

На правах рукописи

Рамадан К. Мохамед



Дефектные функции и регулярные расширения
голоморфных сжимающих матриц-функций

01.01.01 — Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
кандидат физико-математических наук
доцент Дубовой В.К.



00753866 (Z)

Диссертация является рукописью.
Диссертация выполнена в Харьковском государственном университете.

Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук, доцент
Дубовой Владимир Кириллович

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ковалишина Ирина Васильевна
(Харьковская государственная академия
железнодорожного транспорта)
канд. физ.-мат. наук
Кужель Сергей Александрович
(Институт математики НАНУ, г.Киев)

Ведущая организация: Южно-Украинский педагогический университет
г.Одесса

Защита состоится "22" ноября 1996 г. в 17⁰⁰ часов
на заседании специализированного совета К 02.02.17 в Харьковском
государственном университете (310077, г.Харьков, пл. Свободы, 4,
ауд. VI-48).

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной
библиотеке университета по адресу: пл. Свободы, 4.

Автореферат разослан "18" октября 1996г.

Ученый секретарь
специализированного совета

А.Ф.Коций

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В 1946 г. М.С.Лившицем было введено фундаментальное понятие характеристической оператор-функции (х.о.-ф.). Это послужило началом интенсивного изучения методами х.о.-ф. операторов, близких к самосопряженным или к унитарным. Этому направлению посвятили свои работы М.С.Бродский, М.Г.Крейн, И.Ц.Гохберг, Д.З.Аров, Л.А.Сахнович, А.В.Кужель, Б.С.Павлов, А.В.Штраус, B.Sz.-Nagy, C.Fojas, R.Arocena, J.A.Ball, H.Bercovici, A.E.Frazho и многие другие. Интенсивность этих исследований не утихла с прошедшими годами.

Следующие три свойства х.о.-ф. определяют ту глубокую роль, которую эти функции играют при изучении операторов:

а) х.о.-ф. определяет соответствующий ей оператор с точностью до унитарной эквивалентности;

б) между инвариантными подпространствами оператора и (специального вида) множителями соответствующей х.о.-ф. имеется взаимно однозначное соответствие;

в) для рассматриваемых классов операторов соответствующие им х.о.-ф. допускают достаточно простое внутреннее описание.

Так, например, для операторов сжатия в гильбертовом пространстве соответствующие им х.о.-ф. образуют класс S голоморфных в единичном круге сжимающих оператор-функций.

С другой стороны, в классе S можно поставить интерполяционную задачу Шура, которую в случае комплекснозначных функций впервые рассмотрел и решил в 1917 г. И.Шур. Методы, которыми И.Шур решил поставленную задачу, проникли во многие разделы математики.

В начале семидесятых годов В.П.Потапов предложил новый, связанный с теорией J -растягивающих матриц-функций подход к изучению широкого круга интерполяционных задач анализа. В восьмидесятые годы с позиций идей, предложенных В.П.Потаповым, В.К.Дубовой исследовал интерполяционную задачу в классе S . В результате этих исследований В.К.Дубовым были введены понятия регулярного расширения, дефектных чисел и дефектных функций голоморфной сжимающей матрицы-функции, а также, учитывая вышеуказанную связь класса S с операторами сжатия, была выяснена связь этих понятий с операторами сжатия. Отметим, что в этих исследованиях дефектные функции появляются в результате факторизации предельных радиусов в задаче Шура. Такой подход к определению дефектных функций, несмотря на свои положительные моменты, требует достаточно

глубокого изучения задачи Шура. В этой связи возникает вопрос о введении дефектных функций голоморфной сжимающей матрицы-функции $\theta(\zeta)$ непосредственно через сжатие T , для которого функция $\theta(\zeta)$ является характеристической. Целью данной работы является развитие такого операторного подхода. При этом устанавливаются новые достаточно интересные связи между свойствами сжатия T и дефектными функциями.

Отметим, что с других позиций, а именно опираясь на общие теоремы факторизационного характера, функции, называемые в работе дефектными, также изучались Д.З.Аровым в серии статей по системам рассеяния. В этих работах выясняется, в частности, та роль, которую эти функции играют в теории рассеяния.

