КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КОРДАС Ольга Ігорівна

УДК 517.977

МІНІМАКСНІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ПРОГНОЗНІ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ`ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

01.05.04 - системний аналіз і теорія оптимальних рішень

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ОКор

Київ - 1996

Дисертацією є рукопис.

Работа виконана в Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор **Наконечний Олександр Григорович**

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор **Кулініч Григорій Логвінович**
доктор технічних наук,
професор **Попов Юрій Дмитрович**

Провідна організація - Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України

Захист відбудеться "21" листопада 1996 р. о 16^{00}.
на засіданні спеціалізованої ради Д.01.01.20 при Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:
252127, м.Київ, проспект Академіка Глушкова, 6,
факультет кібернетики, ауд. 40.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Київського національного університету за адресою:
252033, м.Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "19" жовтня 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради,
кандидат фізико-математичних наук П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Останнім часом методи теорії оцінювання випадкових процесів знаходять все нові області застосування в більшості природничих наук. В загальному вигляді проблема полягає в найкращому визначенні значення деякого функціоналу від процесу за значеннями інших функціоналів від того ж процесу. Велике практичне значення тут має задача прогнозування, яка полягає в тому, щоб за спостереженнями над процесом на протязі деякого проміжку часу, визначити значення процесу в деякий момент часу, який не належить цьому проміжку.

До розв`язування таких задач можливо застосовувати різні підходи. Якщо дані, що входять в рівняння, які описують стан системи, відомі, то досить розв`язати (як правило чисельно) ці рівняння на заданому відрізку часу, щоб одержати прогнозні оцінки. Значно складнішою є задача прогнозу в тому випадку, коли деякі із параметрів рівнянь невідомі. Тоді для того, щоб одержати прогнозні оцінки, потрібні спостереження за значеннями величин, які характеризують даний фізичний процес на деякому проміжку часу. Проблеми, які тут виникають, полягають в тому, щоб одержати "прості" прогнозні оцінки. В рамках статистичного підходу, коли розподіли величин відомі, найкращою прогнозною середньоквадратичною оцінкою є умовне математичне сподівання прогнозованої величини відносно спостережень. Але, як правило, таке умовне математичне сподівання можливо обчислити лише в деяких виключних випадках. Крім того, якщо статистичні характеристики відомі не повністю, то такий підхід неможливо застосувати взагалі. Для такого випадку в роботах

Н.Н.Красовського, А.Б. Куржанського, Б.М.Бублика, О.Г.Наконечного, М.Ф. Кириченка, запропоновано використовувати мінімаксний підхід.

Проблемі розробки методів мінімаксного прогнозування та оцінювання функціоналів від розв`язків початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними другого порядку присвячені роботи О.Г.Наконечного, Ю.К.Подлипенка, О.Г.Павлюченко, Л.П. Аджубей. Але питання знаходження таких оцінок для стохастичних рівнянь вивчені недостатньо. З іншого боку, проблема прогнозування перебігу фізичного процесу, динаміка якого допускає опис у вигляді стохастичних диференційних рівнянь з частинними похідними є досить важливою при обробці результатів досліджень в умовах невизначеності для систем гідродинаміки, екології, теплофізики та ін.

Розробці методів розв`язання цього класу задач присвячена дисертаційна робота.

Мета роботи. Метою дисертаційної роботи є теоретична розробка методів знаходження мінімаксних середньоквадратичних прогнозних оцінок лінійних функціоналів від розв`язків стохастичних диференціальних рівнянь параболічного типу.

Наукова новизна. В роботі знайдено вигляд мінімаксних середньоквадратичних прогнозних оцінок функціоналів від розв`язків стохастичних диференціальних рівнянь параболічного типу для таких випадків:

- невідомі початкові умови задачі;
- невідомі праві частини рівнянь;

та квазіоптимальних оцінок для випадків, коли:

- невідомі оператори спостережень;
- диференціальний оператор має випадкові коефіцієнти.

Сформульовано та доведено відповідні теореми, знайдені величини похибки та максимального зміщення отриманих оцінок.

Методи дослідження. В роботі застосовані методи теорії оптимального керування, теорії випадкових процесів та теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Теоретична і практична цінність. Цінність роботи полягає в тому, що запропоновані методи знаходження прогнозних оцінок мають конструктивний характер та, в зв`язку з виникненням потужного спеціалізованого програмного та апаратного забезпечення для розв`язання початково-крайових задач, можуть бути застосовані до стохастичних моделей в екології, теплофізиці, гідродинаміці тощо.

Апробація роботи. Основні результати доповідались та обговорювались на Першій Українській конференції з автоматичного керування "Автоматика-94" (м.Київ, 1994р.), Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (м.Ашгабат, 1995р.), Третій Українській конференції з автоматичного керування "Автоматика-96" (м.Севастополь, 1996 р.), на семінарі з проблеми "Кібернетика", "Моделювання та оптимізація складних систем" (науковий керівник член-кор. НАН України, проф. Б.М. Бублик, доктор ф.-м. наук, проф. О.Г.Наконечний), а також наукових семінарах кафедр моделювання складних систем та теорії автоматизованих систем факультету кібернетики Київського національного університету.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 6 робіт [1- 6].

