таким чином, якщо коефіцієнти $\tilde{K}_{i_1 i_2}$ відомі, то коефіцієнти $K_{i_1 i_2}$ можна знайти з переозначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь размірності $(n_1+1)\times(n_2+1)$. При цьому з перших $n_1 n_2$ рівнянь знаходяться коефіцієнти частки, а інші $(n_1+1)\times(n_2+1)-n_1 n_2$ рівнянь стануть критерієм перевірки ділимості одного полінома на другий.

Процедура, що базується на цьому алгоритмі дозволяє суттєво спростити вид проміжних результатів і уникнути накопичення громіздких виразів, тому що при розв'язанні поставлених граничних задач кожне наступне наближення враховує результати всіх попередніх.

Б третьому розділі досліджується задача про пружну рівновагу при крученні кругового циліндру з неканонічними включеннями складної форми. Проведена перевірка ефективності розробленого підходу на задачі про кручення циліндра з еліпсоїдальною порожниною. Ця задача допускає точний аналітичний розв'язок в еліпсоїдальних координатах. З іншого боку, можна одержати наближений аналітичний розв'язок цієї задачі методом збурення форми границі.

В таблиці поряд з точними числовими значеннями коефіцієнта концентрації k_{sa}^{T} наведені наближені дані для $k_{sa}^{(n)}$, одержані за допомогою розробленого алгоритму, а також їх відносні похибки $\Delta^{(n)}$.

ε	b/a	k_{sa}^{T}	$k_{sa}^{(0)}$	$\Delta^{(0)}$,%	$k_{sa}^{(1)}$	$\Delta^{(1)}$,%	$k_{sa}^{(2)}$	$\Delta^{(2)}$,%	$k_{sa}^{(3)}$	$\Delta^{(3)}$,%
−1/3	2	1,633	1,25	23,5	1,488	8,9	1,586	2,9	1,617	0,96
−1/5	3/2	1,437	1,25	13,0	1,393	3,1	1,428	0,6	1,435	0,14
−1/7	4/3	1,375	1,25	9,1	1,352	1,7	1,370	0,4	1,373	0,15
1/7	3/4	1,162	1,25	7,6	1,148	1,2	1,166	0,3	1,164	0,17
1/5	2/3	1,137	1,25	9,9	1,107	2,6	1,142	0,4	1,135	0,18
1/3	1/2	1,087	1,25	15,0	1,012	6,9	1,110	2,1	1,079	0,74

Наведені числові дані свідчать про досить хорошу практичну збіжність використаного наближеного методу. Так, при $|\varepsilon| \le 1/3$ похибка не перебільшує 1%, якщо розв'язок одержано з точністю $O(\varepsilon^4)$; така ж точність досягається при $|\varepsilon| \le 1/5$, якщо розв'язок задачі одержано з точністю $O(\varepsilon^3)$. При цьому слід мати на увазі, що відміна коефіцієнта концентрації напружень на еліпсоїдальній порожнині k_{sa}^{T} (при $|\varepsilon| \le 1/3$) від відповідного значення на сферичній порожнині $k_{sa}^{(0)}$ доходить до 23,5%.

Розглядається клас задач для функцій

$$f(\zeta) = \zeta^{-k}, \qquad (k=2,3,4,5), \tag{14}$$

яким при $k > 1$ для значень параметра ε в інтервалі $0 < |\varepsilon| \le k$ на площині відповідають $(k+1)$ – кутові контури (з округленими кутами). Гіпотрохоїдальні поверхні, що досліджуються, утворені обертанням відповідних плоских кривих навколо своїх осей симетрії.

Рівняння відповідних поверхонь обертання в змінних r,θ з точністю $O(\varepsilon^4)$ можна записати в вигляді

$$r = \rho + \varepsilon\rho^{-k}\cos(k+1)\theta - \frac{1}{2}(2k+1)\varepsilon^2\rho^{-(2k+1)}\sin^2(k+1)\theta -$$
$$-\frac{1}{2}k(3k+2)\varepsilon^3\rho^{-(3k+2)}\cos(k+1)\theta\sin^2(k+1)\theta + O(\varepsilon^4). \tag{15}$$

На основі викладеного алгоритму і програми на мові АНАЛІТИК–79 для ЕОМ СМ–1410 одержані наближені аналітичні розв'язки поставлених задач у вигляді функцій від G_1 і G_2 (модулей зсуву включення G_1 и циліндра G_2) для перших чотирьох наближень.

