НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

УДК. 539.384.385

М а р т и н о в и ч
Богдан Тимофійович

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВИХ ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ І ЗГИНУ ПРЯМОЛІНІЙНО-АНІЗОТРОПНИХ ПРИЗМАТИЧНИХ СТЕРЖНІВ ОДНО- І ДВОЗВ'ЯЗНОГО ПРОФІЛЮ

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1996

Робота виконана на кафедрі опору матеріалів державного університету "Львівська політехніка"

Науковий керівник - доктор технічних наук, професор МОЧЕРНЮК Д.Ю.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор ОСАДЧУК В.А,

кандидат фізико-математичних наук, доцент НІЩЕНКО І.О.

Провідна організація - Тернопільський приладобудівний інститут

Захист відбудеться "25" 11 1996 р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.04.17.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України за адресою: 290601, м.Львів, МПС вул. Наукова, 3-б.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України (м.Львів, вул.Наукова 3-б).

Відгук на автореферат просимо надсилати за адресою: 290061, м. Львів, МПС вул. Наукова, 3-б, ІППММ, вченому секретарю спеціалізованої ради Д.04.17.01.

Автореферат розіслано "23" 10 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради, кандидат фізико-математичних наук П.Р. Шевчук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У мемуарах "Про кручення призм" і "Про згин призм", опублікованих в 1856 році, Сен-Венан (B.Saint-Venant) завершив фізичні основи та математичну теорію чистого кручення і простого згину призматичних стержнів, виклав свій "напівобернений" метод, помістив фундаментальне твердження про статичну еквівалентність навантаження, висловлене ним ще в 1853 році, яке в літературі набуло назву принципу або гіпотези Сен-Венана. Цей принцип дозволив Сен-Венану завершити строге математичне формулювання крайових задач про чисте кручення і простий згин призматичних стержнів . Ним одержано розв'язки низки крайових задач кручення і згину поперечною силою призматичних стержнів певних профілів. Загальна теорія криволінійних координат була розвинена Ламе (G. Lame, 1859 р.). Вперше Клебш (A.Clebsch) застосував криволінійні координати до крайових задач кручення стержнів, профіль яких, зокрема, має вигляд еліптичного диска (1862 р.) і конфокального еліптичного кільця (1879 р.).

В полярних, еліптичних, параболічних, гіперболічних та інших ортогональних криволінійних координатах, які складають окрему групу, характерну тим, що їх координатні лінії, одна з яких збігається з контуром профілю стержня, є алгебричні криві, розв'язок крайових задач отримується значно простішим, а при певних умовах - в явному вигляді.

Подальші дослідження, пов'язані з вивченням проблеми Сен-Венана, дістали інтенсивний розвиток в напрямку розробки нових, в основному чисельних, методів розв'язання крайових задач кручення і згину в переважній більшості ізотропних стержнів з профілями різних форм і зв'язності. Певний внесок в розглядувану проблему зробили, зокрема, такі автори монографій і наукових статей: Н.Х. Арутюнян і Б.Л.Абрамян, Ю.А.Амензаде, Я.И.Бурак, І.А.Бахтіяров, А.Н.Динник, Г.С.Кіт, Л.С.Лейбензон, М.Я.Леонов, Н.І.Мусхелішвілі, І.О.Прусов, В.А.Рвачов і І.В.Гончарюк, А.П.Соколов, А.Г.Угодчіков, Д.І.Шерман, A.Clebsch, J.Boussinesg, L.Prandtl та інші.

Основа теорії кручення і згину призматичних стержнів з прямолінійно-ортотропного матеріалу (ПОМ), поперечний переріз яких збігається з площиною пружної симетрії, закладена Сен-Венаном у згаданих вище мемуарах (1856 р.). Ним вперше були одержані розв'язки крайових задач кручення і поперечного згину консолі з ПОМ еліптичного, трикутного і прямокутного профілів.

Математичні методи теорії кручення і згину призматичних стержнів з ПОМ різних профілів і зв'язності у подальшому були розвинені у працях таких, зокрема, авторів: С.Г.Лехніцького, Л.С.Лейбензона, В.С.Саркісяна, О.С.Космодаміанського, Е.Е.Антотонова, Н.Х.Арутюняна, Д.В.Гриліцького, О.С.Локшина, Р.С.Мінасяна, Г.І. Расторгуева та інших.

Теорія узагальненого кручення і згину призматичних стержнів з прямолінійно-анізотропного матеріалу (ПАМ) вперше сформульована Фойгтом (W Voigt, 1928 р.) і розвинена у працях С.Г. Лехніцького.

За останній час банк методів розв'язання крайових задач кручення і згину призматичних стержнів з ПОМ різних профілів і зв'язності поповнився в основному за рахунок чисельних методів . Нові ефективні аналітичні розв'язки крайових задач кручення і згину стержнів з ПАМ одно- і двозв'язного профілю, обмеженого взагалі не алгебричними кривими, наскільки нам відомо, в літературі відсутні.

Таке становище пояснюється тим, що крайова задача кручення і згину призматичних стержнів з ПАМ, на відміну від крайової задачі для ізотропних стержнів, розглядається не в фізичній площині профілю стержня, а в математичній, яка отримується з першої шляхом афінного (не конформного) перетворення, при якому алгебричні лінії, що обмежують профіль стержня, переходять в алгебричні лінії, зберігаючи їх порядок, а не алгебричні лінії - не переходять самі в себе, а в лінії іншого, взагалі, порядку. Звідси випливає, що метод конформного відображення безпосередньо, як у випадку ізотропного стержня, не застосовний до розв'язування крайових задач кручення і згину призматичних стержнів з ПАМ, профіль яких обмежений не алгебричними лініями.

Отже, розробка ефективного аналітичного алгоритму розв'язання таких задач - тема актуальна.

Метою роботи є:

- розробка аналітичного алгоритму побудови розв'язків крайових задач кручення і згину призматичних стержнів з ПАМ одно- і двозв'язних профілів з гладкими контурами. Площина пружної симетрії збігається з поперечним перерізом стержня;
- застосування розробленого алгоритму до розв'язування крайових задач кручення і згину неортотропних стержнів одно- і двозв'язних профілів конкретних форм їх конфігурації.