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, двох розділів, висновку, списку використаної літератури з 115 найменувань. Обсяг роботи складає 121 сторінку машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** формулюється мета дисертаційної роботи, висвітлюється її новизна та актуальність. Приводиться короткий огляд робіт з мінімаксного прогнозування. Обгрунтовується наукова та практична цінність питань, розглянутих у роботі. Стисло викладено зміст дисертації.

У **першому розділі** розглядаються методи знаходження мінімаксних прогнозних оцінок лінійних функціоналів від розв`язків лінійних рівнянь параболічного типу.

Перший параграф присвячений теоретичній розробці методів знаходження прогнозних оцінок лінійних функціоналів від розв`язків стохастичних рівнянь з невідомими початковими умовами.

Розглядається система, стан якої визначається як розв`язок першої початково-крайової задачі для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу вигляду:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = L\varphi + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\dot{w}_i, \qquad (1)$$

$$\varphi(x,0) = f_0(x), \qquad (2)$$

$$\varphi_{\Gamma} = 0, \qquad (3)$$

де $t \in [0,T]$, $x \in G$, G – обмежена область в n-мірному Евклідовому просторі R^n, Γ – її кусково-гладка границя, Q_T – циліндр в R^{n+1}, $Q_T = G \times [0,T]$, L – диференціальний оператор, який визначається рівністю:

$$L\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + a_i\varphi\right) + a_0 \, .$$

Вважається, що виконуються наступні припущення:

коефіцієнти

$$a_{ij} = a_{ij}(x,t),\ i,j = \overline{1,n},\ a_i = a_i(x,t),\ i = \overline{1,n},\ a_0 = a_0(x,t) \in L^{\infty}(Q_T);$$

коефіцієнти a_{ij} задовольняють умові рівномірної еліптичності:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)z_i z_j \ge k\sum_{i=1}^{n} z_i^2,\ \forall (x,t)\in G\times[0,T],\ k>0,\ a_{ij}=a_{ji};$$

$w_i(t)$ -незалежні між собою вінеровські процеси;

$b_i(x,t)\in L^\infty(Q_T),\ i=\overline{1,m}.$

Усі випадкові функції в роботі вважаються заданими на деякому фіксованому ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,P)$ та вимірними.

Вважається, що на інтервалі $[0,T]$ спостерігаються функції $y_k(t)$ вигляду: $y_k(t)=\int_G R_k(x,t)\varphi(x,t)dx+\xi_k(t),\ k=\overline{1,N},$ (5)

де $R_k(x,t)\in L^2(Q_T),\ k=\overline{1,N}$ - задані функції;

$\xi_k(t),\ \ k=\overline{1,N}$ - неперервні в середньоквадратичному випадкові процеси, про які відомо:

$$M\xi_k(t)=0.\ k=\overline{1,N};\ \sum_{k=1}^{N}\int_0^T q_k^2(t)M\xi_k^2(t)dt\le 1, \qquad (6)$$

де $q_k(t),\ k=\overline{1,N}$ - задані функції, неперервні на $[0,T]$ і які не перетворюються там в 0.

Задача прогнозу полягає в тому, щоб за спостереженнями за станом системи на інтервалі $[0,T]$ оцінити в момент часу $T_1>T$ лінійний функціонал $l(\varphi)=\int_G l_0(x)\varphi(x,T_1)dx,\qquad l_0(x)\in L^2(G)$ (7)

Вводиться клас лінійних оцінок вигляду:

$$\hat{l}(\varphi)=\int_0^T\sum_{k=1}^{N} y_k(t)u_k(t)dt+c. \qquad (8)$$

де $u_k(t)\in L^2(0,T).\ \ c\in R^1$

Середньоквадратична оцінка функціоналу (7) шукається із умови:

$$\inf_{u_1,\dots,u_N,c}\ \sup_{\alpha_i,\,i=\overline{1,m},\,f_0,\xi_i,\,i=\overline{1,N}} M|l(\varphi)-\hat{l}(\varphi)|^2=\sup_{\alpha_i,\,i=\overline{1,m},\,f_0,\xi_i,\,i=\overline{1,N}} M|l(\varphi)-\hat{\hat{l}}(\varphi)|^2 \qquad (9)$$

Такі оцінки назвемо мінімаксними середньоквадратичними прогнозними оцінками, а величини

$$\sigma = \left\{ \sup_{\alpha_i, i=\overline{1,m1}, f_0, \xi_i, i=\overline{1,N}} M\left| l(\varphi) - \hat{\hat{l}}(\varphi) \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

та $\sigma_1 = \sup_{\alpha_i, i=\overline{1,m1}, f_0, \xi_i, i=\overline{1,N}} \left| Ml(\varphi) - M\hat{\hat{l}}(\varphi) \right| \quad (11)$

відповідно похибкою та максимальним зміщенням оцінки.