Розглядається просторова крайова задача про кручення циліндру з включенням, контур Γ ($\Gamma=\Gamma_1$ і $\Gamma=\Gamma_2$) довільного меридіонального перерізу поверхні S якого, описується функцією

$$\Gamma_1: \quad \omega_1(\zeta) = r_0\left[\zeta + \varepsilon\left(\zeta^{-1} + 0{,}4806\zeta^{-2}\right)\right] \quad (\varepsilon=0{,}1415); \tag{16}$$

$$\Gamma_2: \quad \omega_2(\zeta) = r_0\left[\zeta + \varepsilon\left(-\zeta^{-1} - 0{,}5\zeta^{-2}\right)\right] \quad (\varepsilon=0{,}3125). \tag{17}$$

Функціональні коефіцієнти $f_k(\theta)$ (k=0,1,2), що характеризують явний вигляд рівняння поверхні поділу S в формі (1), необхідні для розв'язку крайової задачі з точністю $O(\varepsilon^4)$, мають такий вигляд:

для контуру Γ_1:

$$\begin{aligned} &f_0(\theta)=\cos 2\theta+0{,}4608\cos 3\theta; \\ &f_1(\theta)=-1{,}0387-0{,}9612\cos\theta+0{,}75\cos 4\theta+0{,}9612\cos 5\theta+0{,}2887\cos 6\theta; \\ &f_2(\theta)=-1{,}0292\cos 2\theta-1{,}6638\cos 3\theta-0{,}6063\cos 4\theta+1{,}4418\cos 7\theta+ \\ &+1{,}0105\cos 8\theta+0{,}2220\cos 9\theta; \end{aligned} \tag{18}$$

для контуру Γ_2:

$$\begin{aligned} &f_0(\theta)=-\cos 2\theta-0{,}5\cos 3\theta; \\ &f_1(\theta)=-1{,}0625-\cos\theta+0{,}75\cos 4\theta+\cos 5\theta+0{,}3125\cos 6\theta; \\ &f_2(\theta)=1{,}0625\cos 2\theta+1{,}75\cos 3\theta+0{,}6562\cos 4\theta-0{,}625\cos 6\theta-1{,}5\cos 7\theta- \\ &-1{,}0938\cos 8\theta-0{,}25\cos 9\theta. \end{aligned} \tag{19}$$

Досліджено напружений стан розглянутих кусково–однорідних тіл і виявлено характерні механічні ефекти.

В заключенні наведені короткі висновки по дисертаційній роботі.

В додатках наведені таблиця розкладу різних тригонометричних функцій, що використовуються при розв'язку поставлених задач, за поліномами Лежандра і їх похідними; текст програм, що реалізують алгоритм розрахунку напружено–деформованого стану кусково–однорідних тіл з поверхнями поділу, близькими до сферичних.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

В дисертаційній роботі розвинуто чисельно–аналітичний метод математичного моделювання осесиметричного напруженого стану кусково–однорідних тіл обертання, що представляє собою синтез узагальненого варіанту методу збурення форми границі і програми

на мові АНАЛІТИК. Проведене його обгрунтування та реалізація для нових крайових задач для неканонічних областей. При цьому одержані основні результати полягають в такому:

1. Одержані функціональні коефіцієнти для параметрично нелінійних рівнянь в сферичних координатах, що характеризують форму некоординатної поверхні обертання. Це дає змогу розв'язувати осесиметричні крайові задачі про рівновагу деформівних тіл з пружними неканонічними включеннями методом збурення форми границі у випадку, коли поверхня включення описується за допомогою конформно відображуючої функції.

2. Запропонований і програмно реалізований на мові АНАЛІТИК алгоритм ділення поліномів спеціального виду з багатьма змінними.

3. Програмно реалізовані на мові АНАЛІТИК алгоритми математичного моделювання осесиметричного напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл з поверхнями поділу, близькими до сферичних, що дозволяють з достатньою для прикладних застосувань точністю проводити розрахунки механічних полів.

4. Досліджена практична збіжність використаного варіанту методу збурення форми границі (узагальненого на випадок параметрично нелінійних рівнянь поверхонь поділу) і проведено порівняння одержаних наближених числових результатів для еліпсоїдальних областей з відомими точними і наближеними розв'язками, одержаними раніше іншими дослідниками.

5. Одержано наближений аналітичний розв'язок в вигляді функцій від параметрів (модулів зсуву включення і циліндру) нового класу осесиметричних крайових задач про напружений стан циліндрів з пружними неканонічними включеннями, поверхні яких описуються конформно відображуючими функціями, при крученні. Розглянуті пружні включення, що відповідають гіпотрохоїдальним поверхням, а також поверхням більш складної форми.