Наукова новизна роботи:

- крайова задача кручення і згину призматичного стержня з ПАМ, багатозв'язний профіль якого обмежений простими замкнутими контурами, які не перетинаються між собою, зведена до крайової умови в інтегральній формі, що містить довільну функцію узагальненої комплексної змінної, голоморфну в області, яка є афінним (не конформним) відображенням області профілю стержня;
- для призматичних стержнів з ПАМ одно- і двозв'язних профілів крайова умова в інтегральній формі редукована до нескінченної системи незалежних крайових умов, що містять комплексну функцію кручення методу переміщень;
- зобразивши комплексну функцію кручення формальним рядом за степеневими функціями $\{z_3^n, z_3^{-n}\}$ $(n=\overline{1,\infty})$, система крайових умов, згаданих вище, зведена до систем лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів їх зображення;
- алгоритм складання незалежних систем лінійних алгебричних рівнянь грунтується на системі криволінійних координат, вибір якої пов'язаний з геометрією профілю стержня: одна з сім'ї криволінійних координатних ліній повинна збігатися з контуром, що обмежує одно- і двозв'язний профіль. Кожному обрису профілю стержня відповідає своя система криволінійних координат;
- розроблений алгоритм обчислення коефіцієнтів параметричного рівняння контура, що обмежує профіль призматичного стержня, вибраного за одну з криволінійних координат;
- запропонований аналітичний алгоритм застосований до крайових задач чистого кручення призматичних стержнів з ПАМ одно- і двозв'язних профілів, зокрема, таких конфігурацій:

а) профіль обмежений довільними концентричними еліпсами і довільними ексцентричними еліпсами;

б) профіль обмежений концентричними многокутниками і концентричним прямокутниками з заокругленними вершинами;
в) профіль обмежений многокутником і колом, прямокутником і колом, прямокутником і еліпсом, прямокутником і внутрішнім розрізом та інші.
- проблема розв'язання крайової задачі сумісного кручення і згину поперечною силою призматичної консолі з ПАМ двозв'язного профілю, обмеженого концентричними многокутниками з заокругленними вершинами, як випадку задачі чистого кручення, редукована до чисельного розв'язання системи незалежних лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів розкладу шуканої комплексної функції методу переміщень.

Вірогідність отриманих результатів забезпечується:
- розглядом проблеми в постановці Сен-Венана;
- узгодженністю отриманих аналітичних розв'язків у часткових випадках з тими, що одержані Сен-Венаном, С.Г.Лехніцьким та ін.;
- практичною збіжністю числових результатів у часткових випадках з наведеними в літературі, зокрема, з числовими результатами для ізотропних стержнів;
- фізичною вірогідністю отриманих числових результатів.

Практична значимість

Розроблений універсальний аналітичний алгоритм побудови розв'язків крайових задач кручення і згину призматичних стержнів з ПАМ одно- і двозв'язних профілів різних конфігурацій, які широко застосовуються в машинобудуванні, літакобудуванні, у ВПК та інших галузях народного господарства.

Самостійне значення мають наведені в роботі результати обчислень у вигляді графіків та таблиць, які можуть бути внесені у довідники та посібники, а також використані в проектно-конструкторській практиці, так і при перевірці результатів, отриманих різними чисельними методами.

Одержані теоретичні результати мають подальшу перспективу розвитку. Вони можуть бути використані в теорії узагальненого кручення і згину призматичних стержнів, плоскій задачі теорії пружності, в задачах згину тонких пластин, у теплопровідності та термопружності, електропружності п'єзоелектричних тіл з ПАМ та в інших розділах науки.

Апробація роботи

Основні результати дисертаційної роботи доповідалися на 2-й Всесоюзній технічній конференції "Міцність, жорсткість і технологічність виробів з композиційних матеріалів (м.Ереван, 1984 р.), на семінарі "Прикладні методи розрахунку фізичних полів" (Крим, Симеіз, 1984 р.), 1-му Всесоюзному симпозіумі "Механіка і фізика руйнування композитних матеріалів і конструкцій" (м.Ужгород, 1988 р.), Конференції молодих вчених і спеціалістів "Науково-технічний прогрес в будівництві" (Москва, 1989 р.), Міжгалузевій науково-технічній конференції "Проектування, технологія, розрахунково-експериментальні дослідження конструкцій із композиційних матеріалів" (м.Суздаль, 1992 р.), 1-му Міжнародному симпозіумі "Фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів" (м.Івано-Франківськ, 1993 р.), 1-му Міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків (Львів, 1993 р.), Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в наукових дослідженнях" (Львів, 1995 р.), 3-му Міжнародному симпозіумі "Некласичні проблеми теорії тонкостінних елементів конструкцій та фізико-хемічної механіки композиційних матеріалів" (Івано-Франківськ, 1995р.).

В цілому робота розглядалась на семінарі кафедри опору матеріалів Державного університету "Львівська політехніка", спеціалізованому кваліфікаційному семінарі в ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України (Львів, 1996р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 робіт .

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, 4-х розділів, підсумку, списку літератури та додатків. Загальний обсяг роботи складає 224 с. машинопису, в тому числі: 82 малюнки, 15 таблиць, 120 найменувань списку літератури, 41 с. додатків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, проведено короткий огляд основних публікацій з даного наукового напряму, стисло викладений зміст рототи за розділами.

У першому розділі основні рівняння та співвідношення теорії чистого кручення призматичних стержнів з ПАМ записані в узагальнених комплексних змінних z_3 і $\bar{z}_3$ у формі, зручній при подальшому їх використанні. Проблема визначення функції кручення $\varphi(x,y)$ методу переміщень ($W=\theta\varphi$) зведена до розв'язування внутрішньої крайової задачі Неймана

$$L^{*}\varphi(x,y)=0 \quad (x,y \in S), \quad \vec{A}grad\varphi = f'(s) \quad (s\in L) \qquad (1)$$

$L^{*}(\ldots)$- узагальнений оператор Лапласа; $f(s)$- відома однозначна функція; S - $m+1$ - зв'язний профіль стержня, обмежений простими контурами $L=L_1+L_2+\ldots L_{m+1}$, що не перетинаються між собою.

Якщо обрати за шукану величину функцію напружень $\psi(x,y)$ ($\tau_{xz} = \theta\partial\psi/\partial y$, $\tau_{yz} = -\theta\partial\psi/\partial x$), проблема зведеться до розв'язування внутрішньої крайової задачі Діріхле.