Цель диссертации. Развитие операторного подхода к исследованию дефектных функций голоморфной сжимающей матрицы-функции. В частности изучение свойств голоморфной сжимающей матрицы-функции и отвечающих ей дефектных функций, связанных с односторонними сдвигами и косдвигами, входящими в соответствующее сжатие.

Методика исследования. В работе используется аппарат теории унитарных узлов, характеристических функций, функциональных моделей, открытых систем.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы состоит в развитии операторного подхода к изучению свойств дефектных функций. Этот подход позволяет: а) установить критерий ортогональности внутренних каналов системы, являющийся основным результатом диссертации; б) доказать свойство максимальности дефектных функций; в) исследовать унитарные узлы, соответствующие дефектным функциям; г) установить взаимно однозначное соответствие между регулярными расширениями влево (вверх) голоморфной сжимающей матрицы-функции и внутренними (*-внутренними) функциями.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались в Лейпциге на научном семинаре Б.Кирстайна и Б.Фритцге (1992 г.), а также на научном семинаре в ХГУ (рук. В.К.Дубовой). Результаты диссертации нашли применение в работе: Dubovoy V.K., Fritzsche B., Kirstein B. On spectrally associated Schur functions, Arov-inner functions and Nehari-type completion problem for Schur functions. Integr. Equat. Oper. Th V.17. 1993. - P.276.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях [1], [2].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 81 наименование. Объем работы — 93 страницы. Названия глав:

Глава I. Основные факты из теории унитарных узлов.

Глава II. Дефектные функции и регулярные расширения голоморфных сжимающих матриц-функций.

Глава III. Дефектные функции и открытые системы.

Основные положения, вынесенные на защиту:

1) Критерии ортогональности одностороннего сдвига и косдвига, содержащихся во вполне неунитарном сжатии (критерий ортогональности внутренних каналов системы).

2) Доказательство свойства максимальности дефектных функций.

3) Установление взаимно однозначного соответствия между регулярными расширениями влево (вверх) и внутренними (*-внутренними) функциями.

4) Построение узлов, соответствующих дефектным функциям и исследование их простоты.

Содержание работы

В первых четырех параграфах главы I приводятся в удобной для дальнейшего форме необходимые сведения из теории унитарных узлов и их характеристических функций.

Пусть T — оператор сжатия (то есть $\|T\| \leq 1$), действующий в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} . Как известно, для сжатия T можно указать такие гильбертовы пространства \mathfrak{F} и \mathfrak{G} и операторы ¹⁾ $F \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{F}]$,

$G \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$, $S \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$, что отображение $U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix} \in [\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{F}]$ является унитарным, то есть $U^*U = I_{\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{F}}$, $UU^* = I_{\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}}$.

Построенная таким образом совокупность

$$\Delta = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; T, F, G, S) \quad (1)$$

называется унитарным узлом, или просто узлом, а описанная выше процедура — включением сжатия T в унитарный узел Δ . Пространства \mathfrak{H} ,

¹⁾ Через $[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ обозначается совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из \mathfrak{F} в \mathfrak{G} .

\mathfrak{G} и \mathfrak{F} называются соответственно внутренним, левым внешним и правым внешним. Сжатие T называется основным оператором узла Δ .

Узел (1) называется простым, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\delta \vee \mathfrak{H}_\sigma$, где

$$\mathfrak{H}_\delta = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n F(\mathfrak{F}), \quad \mathfrak{H}_\sigma = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{*n} G^*(\mathfrak{G}). \quad (2)$$

Унитарному узлу (1) можно поставить в соответствие функцию

$$\theta_\Delta(\zeta) = S + \zeta G(I - \zeta T)^{-1} F.$$

Функция $\theta_\Delta(\zeta)$ называется характеристической функцией (х.о.-ф.) узла (1) и обладает следующими свойствами:

1) $\theta_\Delta(\zeta)$ определена внутри единичного круга $D = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ комплексной плоскости, при этом $\theta(\zeta) \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ для каждого ζ .

2) $\theta_\Delta(\zeta)$ — голоморфна в D , а именно $\theta_\Delta(\zeta) = S + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n G T^{n-1} F$, $\zeta \in D$.