На початку параграфа знайдений вигляд мінімаксної середньоквадратичної прогнозної оцінки функціоналу (7) для випадку, коли функція $f_0(x)$ задовольняє нерівність $\int_G q_0^2(x) f_0^2(x)dx \le 1$, (12)

де $q_0(x)$ - задана функція, неперервна на $\overline{G}$, яка не перетворюється там в 0. Отримані результати сформульовані в теоремі 1.

У випадку, коли $f_0(x) \in L^2(G)$, для знаходження вигляду мінімаксної середньоквадратичної оцінки функціоналу (7) вводиться функція z_1 як узагальнений розв\`язок наступної початково-крайової задачі:

$-\frac{\partial z_1}{\partial t} = L^* z_1$, (13) $z_1(x, T_1) = l_0(x)$. (14) $z_{1|\Gamma} = 0$, (15)

а також функції z_2, p та $\hat{p}, \hat{\varphi}$ як узагальнені розв\`язки наступних задач:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = L^* z_2 - \sum_{k=1}^{N} q_k^2(t) R_k(x,t) \int_G R_k(x_1,t) p(x_1,t)dx_1, \quad (16)$$

$z_2(x,0) = 0$, (17) $z_2(x,T) = z_1(x,T)$, (18) $z_{2|\Gamma} = 0$, (19)

$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t) \int_G b_i(x,t) z_2(x,t)dx$, (20) $p(x,t)_{|\Gamma} = 0$ (21)

та $-\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = L^* \hat{p} + \sum_{k=1}^{N} q_k^2 R_k(x,t) \left[y_k(t) - \int_G \hat{\varphi}(x_1,t) R_k(x_1,t)dx_1 \right]$, (22)

$\hat{p}(x,0) = 0$, (23) $\hat{p}(x,T) = 0$, (24) $\hat{p}_{|\Gamma} = 0$, (25)

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t} = L\hat{\varphi} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)\hat{p}(x,t)dx, \quad (26) \quad \hat{\varphi}_\Gamma = 0. \quad (27)$$

Вводяться функція $\hat{\hat{\varphi}}(x,t)$ як узагальнений розв`язок початково-крайової задачі:

$$\frac{\partial\hat{\hat{\varphi}}}{\partial t} = L\hat{\hat{\varphi}}, \quad (28) \quad \hat{\hat{\varphi}}(x,T) = \hat{\varphi}(x,T), \quad (29) \quad \hat{\hat{\varphi}}\Big|_\Gamma = 0, \quad (30)$$

Тоді справедливе твердження наступної теореми.

Теорема 2.

Мінімаксна середньоквадратична прогнозна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд:

$$\hat{l}(\varphi) = \int_0^T \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k(t) y_k(t) dt + \hat{c} = l(\hat{\hat{\varphi}}), \qquad (31)$$

де $\quad \hat{u}_k(t) = q_k^2(t)\int_G R_k(x,t)p(x,t)dx, \ k = \overline{1,N}, \qquad \hat{c} = 0,$

$$l(\hat{\hat{\varphi}}) = \int_G z_1(x,T)\hat{\hat{\varphi}}(x,T)dx,$$

функції $p(x,t)$, $z_2(x,t)$ є розв`язком задачі (16)-(21), $\hat{p}(x,t)$, $\hat{\varphi}(x,t)$ є роз'язком задачі (22)-(27), $\hat{\hat{\varphi}}$ - розв'язок задачі (28) - (30).

При цьому

$$\sigma = \left\{ l(p_1) + \sum_{i=1}^{m} \int_T^{T_1} \left(\int_G z_1(x,t) b_i(x,t) dx \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де p_1 є розв`язком наступної задачі:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} = L^* p_1, \qquad p_1(x,T) = p(x,T), \qquad p_1{}_\Gamma = 0.$$

$\sigma_1 = 0$, тобто оцінка є незміщеною.

Далі в цьому параграфі розглядається випадок, коли на інтервалі $[0,T]$ ми маємо спостереження вигляду:

$$y_k = \int\limits_{Q_T} R_k(x,t)\varphi(x,t)dx + \xi_k, \; k = \overline{1,N}, \qquad (32)$$

де $\xi_k, \; k = \overline{1,N}$ - випадкові величини, про які відомо:

$$M\xi_k = 0, \; k = \overline{1,N}; \; M\xi_k^2 = \sigma_k^2, \qquad (33)$$

$f_0(x)$ задовольняє умові (12).

Вводяться функції z_2, p як узагальнений розв`язок задачі:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = L^* z_2 - \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^{-2} R_k(x,t) \int\limits_{Q_T} R_k(x_1,t)p(x_1,t)dx_1 dt, \; (34)$$

$$z_2(x,T) = z_1(x,T), \; (35) \quad z_{2|\Gamma} = 0, \; (36)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t) \int\limits_G b_i(x,t) z_2(x,t)dx, \qquad (37)$$

$$p(x,0) = q_0^{-2}(x) z_2(x,0), \quad (38) \quad p(x,t)_{|\Gamma} = 0. \quad (39)$$

Теорема 3.