Крайова умова задачі Неймана в диференціальній формі (1) редукована в крайову умову в інтегральній формі

$$\int\limits_{L^{(3)}} F_3(t_3)d\overline{\varphi_3(t_3)} = -i\,\frac{A_{44}}{2\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}} F_3(t_3)d(t_3\bar{t}_3). \qquad (2)$$

Тут $F_3(z_3)$ - довільна функція, голоморфна у $m+1$ - зв'язній області $S^{(3)}$, обмеженій контуром $L^{(3)}=L_1^{(3)}+L_2^{(3)}+\ldots+L_{m+1}^{(3)}$, яка одержується з області S афінним (неконформним) відображенням $z_3=x+\mu_3 y$; t і t_3 - афікси відповідних точок контурів L і $L^{(3)}$.

Комплексна функція кручення $\varphi_3(z_3)$, що входить у контурну умову (2), теж голоморфна в $m+1$ -.зв'язній області $S^{(3)}$, а її дійсна частина $\varphi(x,y)=Re\varphi_3(z_3)$ є розв'язком рівняння $L^{*}\varphi(x,y)=0$ (1) в області $S^{(3)}$.

Показано, що комплексні функції кручення $\varphi_3(z_3)$ і напруження $\psi_3(z_3)$ пов'язані залежністю $\psi_3'(z_3)=-i\sqrt{A}\;\varphi_3'(z_3)$.

Обгрунтована проблема введення у розгляд криволінійних координат, координатні лінії яких взагалі не є алгебричними кривими.

<u>У другому розділі</u> досліджується крайова задача чистого кручення призматичного стержня з ПАМ однозв'язного профілю S, обмеженого простим замкнутим контуром L_2, параметричне рівняння якого у змінних (R_N,σ) має вигляд

$$t^{(2)}=x+iy=R_N^{(2)}(\sigma+\sum_{n=1}^{N}c_n^{(2)}\sigma^{-n}), \quad \sum_{n=1}^{N}nc_n^{(2)\,2}<1 \quad (t^{(2)}\in L_2). \quad (3)$$

$R_N^{(2)}$- масштабний множник, $\sigma=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$.

Параметричне рівняння контура $L_2^{(3)}$ області $S^{(3)}$ набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} & t_3^{(2)} = x + \mu_3 y = \frac{1}{2} R_N^{(2)} (1 - i\mu_3) \chi_N^{(2)}(\sigma) \qquad (t_3^{(2)} \in L_{(2)}^{(3)}) \\ & \chi_N^{(2)}(\sigma) = (\sigma + m_3' \sigma^{-1}) + \sum_{n=1}^{N} c_n^{(2)} (\sigma^{-n} + m_3' \sigma^n). \end{aligned} \right| \quad (4)$$

В області $S^{(3)}$ система степеневих функцій $\{z_3{}^n\}$ $(n=\overline{1,\infty})$ складає повну (замкнуту) систему, за якими розкладається у ряд будь-яка функція, голоморфна в $S^{(3)}$.

Довільну функцію $F_3(z_3)$, що входить у крайову умову задачі Неймана (2), послідовно будемо ототожнювати з степеневими функціями z_3^n: $F_3^{(n)}(z_3) = z_3^n$ $(n=\overline{1,\infty})$.

Такий спосіб дозволяє замінити крайову умову (2) нескінченою системою незалежних крайових умов вигляду

$$\int\limits_{L_2^{(3)}} \bar{t}_3^{(2)^n} d\varphi_3(t_3^{(2)}) = i \frac{A_{44}}{2\sqrt{A}} \int\limits_{L_2^{(3)}} \bar{t}_3^{(2)^n} d(t_3^{(2)} \bar{t}_3^{(2)}) \quad (n=\overline{1,\infty}). \qquad (5)$$

Комплексна функція кручення $\varphi_3(z_3)$, голоморфна в області $S^{(3)}$, шукається у вигляді степеневого ряду

$$\varphi_3(z_3) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(3)} z_3^k \qquad (z_3 \in S^{(3)}). \qquad (6)$$

На підставі виразів (5) і (6) одержуємо нескінченну систему незалежних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів $A_k^{(3)}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(3)} \int\limits_{L_2^{(3)}} \bar{t}_3^{(2)^n} dt_3^{(2)^k} = i \frac{A_{44}}{2\sqrt{A}} \int\limits_{L_2^{(3)}} \bar{t}_3^{(2)^n} d(t_3^{(2)} \bar{t}_3^{(2)}) \quad (n=\overline{1,\infty}). \quad (7)$$

Розглянута крайова задача чистого кручення призматичного стержня з ПАМ, профіль якого S має форму правильного многокутника з заокругленими вершинами.

Параметричні рівняння контурів L_2 і $L_2^{(3)}$ областей S і $S^{(3)}$ дістанемо з рівнянь (3) і (4), якщо замінимо в них індекс "n" на індекс "$nl-1$", індекс "N" на "$Nl-1$".

$$t^{(2)} = R_{Nl-1}^{(2)} (\sigma + \sum_{n=1}^{N} c_{nl-1}^{(2)} \sigma^{-(nl-1)}), \quad \sum_{n=1}^{N} (nl-1) c_{Nl-1}^{(2)^2} < 1 \quad (t^{(2)} \in L_2), \qquad (8)$$

$$t_3^{(2)} = x + \mu_3 y = R_{Nl-1}^{(2)} \left[\frac{1}{2}(1 - i\mu_3)\right] \chi_{Nl-1}^{(2)} \quad (t_3^{(2)} \in L_2^{(3)}),$$

$$\chi_{Nl-1}^{(2)}(\sigma) = (\sigma + m_3'^{-1}) + \sum_{n=1}^{N} c_{nl-1}^{(2)} (\sigma^{-(nl-1)} + m_3'^{(nl-1)}), \qquad (9)$$

де l – число сторін многокутника, a – довжина його сторін.

Коефіцієнти $c_{nl-1}^{(2)}$ знайдемо з умов рівності площ і полярних моментів інерції цих площ правильних многокутників з прямолінійними і криволінійними сторонами, до яких при $N>2$

долучено умови рівності полярних моментів цих площ вищих порядків.