3) Для любого ζ из D выполнено неравенство $I - \theta_\Delta^*(\zeta) \theta_\Delta(\zeta) \geq 0$.

Определение. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{G} — гильбертовы пространства. Через $S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ обозначим совокупность операторно-значных функций, удовлетворяющих условиям 1)-3).

Таким образом, х.о.-ф. унитарного узла (1), принадлежит классу $S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$. С другой стороны имеет место следующее важное утверждение:

Для всякой функции $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ существует простой унитарный узел (1), такой, что $\theta(\zeta) = \theta_\Delta(\zeta)$, при этом этот узел определяется по $\theta(\zeta)$ с точностью до унитарной эквивалентности.

Введем важное в теории унитарных узлов понятие произведения узлов. А именно, пусть правое внешнее пространство узла $\Delta_1 = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{R}; T_1, F_1, G_1, S_1)$ совпадает с левым внешним пространством узла $\Delta_2 = (\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}, \mathfrak{R}; T_2, F_2, G_2, S_2)$. Рассмотрим пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$ и унитарное отображение

$$U = (U_1 \oplus U_2)(U_2 \oplus U_1) \in [\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{F}], \quad \text{где } U_j = \begin{pmatrix} T_j & F_j \\ G_j & S_j \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2).$$

Унитарный узел $\Delta = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; U)$ называется произведением унитарных узлов Δ_1 , Δ_2 и обозначается символом $\Delta_1 \Delta_2$. Факторизацией узла называется любое его представление в виде произведения двух узлов. Как известно, для того, чтобы узел (1) допускал факторизацию $\Delta = (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{R}; U_1)$ $(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}, \mathfrak{R}; U_2)$ необходимо и достаточно, чтобы \mathfrak{F}_1 было инвариантным подпространством относительно основного оператора T узла Δ , при этом, если унитарный узел Δ допускает факторизацию $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$, то $\theta_\Delta(\zeta) = \theta_{\Delta_1}(\zeta) \theta_{\Delta_2}(\zeta)$, $|\zeta| < 1$.

Пусть $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$. Факторизацией $\theta(\zeta)$ называется любое представление ее в виде

$$\theta(\zeta) = \theta_1(\zeta)\theta_2(\zeta), \quad \theta_1(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{R}] \quad \text{и} \quad \theta_2(\zeta) \in S[\mathfrak{R}, \mathfrak{F}]. \quad (3)$$

Определение. Факторизация (3) называется регулярной, если произведение $\Delta_1\Delta_2$ простых узлов Δ_1 и Δ_2 , для которых $\theta_{\Delta_j}(\zeta) = \theta_j(\zeta)$ ($j=1,2$) есть простой узел.

Отметим, что в данной работе рассматриваются узлы $\Delta = (\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}; U)$ и соответственно класс функций $S[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}]$ с конечномерными внешними пространствами \mathfrak{F} и \mathfrak{G} , при этом в дальнейшем предполагается, что $\dim \mathfrak{G} = p$, $\dim \mathfrak{F} = q$.

Будем говорить, что односторонний сдвиг $V_1 \in [\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1]$ содержится в сжатии $T \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]$, если $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, \mathfrak{F}_1 инвариантно относительно T и $V_1 = T|_{\mathfrak{F}_1}$. Можно показать, что среди односторонних сдвигов V_1 , входящих в T можно выбрать максимальный сдвиг V_T , то есть такой сдвиг, который содержит любой односторонний сдвиг, входящий в T .

Оператор $\tilde{V} \in [\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mathfrak{F}}]$ называется односторонним косдвигом, если $V = \tilde{V}^*$ является односторонним сдвигом. Кратностью косдвига \tilde{V} будем называть кратность сдвига V . Будем говорить, что косдвиг \tilde{V} содержится в сжатии T , если сдвиг \tilde{V}^* входит в T^* .