Мінімаксна середньоквадратична прогнозна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд:

$$\hat{l}(\varphi) = \int\limits_0^T \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k(t) y_k(t) dt + \hat{c} = l(\hat{\varphi}), \qquad (40)$$

де $\hat{u}_k = \sigma_k^{-2}(t) \int\limits_{Q_T} R_k(x,t)p(x,t)dxdt, \; k = \overline{1,N}, \quad \hat{c} = 0,$

$$l(\hat{\varphi}) = \int\limits_G z_1(x,T)\hat{\varphi}(x,T)dx,$$

функції $p(x,t), \; z_2(x,t)$ є розв`язком задачі (34)-(39), а функції $\hat{p}(x,t), \; \hat{\varphi}(x,t)$ визначаються із наступних співвідношень (41)-(42):

$$\hat{p} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \psi_k, \qquad (41) \quad \hat{\varphi} = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \psi_{1k}, \qquad (42)$$

де функції ψ_k та ψ_{1k} є узагальненими розв`язками наступних початково-крайових задач:

$$-\frac{\partial \psi_k}{\partial t} = L^* \psi_k + \sigma_k^{-2} R_k(x,t). \quad \psi_k(x,T) = 0, \quad \psi_{k|\Gamma} = 0.$$

та $\dfrac{\partial\psi_{1k}}{\partial t} = L\psi_{1k} + \sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)\psi_{1k}, \quad \psi_{1k}(x,0) = q_0^{-2}\psi_k(x,0), \quad \psi_{1k\,\Gamma} = 0.$

а β_k, $k=\overline{1,N}$- розв`язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\beta_k = y_k - \sum_{k=1}^{N}\beta_k \int_{Q_T}\psi_{1k}(x,t)R_k(x,t)dxdt, \ k=\overline{1,N}. \qquad (43)$$

Тут $\hat{\hat{\varphi}}$ - розв'язок задачі (28) - (30).

При цьому

$$\sigma = \left\{ l(p_1) + \sum_{i=1}^{m}\int_{T}^{T_1}\left(\int_G z_1(x,t)b_i(x,t)dx\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де p_1 є розв`язком наступної задачі:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} = L^* p_1, \qquad p_1(x,T) = p(x,T), \qquad p_1|_\Gamma = 0.$$

$$\sigma_1 = \left\{\int_G q_0^{-2}(x)\hat{z}_2^2(x,0)dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

У *другому параграфі* розглядаються питання знаходження прогнозних оцінок лінійних функціоналів стохастичних рівнянь з невідомими правими частинами.

Розглядається система, стан якої визначається як розв`язок першої початково-крайової задачі для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу вигляду:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = L\varphi + \sum_{i=1}^{m1}\alpha_i(t)s_i(x,t) + \sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t)\dot{w}_i, \qquad (44)$$

$$\varphi(x,0) = f_0(x), \qquad (45) \qquad \varphi|_\Gamma = 0. \quad (46)$$

Спочатку проаналізовано випадок, коли функції $\alpha_i(t)$, $f_0(x)$ задовольняють умові:

$$\sum_{i=1}^{m1}\int_0^{T_1} r_i^2(t)\alpha_i^2(t)dt + \int_G q_0^2(x)f_0^2(x)dx \le 1. \qquad (47)$$

Для цього випадку вводяться функції z_2, p та $\hat{p}, \hat{\varphi}$ як узагальнені розв`язки наступних задач:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = L^* z_2 - \sum_{k=1}^{N} q_k^2(t) R_k(x,t) \int_G R_k(x_1,t) p(x_1,t) dx_1, \qquad (48)$$

$$z_2(x,T) = z_1(x,T), \quad (49) \qquad z_2|_\Gamma = 0, \qquad (50)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp + \sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t) s_i(x,t) \int_G s_i(x,t) z_2(x,t) dx + \sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t) \int_G b_i(x,t) z_2(x,t) dx, \ (51)$$

$$p(x,0) = q_0^{-2}(x) z_2(x,0), \quad (52) \quad p(x,t)|_\Gamma = 0 \quad (53)$$

та

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = L^* \hat{p} + \sum_{k=1}^{N} q_k^2 R_k(x,t) \left[y_k(t) - \int_G \hat{\varphi}(x_1,t) R_k(x_1,t) dx_1 \right], (54)$$

$$\hat{p}(x,T) = 0, \quad (55) \qquad \hat{p}|_\Gamma = 0, \quad (56)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = L\hat{\varphi} + \sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t) s_i(x,t) \int_G s_i(x,t) \hat{p}(x,t) dx + \sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t) \int_G b_i(x,t) \hat{p}(x,t) dx, \ (57)$$

$$\hat{\varphi}(x,0) = q_0^{-2}(x) \hat{p}(x,0), \quad (58) \quad \hat{\varphi}|_\Gamma = 0. \quad (59)$$

Для цього випадку доведена наступна теорема.

Теорема 4.