Після внесення в крайову умову задачі Неймана (7) замість афікса $t_3^{(2)}$ точки контура $L_2^{(3)}$ його виразу (9), отримано нескінченну систему незалежних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів A_k розкладу (6)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} A_k = iR_{Nl-1}^{(2)\,2} b_n \quad (n=\overline{1,\infty}), \quad A_k = A_k^{(3)} R_{Nl-1}^{(2)\,k}, \tag{10}$$

$$a_{nk} = [-\tfrac{1}{2}(1-i\mu_3)]^{k-2} K_{nk}^{(2)}, \quad K_{nk}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2^{(3)}} \overline{\chi_{Nl-1}^{n}(\sigma)} d\chi_{Nl-1}^{k}(\sigma). \tag{11}$$

Матриця $[K_{nk}^{(2)}]$ ермітова (самоспряжена): $K_{nk}^{(2)} = \overline{K_{kn}^{(2)}}$.

При $l=2$ $c_{2n-1}^{(2)} = c_{2n-1}(\alpha_2)$, $\alpha_2 = b_2/a_2$ $(a_2 > b_2)$ параметричне рівняння (8) описує прямокутник з заокругленими вершинами.

Одержано формули для обчислення дотичних напружень τ_{xz} і τ_{yz} в точках поперечного перерізу призматичного стержня S з ПАМ і його жорсткості при крученні.

Проведно числовий експеримент за одержаними формулами у випадку задачі кручення призматичного стержня з ортотропного матеріалу, профіль якого має форму правильного: квадрата, шестикутника, восьмикутника і прямокутника з заокругленими вершинами.

Закономірність розподілу дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz}, і τ_{sz} графічно зображені епюрами. Жорсткість на кручення показана числом.

Третій розділ присвячений побудові розв'язку крайової задачі чистого кручення призматичного стержня з ПАМ двозв'язного профілю S, обмеженого простими контурами L_1 і L_2.

Афікси точок $t_3^{(j)}$ контурів L_j і $L_j^{(3)}$ $(j=1,2)$ областей S і $S^{(3)}$ в координатах x і y одержимо з рівнянь (3) і (4), якщо в них замінити індекс "2" на "j" $(j=1,2)$.

У двозв'язній області $S^{(3)}$ система степеневих функцій $\{z_3^n, z_3^{-n}\}$ $(n=\overline{1,\infty})$ $(z_3 \neq 0,\infty)$ складає повну (замкнуту) систему, за якими розкладається в ряд будь-яка функція, голоморфна в $S^{(3)}$.

Довільну функцію $F_3(z_3)$, яка входить в крайову умову задачі Неймана (2), послідовно ототожнюємо з степеневими функціями z_3^n і z_3^{-n}: $F_3^{(n)}(z_3) = z_3^n, z_3^{-n}$ $(n=\overline{1,\infty})$.

Таким способом замінимо крайову умову задачі Неймана (2) нескінченними системами незалежних крайових умов

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,n}\, d\varphi_3(t_3)=i\frac{A_{44}}{2\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,n}\, d(t_3\bar{t}_3),\quad L^{(3)}=L_1^{(3)}+L_2^{(3)},\\&\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,-n}\, d\varphi_3(t_3)=i\frac{A_{44}}{2\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,-n}\, d(t_3\bar{t}_3)\quad (n=\overline{1,\infty}).\end{aligned}\right|\quad(12)$$

Комплексна функція кручення $\varphi_3(z_3)$, голоморфна в $S^{(3)}$, шукаеться у вигляді степеневого ряду

$$\varphi_3(z_3)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(3)} z_3^k+\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(3)} z_3^{-k}\qquad (z_3\in S^{(3)}).\qquad(13)$$

Після внесення функції (13) у крайові умови (12), отримаемо нескінченні системи незалежних лінійних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів $A_k^{(3)}$, $B_k^{(3)}$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(3)}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,n}\, dt_3^k+\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(3)}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,n}\, dt_3^{-k}=\\&\qquad=i\frac{A_{44}}{2\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,n}\, d(t_3\bar{t}_3),\quad L^{(3)}=L_1^{(3)}+L_2^{(3)},\\&\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(3)}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,-n}\, dt_3^k+\sum_{k=1}^{\infty} B_k^{(3)}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,-n}\, dt_3^{-k}=\\&\qquad=i\frac{A_{44}}{2\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}} \bar{t}_3^{\,-n}\, d(t_3\bar{t}_3)\quad (n=\overline{1,\infty}).\end{aligned}\right|\quad(14)$$

Досліджена крайова задача кручення призматичного стержня з ПАМ, двозв'язний профіль якого S обмежений правильними концентричними многокутниками L_1 і L_2 з заокругленими вершинами.

Афікси точок контурів L_1, L_2 і $L_1^{(3)}$, $L_2^{(3)}$ двозв'язних областей S і $S^{(3)}$ в координатах x,y одержуються з рівняння (8) і (9), якщо в них замінити індекс "2" на індекс "j",

$$t^{(j)}=R_{Nl-1}^{(j)}(\sigma+\sum_{n=1}^{N} c_{nl-1}^{(j)}\sigma^{-(nl-1)})\qquad (t^{(j)}\in L_j,\ j=1,2),\quad(15)$$

$$t_3^{(j)}=x+\mu_3 y=R_{Nl-1}^{(j)}\left[\frac{1}{2}(1-i\mu_3)\right]\chi_{Nl-1}^{(j)}(\sigma)\quad (t_3^{(j)}\in L_j^{(3)},\ j=1,2),$$

$$\chi_{Nl-1}^{(j)}(\sigma)=(\sigma+m_3'\sigma^{-1})+\sum_{k=1}^{N} c_{Nl-1}^{(j)}(\sigma^{-(nl-1)}+m_3'\sigma^{nl-1}),\qquad(16)$$

$$|c^{(1)}_{nl-1}| \leq |c_{nl-1}| \leq |c^{(2)}_{nl-1}| \quad (n=\overline{1,N}). \tag{17}$$

Крайова умова задачі Неймана (14) з врахуванням (16) зводиться до нескінченних систем незалежних алгебричних рівнянь стосовно коефіцієнтів A_k і B_k

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}A_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}B_k = iR^{(2)^2}_{Nl-1}\, b_n \quad (n=\overline{1,\infty}),\\ &\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}A_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk}B_k = iR^{(2)^2}_{Nl-1}\, d_n \quad (n=\overline{1,\infty}), \end{aligned}\right| \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{nk} = \left[\tfrac{1}{2}(1-\mu_3)\right]^{k-2} \overline{(K^{(2)}_{nk} - \gamma^{n+k}K^{(1)}_{nk})},\\ &K^{(j)}_{nk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(3)}_j} \chi^{(j)^n}_{Nl-1}(\sigma)\,d\chi^{(j)^k}_{Nl-1}(\sigma) \quad (j=1,2),\\ &-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ &d_{nk} = \left[\tfrac{1}{2}(1-\mu_3)\right]^{-k-2} \overline{(N^{(2)}_{nk} - \gamma^{-n+k}N^{(1)}_{nk})},\\ &N^{(j)}_{nk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(3)}_j} \chi^{(j)^{-n}}_{Nl-1}(\sigma)\,d\chi^{(j)^{-k}}_{Nl-1}(\sigma) \quad (j=1,2). \end{aligned}\right| \tag{19}$$

Матриці $[K^{(j)}_{nk}]$ і $[N^{(j)}_{nk}]$ ермітові: $K^{(j)}_{nk}=\overline{K^{(j)}_{kn}}$, $N^{(j)}_{nk}=\overline{N^{(j)}_{kn}}$.