Пятый параграф первой главы посвящен изучению односторонних сдвигов, содержащихся во вполне неунитарном сжатии $T \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]$. Так в теоремах 5.1, 5.2 устанавливается, что максимальный односторонний сдвиг V_T (V_{T^*}), содержащийся в сжатии T (T^*), действует в подпространстве $\mathfrak{F}_\mathfrak{G}^\perp = \mathfrak{F} \ominus \mathfrak{F}_\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{F}_\mathfrak{G}^\perp = \mathfrak{F} \ominus \mathfrak{F}_\mathfrak{G}$), где $\mathfrak{F}_\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}_\mathfrak{G}^\perp$ имеют вид (2). В теореме 5.3 дано описание сдвига V_T на модели Б.Секефальви-Надя и Ч.Фояша. Завершается §5 описанием х.о.-ф. односторонних сдвигов и косдвигов. Как показано в леммах 5.1 и 5.2, если V (\tilde{V}) — односторонний сдвиг (косдвиг) кратности $\alpha < \infty$ ($\beta < \infty$) и Δ ($\tilde{\Delta}$) — унитарный узел, основным оператором которого является сдвиг V (косдвиг \tilde{V}), то $q = p + \alpha$ ($p = q + \beta$), при этом

$$\theta_\Delta(\zeta) = [O_{p,\alpha}, I_p] \left(\theta_{\tilde{\Delta}} = \begin{bmatrix} O_{\beta,q} \\ I_q \end{bmatrix} \right).$$

Глава II посвящена дефектным функциям и регулярным расширениям голоморфных сжимающих оператор-функций.

Пусть $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ и Δ — простой унитарный узел (1), такой, что $\theta(\zeta) = \theta_\Delta(\zeta)$. В §1 главы II вводятся дефектные функции функции $\theta(\zeta)$. Для определения дефектных функций рассмотрим множества

$$\mathfrak{D}_T = \{V : V \text{ — односторонний сдвиг, } V \subset T\},$$

$$\tilde{\mathfrak{G}}_T = \{\tilde{V} : \tilde{V}^* - \text{односторонний сдвиг, } \tilde{V}^* \subset T^*\}$$

односторонних сдвигов и косдвигов, содержащихся в сжатии T . Множества \mathfrak{G}_T и $\tilde{\mathfrak{G}}_T$ можно естественным образом частично упорядочить, а именно, если $V_j \in \mathfrak{G}_T$ ($\tilde{V}_j \in \tilde{\mathfrak{G}}_T$), $j=1,2$, то будем считать, что $V_1 < V_2$ ($\tilde{V}_1 < \tilde{V}_2$), если $V_1 \subset V_2$ ($\tilde{V}_1^* \subset \tilde{V}_2^*$). Очевидно, V_T и $\tilde{V}_T = V_T^*$ являются максимальными элементами в \mathfrak{G}_T и в $\tilde{\mathfrak{G}}_T$ соответственно.

Каждому одностороннему сдвигу $V_1 \in \mathfrak{G}_T$ (косдвигу $\tilde{V}_1 \in \tilde{\mathfrak{G}}_T$) поставим в соответствие функцию

$$\varphi_{V_1}(\zeta) = P_0^{(1)}(I - \zeta T)^{-1} F \quad (\psi_{\tilde{V}_1}(\zeta) = G(I - \zeta T)^{-1} \tilde{P}_0^{(1)}), \zeta \in D, \quad (4)$$

где $P_0^{(1)}$ ($\tilde{P}_0^{(1)}$) — ортопроектор в \mathfrak{H} на порождающее подпространство $\mathfrak{H}_0^{(1)}$ ($\tilde{\mathfrak{H}}_0^{(1)}$) сдвига V_1 (\tilde{V}_1). При этом значения $\varphi_{V_1}(\zeta)$ ($\psi_{\tilde{V}_1}(\zeta)$) будем рассматривать как операторы из \mathfrak{F} ($\tilde{\mathfrak{F}}_0^{(1)}$) в $\mathfrak{H}_0^{(1)}$ (\mathfrak{G}).