Мінімаксна середньоквадратична прогнозна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд:

$$\hat{l}(\varphi) = \int_0^T \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k(t) y_k(t) dt + \hat{c} = l(\hat{\hat{\varphi}}), \qquad (60)$$

де $\hat{u}_k(t) = q_k^2(t) \int_G R_k(x,t) p(x,t) dx, \ k = \overline{1,N}, \quad \hat{c} = 0,$

$$l(\hat{\hat{\varphi}}) = \int_G z_1(x,T) \hat{\varphi}(x,T) dx,$$

функції $p(x,t)$, $z_2(x,t)$ є розв`язком задачі (48)-(53), $\hat{p}(x,t)$, $\hat{\varphi}(x,t)$ є розв`язком задачі (54)-(59), $\hat{\hat{\varphi}}$ - розв'язок задачі (28) - (30).

При цьому

$$\sigma=\left\{l(p_1)+\sum_{i=1}^{m}\int_{T}^{T_1}\left(\int_G z_1(x,t)b_i(x,t)dx\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де p_1 є розв`язком наступної задачі:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t}=L^*p+\sum_{i=1}^{m1}r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int_G s_i(x,t)z_1(x,t)dx,$$

$$p_1(x,T)=p(x,T),\quad p_1|_\Gamma=0.$$

$$\sigma_1=\left\{\int_G q_0^{-2}(x)\hat{z}_2^2(x,0)dx+\sum_{i=1}^{m1}\int_0^{T_1}r_i^{-2}(t)\left\{\int_G\hat{\tilde{z}}(x,t)s_i(x,t)dx\right\}^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Далі розглядається випадок, коли $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ - невідомі коефіцієнти, а функція $f_0(x)$ задовольняє умові (12).

Нехай множина $U=\left\{(u_1,\ldots,u_N):\ \int_{Q_{T_1}}\tilde{z}(x,t)s_i(x,t)dxdt=0\right\}$ не порожня.

Тоді для знаходження вигляду мінімаксної середньоквадратичної оцінки функціоналу (7) вводяться функції z_2, p та $\hat{p}, \hat{\varphi}$ як узагальнені розв`язки наступних задач:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t}=L^*z_2-\sum_{k=1}^{N}q_k^2(t)R_k(x,t)\int_G R_k(x_1,t)p(x_1,t)dx_1,\qquad(61)$$

$$z_2(x,T)=z_1(x,T),\ (62)\qquad \int_{Q_{T_1}}\tilde{z}(x,t)s_i(x,t)dxdt=0,\ (63)\quad z_2|_\Gamma=0,\ (64)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=Lp+\sum_{i=1}^{m1}\lambda_i s_i(x,t)+\sum_{i=1}^{m2}b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)z_2(x,t)dx,\qquad(65)$$

$$p(x,0)=q_0^{-2}(x)z_2(x,0),\quad(66)\quad p(x,t)|_\Gamma=0.\quad(67)$$

та

$$-\frac{\partial\hat{p}}{\partial t}=L^*\hat{p}+\sum_{k=1}^{N}q_k^2R_k(x,t)\left[y_k(t)-\int_G\varphi(x_1,t)R_k(x_1,t)dx_1\right],\ (68)$$

$\hat{p}(x,T)=0,$ (69) $\int\limits_{Q_T}\hat{p}(x,t)s_i(x,t)dxdt=0,$ (70) $\hat{p}|_\Gamma=0,$ (71)

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t}=L\hat{\varphi}+\sum_{i=1}^{m1}r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int\limits_G s_i(x,t)\hat{p}(x,t)+\sum_{i=1}^{m2}b_i(x,t)\int\limits_G b_i(x,t)(\hat{p}(x,t), \quad (72)$$

$\hat{\varphi}(x,0)=q_0^{-2}(x)\hat{p}(x,0),$ (73) $\hat{\varphi}|_\Gamma=0.$ (74)

Теорема 5.

Мінімаксна середньоквадратична прогнозна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд:

$$\hat{\hat{l}}(\varphi)=\int\limits_0^T\sum_{k=1}^N\hat{u}_k(t)y_k(t)dt+\hat{c}=l(\hat{\hat{\varphi}}), \quad (75)$$

де $\hat{u}_k(t)=q_k^2(t)\int\limits_G R_k(x,t)p(x,t)dx,\ k=\overline{1,N},\quad \hat{c}=0,$

$l(\hat{\hat{\varphi}})=\int\limits_G z_1(x,T)\hat{\varphi}(x,T)dx.$

функції $p(x,t)$, $z_2(x,t)$ є розв`язком задачі (61)-(67), $\hat{p}(x,t)$, $\hat{\varphi}(x,t)$ є розв`язком задачі (68)-(74), $\hat{\hat{\varphi}}$ - розв'язок задачі (28) - (30).

При цьому

$$\sigma=\left\{l(p_1)+\sum_{i=1}^m\int\limits_T^T\left(\int\limits_G z_1(x,t)b_i(x,t)dx\right)^2dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де p_1 є розв`язком наступної задачі:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t}=L^*p_1,\quad p_1(x,T)=p(x,T),\quad p_1|_\Gamma=0.$$

$\sigma_1=0$, тобто оцінка функціоналу (7) є незміщеною.

У **другому розділі** наведені результати, одержані при знаходженні мінімаксних прогнозних оцінок функціоналів від розв`язків лінійних рівнянь параболічного типу з випадковими параметрами.