При $l=2$ $c^{(j)}_{2n-1}=c_{2n-1}(\alpha_j)$, $\alpha_j=b_j/a_j$ $(a_j>b_j,\ j=1,2)$ параметричні рівняння (15)($j=1,2$) описують контури L_1 і L_2, що обмежують концентричний прямокутник з заокругленими вершинами S.

Розглянуті також крайові задачі кручення призматичних стержнів з ПАМ, двозв'язний профіль яких S обмежений довільними концентричними еліпсами, привильним многокутником і колом, колом і многокутником, прямокутником і колом, колом і прямокутником, прямокутником і еліпсом з заокругленими вершинами.

Афікси точок контурів L_1, L_2 і $L^{(3)}_1$, $L^{(3)}_2$ перелічених вище двозв'язних областей S і $S^{(3)}$ одержуються безпосередньо з рівнянь (15)-(17) при такому виборі закону зміни коефіцієнтів цих рівнянь $|c_{nl-1}|$ в сегменті (17), щоб проміжний контур L вимів всю область S від граничного контура L_1 до граничного контура L_2. Для реалізації цієї умови закон зміни коефіцієнтів $|c_{nl-1}|$ в сегментах (17) можна задати або виразом

$$|c_{nl-1}| = \frac{1-\alpha_{nl-1}}{1+\alpha_{nl-1}}, \quad \alpha_{nl-1} = \frac{1-|c_{nl-1}|}{1+|c_{nl-1}|} \quad (n=\overline{1,N}), \tag{20}$$

або виразом

$$|c_{n1-1}|=\frac{1-\alpha_{n1-1}}{1+\alpha_{n1-1}}|c^{(j)}_{n1-1}| \quad \text{при } j=1 \text{ або } j=2 \quad (n=\overline{1,N}). \qquad (21)$$

Для циліндричного стержня, профіль якого обмежений довільними концентричними еліпсами L_j $(a_j,b_j)(\alpha_j=b_j/a_j, j=1,2)$, функція (16) з врахуванням (20) набуває вигляду $(l=2,\ N=1)$

$$\chi^{(j)}_1(\sigma)=(\sigma+m'\sigma^{-1})+(1-\alpha_j)/(1+\alpha_j)(\sigma^{-1}+m'_3\sigma),\ R^{(j)}_1=\frac{1}{2}a_j(1+\alpha_j) \qquad (22)$$

а у випадку ексцентричних еліпсів - вигляду

$$\chi^{(j)}_1(\sigma)=\frac{(1-i\alpha_j\mu_3)\sigma+(1+i\alpha_j\mu_3)\sigma^{-1}-2c_j}{(1-i\mu_3)[1+c^2_j-c_j(\sigma+\sigma^{-1})]} \qquad (j=1,2) \qquad (23)$$

Виведені формули для обчислення дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{sz} і τ_{nz} в точках поперечного перерізу призматичного стержня S з ПАМ і його жорсткість при крученні.

Числовий експеримент проведений для циліндричних і призматичних стержнів з ПОМ, двозв'язний профіль яких S обмежений концентричними еліпсами, подібними концентричними квадратами, шестикутниками, восьмикутниками і прямокутниками, концентричними прямокутником і квадратом, квадратом і колом, шестикутником і колом, восьмикутником і колом, колом і шестикутником, колом і восьмикутником з заокругленими вершинами.

Значення дотичних напружень τ_{xz} і τ_{yz} в точках, розташованих по осях координат x і y, напруження τ_{sz} - в точках контурів L_1 і L_2, що обмежують двозв'язний профіль S, графічно зображені епюрами. Жорсткість C на кручення визначена чисельно.

<u>У четвертому розділі</u> основні рівняння та співвідношення сумісного кручення і простого згину поперечною силою P призматичної консолі з ПАМ записані в комплексних змінних z_3 і $\overline{z}_3$. Проблема визначення функції $W_2(x,y)$ методу переміщень $(W_1=W_2+W_0)$ зведена до внутрішньої крайової задачі Неймана

$$L^*W_2(x,y)=0\ (x,y\in S),\quad \vec{A}gradW_2=\vartheta_0 f'(s)+\frac{P}{J}F_1(s)\ (s\in L), \qquad (24)$$

де $f(s)$ і $F_1(s)$- відомі функції, S- $m+1$ зв'язний профіль стержня, обмежений простими замкнутими контурами $L=L_1+L_2+\ldots+L_{m+1}$.

Крайова умова задачі Неймана (24) в диференціальній формі редукована в крайову умову в інтегральній формі

$$\int\limits_{L^{(3)}} F_3(t_3)d\overline{\varphi_{03}(t_3)}=-i\vartheta_0\frac{A_{44}}{2\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}} F_3(t_3)d(t_3\overline{t}_3)-$$

$$-i\frac{P}{I\sqrt{A}}\int\limits_{L^{(3)}}F_3(t_3)F_1(s)ds-\sum_{k=1}^{m}F_3(t_3)\frac{\overline{\tau_k^{(3)}}}{\bar z_3-\bar z_{3k}}d\bar t_3. \qquad (25)$$

Довільна функція $F_3(z_3)$ і комплексна функція $\varphi_{03}(z_3)$ методу переміщень голоморфні в $m+1$ -зв'язній області $S^{(3)}$, обмеженій простими контурами $L^{(3)}=L_1^{(3)}+L_2^{(3)}+\ldots+L_{m+1}^{(3)}$; $W_2(x,y)=2Re\varphi_3(z_3)$- розв'язок рівняння $L^*W_2=0$ (24) в області $S^{(3)}$;

$$\varphi_3(z_3)=\sum_{k=1}^{m}\tau_k^{(3)}ln(z_3-z_{3k})+\varphi_{30}(z_3) \quad (z_3\in S^{(3)}), \qquad (26)$$

$$\tau_k^{(3)}=-\frac{P}{4\pi I\sqrt{A}}\iint\limits_{S_k}ydxdy=-\frac{Py_{kc}S_k}{4\pi I\sqrt{A}}, \qquad (27)$$

S_k- площа, обмежена контуром L_k, y_{kc} - координата центру ваги площі $S_k\,(k=\overline{1,m})$.