Введем в рассмотрение множества $\Phi_\theta = \{\varphi_{V_1}(\zeta), V_1 \in \mathfrak{G}_T\}$, $\Psi_\theta = \{\psi_{\tilde{V}_1}(\zeta), \tilde{V}_1 \in \tilde{\mathfrak{G}}_T\}$. Множества Φ_θ и Ψ_θ можно естественным образом частично упорядочить. А именно, пусть $\varphi_j(\zeta) \in \Phi_\theta$ ($\psi_j(\zeta) \in \Psi_\theta$), $j=1,2$. Будем считать, что $\varphi_1(\zeta) < \varphi_2(\zeta)$ ($\psi_1(\zeta) < \psi_2(\zeta)$), если

$$\varphi_1^*(\zeta)\varphi_1(\zeta) \leq \varphi_2^*(\zeta)\varphi_2(\zeta) \quad (\psi_1(\zeta)\psi_1^*(\zeta) \leq \psi_2(\zeta)\psi_2^*(\zeta)), \quad \zeta \in D.$$

Равенства (4) устанавливают отображение множества \mathfrak{G}_T ($\tilde{\mathfrak{G}}_T$) в Φ_θ (Ψ_θ). В §1 устанавливается, что эти отображения являются взаимно однозначными и сохраняют свойство частичной упорядоченности.

Определение. Пару функций $(\varphi(\zeta), \psi(\zeta))$, где $\varphi(\zeta) = \varphi_{V_T}(\zeta)$ и $\psi(\zeta) = \psi_{\tilde{V}_T}(\zeta)$ назовем дефектными функциями функции $\theta(\zeta)$.

Таким образом, дефектная функция $\varphi(\zeta)$ является максимальным элементом во множестве Φ_θ , а дефектная функция $\psi(\zeta)$ — максимальным элементом в Ψ_θ .

Важную роль в рассматриваемом подходе играет установленная В.К.Дубовым связь множеств Φ_θ и Ψ_θ с регулярными факторизациями вида

$$\theta(\zeta) = \begin{bmatrix} O_{p, \alpha_1} & I_p \\ \varphi(\zeta) & \theta(\zeta) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \theta(\zeta) = \begin{bmatrix} \bar{q}(\zeta) & \theta(\zeta) \\ O_{\beta_1, q} & I_q \end{bmatrix} \quad (5)$$

соответственно. Оказывается, что факторизация (5) является регулярной в том и только в том случае, когда $q(\zeta) \in \Phi_\theta$ ($\bar{q}(\zeta) \in \Psi_\theta$). Таким образом, между регулярными факторизациями (5) и, соответственно, множествами

Φ_0 и Ψ_0 имеется взаимно однозначное соответствие. В частности отсюда

следует, что функции $\begin{bmatrix} \varphi(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix}$ и $[\psi(\zeta), \theta(\zeta)]$ являются сжимающими.

В первом пункте §2 приводятся необходимые для дальнейшего результаты из работ В.К. Дубового.

Определение. Будем говорить, что функция $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ допускает регулярное расширение вверх на r строк (влево на s столбцов), если существует функция $q(\zeta) \in S[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{F}]$ $\dim \mathfrak{G}_1 = r$ ($\tilde{q}(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_1]$, $\dim \mathfrak{F}_1 = s$), такая что

$$\Omega(\zeta) = \begin{bmatrix} q(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix} \in S[\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{F}] \quad (\tilde{\Omega}(\zeta) = [q(\zeta), \theta(\zeta)] \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}]), \quad (6)$$

при этом почти всюду на единичной окружности выполняется равенство

$$\begin{aligned} \text{rang}(I - \theta^*(e^{it})\theta(e^{it})) &= r + \text{rang}(I - \Omega^*(e^{it})\Omega(e^{it})) \\ ((\text{rang}(I - \theta(e^{it})\theta^*(e^{it}))) &= s + \text{rang}(I - \tilde{\Omega}(e^{it})\tilde{\Omega}^*(e^{it}))). \end{aligned}$$

Регулярные расширения связаны с регулярными факторизациями вида (5). А именно, расширение (6) является регулярным в том и только в том случае, когда факторизация (5) является регулярной. Эта связь и связь факторизаций (5) с односторонними сдвигами позволяет показать, что среди всех регулярных расширений вверх (влево) имеется максимальное. Максимальное регулярное расширение вверх (влево)

определяется единственным образом и имеет вид $\begin{bmatrix} \varphi(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix} ([\psi(\zeta), \theta(\zeta)])$, где $\varphi(\zeta)$ ($\psi(\zeta)$) — правая (левая) дефектная функция функции $\theta(\zeta)$. Это расширение осуществляется на α строк вверх (β столбцов влево), где α (β) — кратность максимального сдвига V_T (V_{T^*}).