У *першому параграфі* знайдено вигляд прогнозних оцінок лінійних функціоналів при випадкових операторів спостережень.

Розглядається система, стан якої визначається як розв`язок першої початково-крайової задачі для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу (54)-(56).

Припускається, що на інтервалі [0,T] спостерігаються функції $y_k(t)$ вигляду:

$$y_k(t)=\int_G R_k(x,t,\omega)\varphi(x,t)dx+\xi_k(t),\ k=\overline{1,N}, \quad (76)$$

де $R_k(x,t,\omega)\in L^2(Q_T\times\Omega)$ - випадкові функції.

Шукається середньоквадратична оцінка функціоналу (7) із умови:

$$\inf_{u_1,\dots,u_N,c} M \sup_{\alpha_i,i=\overline{1,m1},\xi_i,f_0,i=\overline{1,N}} M\left|l(\varphi)-\hat{l}(\varphi)\right|^2 /_R = M \sup_{\alpha_i,i=\overline{1,m1},\xi_i,f_0,i=\overline{1,N}} M\left|l(\varphi)-\hat{\hat{l}}(\varphi)\right|^2 /_R .$$

Назвемо таку оцінку квазіміоптимальною.

Вводяться функції z_2, p та $\hat{p}, \hat{\varphi}$ як узагальнені розв`язки наступних задач:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t}=L^* z_2-\sum_{k=1}^{N} q_k^2(t)R_k(x,t,\omega)M\int_G R_k(x_1,t,\omega)p(x_1,t)dx_1, \quad (77)$$

$$z_2(x,T)=z_1(x,T), \quad (78) \quad z_2|_\Gamma=0, \quad (79)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=Lp+\sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int_G s_i(x,t)z_2(x,t)dx+\sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)z_2(x,t)dx, \quad (80)$$

$$p(x,0)=q_0^{-2}(x)z_2(x,0), \quad (81) \quad p(x,t)|_\Gamma=0 \ (82)$$

та

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial t}=L^*\hat{p}+\sum_{k=1}^{N} q_k^{-2}R_k(x,t,\omega)\left[v_k(t)-\int_G \varphi(x_1,t)R_k(x_1,t,\omega)dx_1\right], \quad (83)$$

$$\hat{p}(x,T)=0, \quad (84) \quad \hat{p}|_\Gamma=0, \quad (85)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t}=L\hat{\varphi}+\sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int_G s_i(x,t)\hat{p}(x,t)dx+\sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)\hat{p}(x,t)dx, \quad (86)$$

$$\hat{\varphi}(x,0)=q_0^{-2}(x)\hat{p}(x,0), \quad (87) \quad \hat{\varphi}|_\Gamma=0. \quad (88)$$

Показано, що має місце наступна теорема.

Теорема 6.

Квазіоптимальна прогнозна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд:

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = \int_0^T \sum_{k=1}^N \hat{u}_k(t) y_k(t) dt + \hat{c} = l\left(M\hat{\varphi}(v_1, \dots, v_N) /_{v_1=y_1, \dots, v_N=y_N}\right), \quad (89)$$

де $\hat{u}_k(t) = q_k^2(t) M \int_G R_k(x,t,\omega) p(x,t) dx, \; k = \overline{1,N}, \; \hat{c} = 0,$

$$l\left(\hat{\hat{\varphi}}\right) = M \int_G z_1(x,T) \hat{\varphi}(x,T; v_1, \dots, v_N) /_{v_1=y_1, \dots, v_N=y_N},$$

функції $p(x,t)$, $z_2(x,t)$ є розв`язком задачі (77)-(82), $\hat{p}(x,t)$, $\hat{\varphi}(x,t)$ є розв`язком задачі (83)-(88), $\hat{\hat{\varphi}}$ - розв'язок задачі (28) - (30).

При цьому

$$\sigma \le \left\{ l(Mp_1) + \sum_{i=1}^m \int_T^{T_1} \left(\int_G z_1(x,t) b_i(x,t) dx \right)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де p_1 є розв`язком наступної задачі:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} = L^* p + \sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t) s_i(x,t) \int_G s_i(x,t) z_1(x,t) dx,$$

$$p_1(x,T) = p(x,T), \qquad p_1|_\Gamma = 0.$$

$$\sigma_1 = \left\{ M \int_G q_0^{-2}(x) \hat{z}_2^2(x,0) dx + M \sum_{i=1}^{m1} \int_0^{T_1} r_i^{-2}(t) \left\{ \int_G \hat{\hat{z}}(x,t) s_i(x,t) dx \right\}^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

У *другому параграфі* розглядається питання знаходження мінімаксних прогнозних оцінок лінійних функціоналов від розв`язків стохастичних диференціальних рівнянь параболічного типу з випадковими коефіцієнтами.