Для розв'язності крайової задачі Неймана (24) статичний момент площі профілю S відносно координатної осі Ox повинен дорівнювати нулеві.

Крайова умова (25) задачі Неймана (24) для двозв'язного профілю S, обмеженого правильними концентричними многокутниками L_1 і L_2 з заокругленими вершинами, що описуються параметричними рівняннями (15)-(16), аналогічно крайовій умові (2) задачі Неймана (1) для чистого кручення, редукована до системи незалежних крайових алгебричних рівнянь, аналогічних рівнянням (18)

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}A_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}B_k=iPa_n+i\vartheta_0R_{Nl-1}^{(2)^2}b_n-\tau_1^{(3)}U_n,\\&\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}A_k+\sum_{k=1}^{\infty}d_{nk}B_k=iPc_n+i\vartheta_0^{(2)}R_{Nl-1}^{(2)^2}d_n-\tau_1^{(3)}V_n \quad (n=\overline{1,\infty}),\end{aligned} \qquad (28)$$

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{A}}\left[\frac{1}{2}(1-i\mu_3)\right]^{-2}(a_n^{(2)}-\gamma^n a_n^{(1)}),\quad a_n^{(j)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j^{(3)}}\overline{\chi_{Nl-1}^{(j)^n}}(\sigma)F_1^{(j)}(s)ds,$$

- -

a_{nk}, d_{nk} обчислюються за формулами (19).

<u>У додатку</u> подані таблиці з числовими значеннями дотичних напружень τ_{xz}, τ_{yz} і τ_{sz}, одержаних при чисельному експерименті на комп'ютері *IBM-286PC*, і їх графічне зображення епюрами на профілях стержнів з прямолінійно-ортотропного матеріалу.

<u>Основні результати роботи.</u>

1. Задача чистого кручення і поперечного згину призматичного

стержня з ПАМ багатозв'язного профілю зведена до узагальненої внутрішньої задачі Неймана (метод переміщень), або узагальненої внутрішньої задачі Діріхле (метод напружень).

2. Крайова умова Неймана в диференціальній формі задачі кручення перетворена в умову в інтегральній формі, що містить довільну функцію, голоморфну в багатозв'язній області, яка одержується з області профілю стержня афінним (не конформним) перетворення.

3. Для двозв'язної (однозв'язної) області крайова умова задачі Неймана замінена двома (однією) нескінченними системами незалежних крайових умов, що містять комплексну функцію кручення.

4. Коефіцієнти, що входять у розклад функції кручення степеневим рядом, визначаються з двох (однієї) нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь.

5. В заміну методу конформного відображення, який у розглядуваному випадку взагалі не застосований, розроблений аналітичний алгоритм обчислення коефіцієнтів параметричного рівняння контура, що обмежує профіль стержня і вибраного за одну з криволінійних координат.

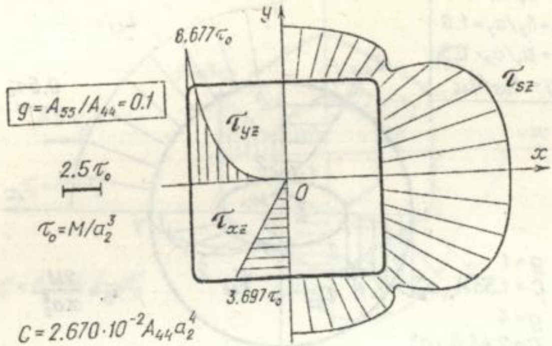
6. Задача сумісного кручення і згину поперечною силою призматичної консолі з ПАМ багатозв'язного профілю, як і в задачі кручення, зведена до узагальненої внутрішньої задачі Неймана. Крайова умова Неймана в диференціальній формі замінена крайовою умовою в інтегральній формі, яка для двозв'язного профілю редукована до двох (однієї) нескінченних систем незалежних крайових умов, що містять шукану функцію методу переміщень ~~переміщень~~. Коефіцієнти розкладу функції в степеневий ряд визначаються з систем незалежних алгебричних рівнянь.

<u>Основні результати дисертації відображені в публікаціях</u>:

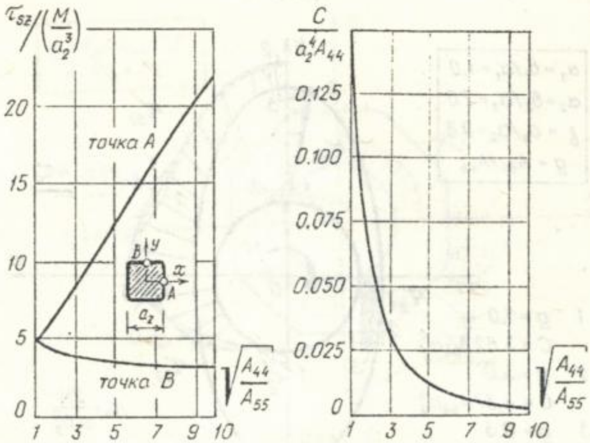
1. Мартынович Б.Т., Мартынович Т.Л. Применение интегральных уравнений к решению задач кручения прямолинейно-анизотропных стержней. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984, №2, с.112-118.

2. Мартынович Т.Л., Задворняк М.И. Мартынович Б.Т. Применение методов теории потенциала к краевым задачам о продольном сдвиге и чистом кручении прямолинейно-анизотропного тела. В кн.: Матер. 2-й Всесоюзн. техн. конференции "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов".