В пункте 2 второго параграфа устанавливается свойство максимальной дефектных функций. Для этого используется метод Лоуденслэгера, развитый в дальнейшем в работах Б.Секефальви-Надя и Ч.Фояша.

Рассмотрим функцию $N(t)$, ($0 \leq t \leq 2\pi$), значениями которой являются самосопряженные операторы в конечномерном пространстве \mathfrak{F} . Будем предполагать, что $N(t)$ измерима и удовлетворяет неравенствам $0 \leq N(t) \leq I$. Функция $N(t)$ порождает по формуле $(N\mathfrak{D})(t) = N(t)\mathfrak{D}(t)$ оператор N в пространстве $L_2(\mathfrak{F})$. Этот оператор самосопряжен и $0 \leq N \leq I$.

Существенную роль в рассматриваемом подходе имеет утверждение:

Существует внешняя функция $\omega_0(\zeta) \in S[\mathfrak{R}_0, \mathfrak{F}]$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $N^2(t) \geq \omega_0^*(e^{it})\omega_0(e^{it})$ почти всюду;
- 2) для всякой другой функции $\omega(\zeta) \in S[\mathfrak{R}, \mathfrak{F}]$, такой, что $N^2(t) \geq \omega^*(e^{it})\omega(e^{it})$ почти всюду, имеет место неравенство $\omega_0^*(e^{it})\omega_0(e^{it}) \geq \omega^*(e^{it})\omega(e^{it})$ почти всюду. Эти свойства определяют внешнюю функцию $\omega_0(\zeta)$ с точностью до левого постоянного унитарного множителя.

Определение. Внешнюю функцию $\omega_0(\zeta) \in S[\mathfrak{R}, \mathfrak{F}]$, обладающую свойствами 1) и 2) будем называть N -максимальной. Функцию $\bar{\omega}(\zeta) \in S[\mathfrak{F}, \mathfrak{R}]$ будем называть $*$ - N -максимальной, если функция $\bar{\omega}^*(\bar{\zeta})$ является N -максимальной.

Одним из основных утверждений главы II является теорема 2.4:

Пусть $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$. Тогда

- 1) дефектная функция $\varphi(\zeta)$ функции $\theta(\zeta)$ является максимальной для функции $\Pi(e^{it}) = (1 - \theta^*(e^{it})\theta(e^{it}))^{1/2}$;
- 2) левая дефектная функция $\psi(\zeta)$ функции $\theta(\zeta)$ является $*$ -максимальной для функции $\Pi_*(e^{it})$, где $\Pi_*(e^{it}) = (1 - \theta(e^{it})\theta^*(e^{it}))^{1/2}$.

Третий пункт §2 посвящен описанию связи регулярных расширений с дефектными функциями. Эта связь позволяет установить взаимно однозначное соответствие между регулярными расширениями вверх (влево) и $*$ -внутренними (внутренними) функциями (теоремы 2.5-2.7).

Как известно каждый односторонний сдвиг порождает преобразование Фурье. В §3 второй главы изучаются преобразования Фурье, порожденные максимальными сдвигами V_T, V_{T^*} .

В главе III выясняется смысл дефектных функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ на языке открытых систем, а также устанавливается связь регулярных расширений с операцией выведения внутренних каналов системы наружу.

В первом параграфе этой главы приводятся необходимые сведения из теории открытых систем, связанные с операторными узлами.

Пусть $\theta(\zeta) \in S[\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ и Δ — простой унитарный узел (1), такой, что $\theta(\zeta) = \theta_\Delta(\zeta)$. Узлу Δ можно поставить в соответствие открытую систему \mathfrak{G}_Δ с дескретным временем $n=0, 1, 2, \dots$, которая определяется соотношениями:

$$\begin{cases} h(n+1) = Th(n) + Ff(n) \\ g(n) = Gh(n) + Sf(n), \end{cases} \quad (7)$$

здесь $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, $\{g(n)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{G}$ и $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{H}$ интерпретируются как данные, соответственно, на входе, выходе и внутри системы. При этом можно показать, что $\theta(\zeta)$ является передаточной функцией для системы (7).