Вважається, що коефіцієнти диференціального оператора L: $a_{ij} = a_{ij}(x,t,\omega)$, $i, j = \overline{1,n}$, $a_i = a_i(x,t,\omega)$, $i = \overline{1,n}$, $a_0 = a_0(x,t,\omega)$ – рівномірно обмежені випадкові функції; коефіцієнти a_{ij} задовольняють умові рівномірної еліптичності:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\omega)z_i z_j \ge k\sum_{i=1}^{n} z_i^2,\ \forall(x,t,\omega)\in G\times[0,T]\times\Omega,\ k>0,\ a_{ij}=a_{ji}.$$

Шукається квазіоптимальна оцінка функціоналу (7) із умови:

$$\inf_{u_1,\dots,u_N,c} M \sup_{\alpha_i, i=\overline{1,m1}, \xi_i, f_0, i=\overline{1,N}} M\left|l(\varphi)-\hat{l}(\varphi)\right|^2 /_{a_{ij},a_i,a_0} = M \sup_{\alpha_i, i=\overline{1,m1}, \xi_i, f_0, i=\overline{1,N}} M\left|l(\varphi)-\hat{\hat{l}}(\varphi)\right|^2 /_{a_{ij},a_i,a_0}$$

З метою знаходження вигляду такої оцінки вводяться функції z_2, p та $\hat{p}, \hat{\varphi}$ як узагальнені розв`язки наступних задач:

$$-\frac{\partial z_2}{\partial t} = L^* z_2 - \sum_{k=1}^{N} q_k^2(t)R_k(x,t)\int_G R_k(x_1,t)Mp(x_1,t)dx_1, \quad (90)$$

$$z_2(x,T) = z_1(x,T), \quad (91) \qquad z_2|_\Gamma = 0, \quad (92)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Lp + \sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int_G s_i(x,t)z_2(x,t)dx + \sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)z_2(x,t)dx, \quad (93)$$

$$p(x,0) = q_0^{-2}(x)z_2(x,0), \quad (94) \qquad p(x,t)|_\Gamma = 0 \quad (95)$$

та

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = L^* \hat{p} + \sum_{k=1}^{N} q_k^2 R_k(x,t)\left[y_k(t) - \int_G \hat{\varphi}(x_1,t)R_k(x_1,t)dx_1\right], \quad (96)$$

$$\hat{p}(x,T) = 0, \quad (97) \qquad \hat{p}|_\Gamma = 0, \quad (98)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} = L\hat{\varphi} + \sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int_G s_i(x,t)\hat{p}(x,t)dx + \sum_{i=1}^{m2} b_i(x,t)\int_G b_i(x,t)\hat{p}(x,t)dx, \quad (99)$$

$$\hat{\varphi}(x,0) = q_0^{-2}(x)\hat{p}(x,0), \quad (100) \qquad \hat{\varphi}|_\Gamma = 0. \quad (101)$$

Показано, що має місце твердження наступної теореми:

Теорема 7.

Квазіоптимальна прогнозна оцінка функціоналу $l(\varphi)$ має вигляд:

$$\hat{\hat{l}}(\varphi) = \int_0^T \sum_{k=1}^{N} \hat{u}_k(t)y_k(t)dt + \hat{c} = l(M\hat{\varphi}), \quad (102)$$

де $\hat{u}_k(t) = q_k^2(t)\int\limits_G R_k(x,t)Mp(x,t)dx,\ k=\overline{1,N},\quad \hat{c}=0,$

$$l(\hat{\hat{\varphi}}) = M\int\limits_G z_1(x,T)\hat{\varphi}(x,T),$$

функції $p(x,t)$, $z_2(x,t)$ є розв`язком задачі (97)-(102), $\hat{p}(x,t)$, $\hat{\varphi}(x,t)$ є розв`язком задачі (103)-(108), $\hat{\hat{\varphi}}$ - розв'язок задачі (28) - (30).

При цьому

$$\sigma \le \left\{ l(Mp_1) + M\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{T}^{T_1}\left(\int\limits_G z_1(x,t)b_i(x,t)dx\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

де p_1 є розв`язком наступної задачі:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} = L^{*}p + \sum_{i=1}^{m1} r_i^{-2}(t)s_i(x,t)\int\limits_G s_i(x,t)z_1(x,t)dx,$$

$$p_1(x,T) = p(x,T),\qquad p_1|_\Gamma = 0.$$

$$\sigma_1 = \left\{ M\int\limits_G q_0^{-2}(x)\hat{z}_2^2(x,0)dx + M\sum_{i=1}^{m1}\int\limits_0^{T_1} r_i^{-2}(t)\left\{\int\limits_G \hat{\hat{z}}(x,t)s_i(x,t)dx\right\}^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ОСНОВНІ ВИСНОВКИ РОБОТИ

Отримані в дисертаційній роботі результати теоретичних розробок можуть бути використані при розв`язанні конкретних практичних задач, пов`язаних з прогнозуванням перебігу фізичних процесів, динаміка яких допускає опис у вигляді стохастичних диференційних рівнянь з частинними похідними, що є досить важливим при обробці результатів досліджень в умовах невизначеності для систем гідродинаміки, екології, теплофізики та ін.

В роботі отримано наступні основні результати:

1. Знайдено вигляд мінімаксних середньоквадратичних прогнозних оцінок функціоналів від розв`язків стохастичних диференціальних

рівнянь параболічного типу при невідомих початкових умовах задачі та невідомій правій частині рівняння.