6. На основі розробленого алгоритму і одержаного розв'язку нових задач проведено дослідження напруженого стану деформівних циліндрів з пружними неканонічними включеннями при крученні і виявлені характерні механічні ефекти.

<u>Основні результати роботи викладені в таких роботах</u>:

1. Алексеева И.В. О реализации метода возмущения формы границы в системе аналитических вычислений на СМ 1410 /

Киев, 1989. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.07.89; № 4848 – В89. (Прикл. механика. – 1990. – 26, № 3. – С.130)

2. Немиш Ю.Н., Алексеева И.В. Об использовании языка АНАЛИТИК и метода возмущения формы границы в краевых задачах для тел вращения // Системы аналитических вычислений в механике деформируемого твердого тела. – Киев. Ун–т, Киев. – 1990. – С. 20–26.: Деп. в УкрНИИНТИ 17.04.90, № 732 – УК90.
3. Алексеева И.В. Краевые задачи теории упругости для кусочно–однородных тел вращения и особенности их аналитического решения на ЭВМ / Аналитические преобразования на ЭВМ в автоматизации научно–исследовательских работ. Тез. докл. Вильнюс, 1990, С. 37–38.
4. Немиш Ю.Н., Алексеева И.В. К решению пространственных краевых задач для деформируемых кусочно–однородных тел вращения // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 2. – С. 36–42.
   Nemish Yu.N., Alekseeva I.V. Spatial boundary problems for deformable piecewise–homogeneous solids of revolution // Soviet Applied Mechanics. –1991.– vol.27, № 2. – P. 141–147
5. Немиш Ю.Н., Немиш В.Н., Маслов В.П., Алексеева И.В. Пространственные краевые задачи для деформируемых кусочно–однородных тел вращения // Механика неоднородных структур. Часть II: Тез. докл. – Львов.– 1991. – С. 224.
6. Алексеева И.В. Аналитические преобразования на ЭВМ для решения задач о равновесии при кручении тел вращения с упругими неканоническими включениями./ Применение ЭВМ для решения задач механики. Тез. докл Севастополь, 1991, С.41–42.
7. Немиш Ю.Н., Алексеева И.В. О напряженном состоянии тел вращения с упругими включениями // Прикл. механика. – 1994. – 30, № 4. – С. 54–64.
   Nemish Yu.N., Alekseeva I.V. Stress state of solids of revolution with elastic inclusion // International Applied Mechanics. –1994.– vol.30, № 4. – P. 292–301.
8. Немиш Ю.Н., Алексеева И.В. Об одном подходе к математическому моделированию осесимметричных задач теории упругости для кусочно–однородных тел вращения // Кибернетика и системный анализ. – 1996.– № 4. – С. 162–166.

Алексеева И.В. Численно-аналитический метод математического моделирования осесимметричного напряженного состояния кусочно-однородных тел вращения.

Диссертация является рукописью на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, 1996 г.

Защищается рукопись, в которой разработан и программно реализован, с использованием систем аналитических преобразований на ЭВМ, численно-аналитический метод математического моделирования задач механики деформируемых тел для неканонических областей. С помощью программы на языке АНАЛИТИК получено приближенное аналитическое решение нового класса задач для круговых цилиндров с упругими неканоническими включениями, поверхности раздела которых описываются нелинейными уравнениями относительно малого параметра, характеризующего степень их отклонения от сферы, при кручении. Проведено исследование характерных механических эффектов.

Alekseeva I.V. Numerical-analytical method of mathematical modelling of the axisymmetrical stress state of the piecewise-homogeneous solids of revolution.

Candidate of Phys. & Math. Sci. thesis, speciality 01.05.02 - mathematical modelling and numerical methods in scientific research. National Technical University of Ukraine "KPI", Kiev, 1996.

The manuscript contains numerical-analytical method of mathematical modelling of problems in the mechanics of deformable bodies with noncanonic surfaces that developed and software implemented with using the analytical software system. Approximate analytical solution of the new class of problems for the round cylinders with noncanonic elastic inclusions, interfaces of which are described by non-linear equations relative to small parameter that characterises their deviation from the sphere in case of rotation using a software based on ANALYTIC software system. Investigation of characteristic mechanical effects is developed.

Ключові слова: напружено-деформований стан, кусково-однорідні тіла обертання, метод збурення форми границі, крайова задача, аналітичні розв'язки, комп'ютерні аналітичні методи.

Підп. до друку 28.08.96. Формат 60×84/16. Папір офісний. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,28. Обл.-вид. арк. 0,91. Тираж 100. Зам. 396.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40

278533

Ав 35.881