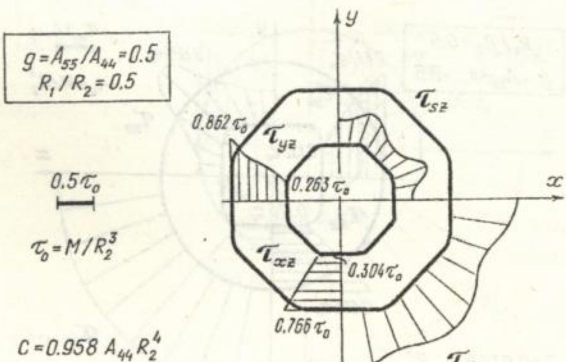
Ереван: Изд-во Ереван. ун-та. 1984, т.2, с.174-178.
3. Мартынович Б.Т. Решение задачи о чистом кручении изотропных призматических стержней сплошного сечения с использованием формулы Грина. Ред. журн. "Физ.-хим. мех. материалов" АН УССР. - Львов, 1990, 23с.- Деп. в ВИНИТИ, 12.09.90, N5023-В.90.
4. Мартынович Б.Т. Решение задачи о чистом кручение прямолинейно-анизотропных призматических стержней сплошного сечения с использованием формулы Грина. Ред. журн. "Физ.-хим. мех. материалов" АН УССР.-Львов, 1990, 18с.-Деп. в ВИНИТИ, 12.09.90, N5020-В.90.
5. Мартынович Б.Т., Мартынович Т.Л. Совместное решение задачи о чистом кручении и простом изгибе изотропной призматической консоли поперечной силой с использованием формулы Грина. Ред. журн. "Физ.-хим. мех. материалов" АН УССР.- Львов, 1990, 22с.- Деп. в ВИНИТИ, 12.09.90, N5024-В.90.
6. Мартынович Б.Т., Мартынович Т.Л. Совместное решение задачи о чистом кручении и простом изгибе прямолинейно-анизотропной призматической консоли поперечной силой с использованием формулы Грина. Ред. журн. "Физ.-хим. мех. материалов" АН УССР. - Львов, 1990, 26с.-Деп. в ВИНИТИ, 12.09.90, N5007-В.90.
7. Мартынович Б.Т., Мартынович Т.Л. Применение интегральных уравнений к совместному решению задачи о чистом кручении и простом изгибе прямолинейно-анизотропной консоли поперечной силой. Ред. журн. "Физ.-хим. мех. материалов" АН УССР.- Львов, 1990, 17с.- Деп. в ВИНИТИ, 12.09.90, N5009-В.90.
8. Мартынович Б.Т., Мартынович Т.Л. К решению задачи о чистом кручении и простом изгибе прямолинейно-анизотропной консоли поперечной силой. Прикл. механика, 1992, т.28, N3, с.54-61.
9. Задворняк М.І., Мартинович Б.Т. Розрахунок напруженого стану при поперечному згині анізотропної консолі. Вісн. Львів. політехн. ін-ту "Резерви прогресу в архітектурі та будівництві". 1992, N262, с.29-32.
10. Задворняк М.І., Мартинович Б.Т. Поперечний згин анізотропної консолі з поздовжньою порожниною. Вісн. Львів. політехн. ін-ту "Резерви прогресу в архітектурі та будівництві". 1993, N271, с.33-37.