2. Знайдені квазіоптимальні прогнозні оцінки для випадків, коли невідомі оператори спостережень та диференціальний оператор має випадкові коефіцієнти.

3. Знайдені величини похибки та максимального зміщення отриманих оцінок.

За темою дисертації опубліковані такі роботи.

1. Кордас О.І., Кордас В.А. Задачі мінімаксного прогнозування одномірних процесів дифузії та переносу//1-а Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика -94":Тези доповідей. Частина І. Секції 1-6. - Київ, 1994. - С.149.

2. Кордас О.І., Кордас В.А. Мінімаксні прогнозні оцінки процесів дифузії//3-а Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика -96":Тези доповідей. Том І. - Севастополь, 1996. - С.153.

3. Кордас О.І. Мінімаксні прогнозні оцінки функціоналів від розв`язків стохастичних диференціальних рівнянь параболічного типу. Київ , 1996. - 19с./Деп. в РДАСНТІ №1872-Ук96.

4. Нконечний О.Г., Кордас О.І. Мінімаксні лінійні прогнозні оцінки розв`язків дифузійних рівнянь. Київ , 1996. - 17с./Деп. в РДАСНТІ №1871-Ук96.

5. Nakonechny A.G., Kordas O.I., Meredov A.M. Minimax linear prediction estimates of diffusion and masstransfer proccesses//Труды Института математики и компьютерных технологий. - Ашгабат: Ылым, 1995. - Вып.IV. - С.218-220.

6. Nakonechny A.G., Kordas O.I., Levoshich O.L. Problems of polution sources intensity control//Труды Института математики и компьютерных технологий. - Ашгабат: Ылым, 1995. - Вып.IV. - С.221-223.

Кордас О.И. Минимаксные среднеквадратические прогнозные оценки функционалов от решений стохастических уравнений параболического типа. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 - системный анализ и теория оптимальных решений. Киевский национальный университет, Киев, 1996.

Диссертация содержит сведения, нашедшие отражение в шести научных работах автора. В диссертации найден вид минимаксных среднеквадратических прогнозных оценок функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений параболического типа при неизвестных начальных условиях задачи и неизвестной правой части уравнения. Построены квазиоптимальные прогнозные оценки для случаев, когда неизвестны операторы наблюдений и дифференциальный оператор имеет случайные коэффициенти. Определены величины погрешности и максимального смещения полученных оценок.

Kordas O.I. Minimax root-mean-square prognosis estimates of functionals from stochastic equation solutions of parabolic type. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, the specialty 01.05.04 - system analysis and theory of optimal solutions. Kiev National University, Kiev, 1996.

Thesis contains information published in 6 scientific author's papers. Form of minimax root-mean-square prognosis estimates of functionals from stochastic equation solutions of parabolic type when initial conditions are unknown and right parts of equation are unknown were found in the thesis. Quasioptimal prognosis estimates for the cases when observation operators are unknown and differential operator has random coefficients were built. Values of error and maximal displacement of received estimates were found.

Ключові слова: мінімаксне прогнозування, середньоквадратична оцінка, лінійний функціонал, стохастичне рівняння, випадковий процес, оптимальне керування, узагальнений розв`язок.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору О.Г.Наконечному за постановку задачі та постійну увагу до роботи.

Підписано до друку 14.10.96р. Формат 60x84 1/16
Папір друк. Обл.-вид.арк. 1,0. Ум.друк.арк. 1,0.
Тираж 100 прим. Зам. 287. ГПРПО "Поліграфкнига".

Кордас О.И. Минимаксные среднеквадратические прогнозные оценки функционалов от решений стохастических уравнений параболического типа. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 - системный анализ и теория оптимальных решений. Киевский национальный университет, Киев, 1999.

Диссертация содержит результаты, изложенные и опубликованные в шести научных работах автора. В диссертации найден вид минимаксных среднеквадратических прогнозных оценок функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений параболического типа при неизвестных начальных условиях задачи и неизвестной правой части уравнения. Построены квазиоптимальные прогнозные оценки для случаев, когда неизвестны операторы наблюдений и дифференциальный оператор имеет случайные коэффициенты. Определены величины погрешности и максимального смещения полученных оценок.

Kordas O.I. Minimax root-mean-square prognosis estimates of functionals from stochastic equation solutions of parabolic type. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, the speciality 01.05.04 - system analysis and theory of optimal solutions. Kiev National University, Kiev, 1999.

Thesis contains information published in 6 scientific author's papers. Form of minimax root-mean-square prognosis estimates of functionals from stochastic equation solutions of parabolic type when initial conditions are unknown and right parts of equation are unknown were found in the thesis. Quasioptimal prognosis estimates for the cases when observation operators are unknown and differential operator has random coefficients were built. Values of error and maximal displacement of received estimates were found.

Ключові слова: мінімаксне прогнозування, середньоквадратична оцінка, лінійний функціонал, стохастичні рівняння, випадкові процеси, оптимальне керування, узагальнений розв'язок.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику [illegible] за постановку задачі та постійну увагу до роботи.