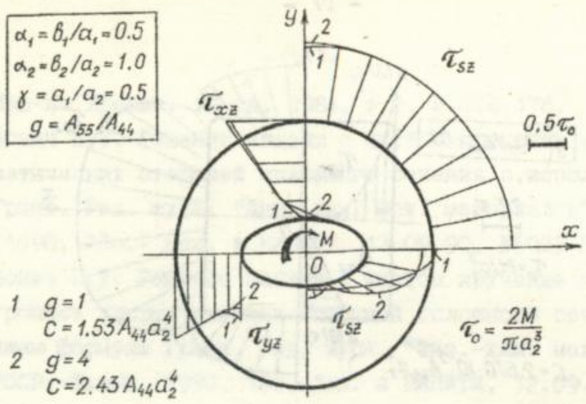
Мал. I



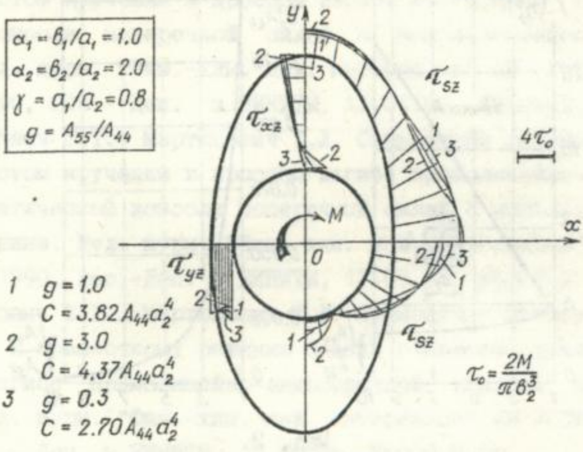
Мал. 2



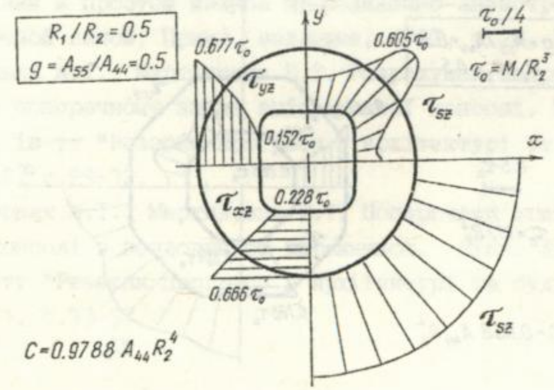
Мал. 3



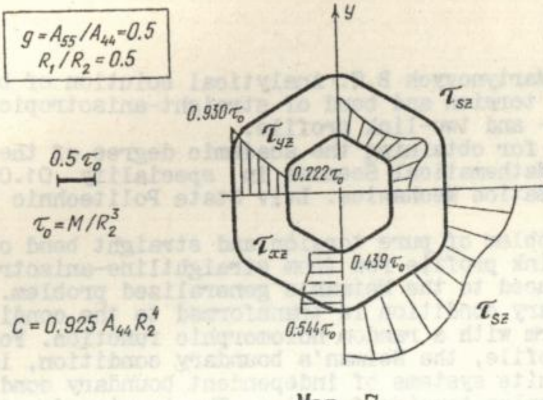
Мал. 4



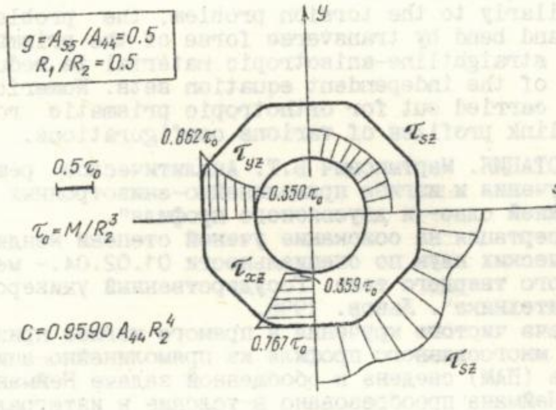
Мал. 5



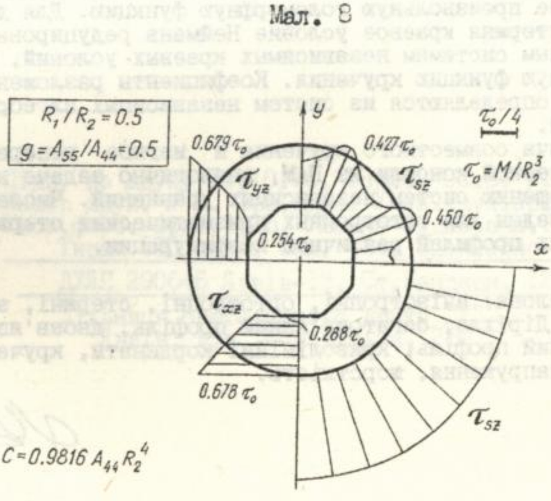
Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

ABSTRACT. Martynovych B.T. Analytical solution of boundary problems of torsion and bend of straight-anisotropic prismatic rods of one- and two-link profile.

Thesis for obtaining the academic degree of the Candidate of Physico-Mathematical Scences in speciality 01.02.04 - Solid Deformation Mechanics. Lviv State Politechnic University, Lviv,1996.

The problem of pure torsion and straight bend of a prismatic multi-link profile rod from straightline-anisotropic material is reduced to the Neiman's generalized problem. The Neiman's boundary condition is transformed to the condition in the integral form with a random holomorphic function. For the rod's two-link profile, the Neiman's boundary condition, is reduced to two infinite systems of independent boundary conditions, with the complex torsion function. The torsion function decomposition coefficients are calculated from the independent algebraic equation sets.

Similarly to the torsion problem, the problem of joint torsion and bend by transverse forse of the prismatic console from the straightline-anisotropic material is reduced to the solution of the independent equation sets. Numeric experiment has been carried out for orthotropic prismatic rods of one- and two-link profiles of varions configurations.

АННОТАЦИЯ. Мартынович Б.Т. Аналитическое решение краевых задач кручения и изгиба прямолинейно-анизотропных призматических стержней одно- и двусвязного профиля".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04.- механика деформированного твердого тела. Государственный университет "Львовская политехника". Львов. 1996.

Задача чистого кручения и прямого изгиба призматического стержня многосвязного профиля из прямолинейно-анизотропного материала (ПАМ) сведена к обобщенной задаче Неймана. Краевое условие Неймана преобразовано в условие в интегральной форме, содержащее произвольную голоморфную функцию. Для двусвязного профиля стержня краевое условие Неймана редуцировано к двум бесконечным системам независимых краевых условий, содержащих комплексную функцию кручения. Коэфициенты разложения функции кручения определяются из систем независимых алгебраических уравнений.

Задача совместного кручения и изгиба поперечной силой призматической консоли из ПАМ, аналогично задаче кручения, сведена к решению систем независимых уравнений. Численный эксперимент проведен для ортотропных призматических стержней одно- и двусвязных профилей различной конфигурации.

Ключові слова: анізотропні, ортотропні, стержні, задача Неймана, Діріхле, багатозв'язний профіль, двозв'язний профіль, многокутний профіль, криволінійні кординати, кручення, згин, дотичні напруження, жорсткість.

Підп. до друку І4.10.96. Формат 60х84 I/I6
Папір друк. № 2. Офс.друк. Умов.друк.арк.І,25
Умов.фарб.-відб.І,25. Умовно-видав.арк.І,І7
Тираж І00 прим. Зам. 454. Безплатно

ДУЛП 290646 Львів-ІЗ, Ст.Бандери, І2

Дільниця оперативного друку ДУЛП
Львів, вул. Городоцька, 286

ABSTRACT. Martyniuk B.T. Analytical solution of boundary problems of torsion and bend of straight-anisotropic prismatic rods of one- and two-link profile.

Thesis for obtaining the academic degree of the Candidate of Physico-Mathematical Sciences in speciality 01.02.04 – Solid Deformation Mechanics. Lviv State Politechnic University. Lviv, 1996.

The problem of pure torsion and straight bend of a prismatic multi-link profile rod from straightline-anisotropic material is reduced to the Neiman's generalized problem. The Neiman's boundary condition is transformed to the condition in the integral form with a random monogenic function. For the rod's two-link profile, the Neiman's boundary condition is reduced to two infinite systems of independent boundary conditions with the complex torsion function. The torsion function decomposition coefficients are calculated from the independent algebraic equation sets.

Similarly to the torsion problem, the problem of joint torsion and bend by transverse force of the prismatic console from the straightline-anisotropic material is reduced to the solution of the independent equation sets. Numeric experiment has been carried out for orthotropic prismatic rods of one- and two-link profiles of various configurations.

АННОТАЦИЯ. Мартынюк Б.Т. Аналитическое решение краевых задач кручения и изгиба прямолинейно-анизотропных призматических стержней одно- и двухзвенного профиля".

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформированного твердого тела. Государственный университет "Львовская политехника". Львов, 1996.

Задача чистого кручения и прямого изгиба призматического стержня многозвенного профиля из прямолинейно-анизотропного материала (ПАМ) сведена к обобщенной задаче Неймана. Граничное условие Неймана преобразовано в условие в интегральной форме, содержащее произвольную голоморфную функцию. Для двухзвенного профиля стержня краевое условие Неймана [illegible] независимых краевых условий [illegible] функцией кручения. Коэффициенты разложения функции кручения определяются из систем независимых алгебраических уравнений.

Задача совместного кручения и изгиба поперечной силой призматической консоли из ПАМ [illegible] для ортотропных призматических стержней одно- и двухзвенного профиля [illegible].

[illegible] Неймана, [illegible] профиль, многозвенный профиль, [illegible], кручение, изгиб, [illegible].