Как уже отмечалось, пространство \mathfrak{H} в теории систем играет роль внутреннего пространства. Важную роль в теории систем играют подпространства в \mathfrak{H} , в которых действуют максимальные односторонние сдвиги, входящие в Γ или в Γ^* .

Определение. Подпространства \mathfrak{H}_0 и $\tilde{\mathfrak{H}}_0$, порождающие для максимальных односторонних сдвигов V_T и V_{T^*} соответственно, будем называть внутренними канальвыми подпространствами, а подпространства

$M_+(\mathfrak{H}_0) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_T^n \mathfrak{H}_0$ и $M_+(\tilde{\mathfrak{H}}_0) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{T^*}^n \tilde{\mathfrak{H}}_0$ — внутренними каналами.

В §2 этой главы устанавливается связь регулярных расширений $\theta(\zeta)$ с операцией выведения внутренних каналов системы \mathfrak{H}_Δ наружу.

Пусть $\dim \mathfrak{H}_0 = \alpha$ и P_0 — ортопроектор в \mathfrak{H} на \mathfrak{H}_0 . Разложению

$$\mathfrak{H} = (\dots \oplus V_T^2 \mathfrak{H}_0 \oplus V_T \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_0) \oplus \mathfrak{H}_\mathfrak{G}$$

соответствуют блочные представления:

$$T = \begin{bmatrix} V_T & R \\ O & T_\mathfrak{G} \end{bmatrix}, \quad V_T = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & \mathbf{0} \\ & I_\alpha & & \\ & 0 & I_\alpha & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad r \in [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_\mathfrak{G}], \quad (8)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_M \\ F_\mathfrak{G} \end{bmatrix}, \quad F_M = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad F_0 \in [\mathfrak{H}_0, \mathfrak{F}]. \quad (9)$$

Как показано в главе II сдвигу V_T соответствует регулярная факторизация

$$\theta(\zeta) = [O_{p,\alpha}, I_q] \theta_\mathfrak{G}(\zeta), \quad \theta_\mathfrak{G}(\zeta) = \begin{bmatrix} \varphi(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

при этом функция $\theta_\mathfrak{G}(\zeta)$ является регулярным расширением $\theta(\zeta)$, соответствующим сдвигу V_T .

Целью данного параграфа является построение узла $\Delta_\mathfrak{G}$, для которого функция $\theta_\mathfrak{G}(\zeta)$ является характеристической. А именно

$$\Delta_\mathfrak{G} = (\mathfrak{H}_\mathfrak{G}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{G}; T_\mathfrak{G}, F_\mathfrak{G}, G_\mathfrak{G}, S_\mathfrak{G}),$$

где $T_\mathfrak{G}$ и $F_\mathfrak{G}$ определяются из разложений (8) и (9),

$$G_\mathfrak{G} = \begin{bmatrix} r \\ G \end{bmatrix} \in [\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{H}_\mathfrak{G}], \quad S_\mathfrak{G} = \begin{bmatrix} F_0 \\ S \end{bmatrix} \in [\mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{F}].$$

Рассмотрим открытые системы \mathfrak{D}_Δ и $\mathfrak{D}_{\Delta_\circ}$, соответствующие узлам Δ и Δ_\circ . Тогда факторизацию (10) можно интерпретировать как операцию закрытия α выходных каналов у системы $\mathfrak{D}_{\Delta_\circ}$. Эти каналы попадают во внутрь системы \mathfrak{D}_Δ и образуют подпространство $M_+(\mathfrak{F}_0)$. Обратно переход от \mathfrak{D}_Δ к $\mathfrak{D}_{\Delta_\circ}$ можно интерпретировать как выведение внутренних каналов $M_+(\mathfrak{F}_0)$ во внешние, т.е. наружу.

Аналогично рассматривается связь между регулярным расширением $[\psi(\zeta), \theta(\zeta)]$ с операцией выведения подпространства \mathfrak{F}_0 , порождающего для сдвига V_{T_\circ} , наружу.

В §3 строятся операторные узлы Δ_φ и Δ_ψ , для которых дефектные функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ являются характеристическими.

Начнем с функции $\varphi(\zeta)$.

Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{F}_\varphi = M_+(\mathfrak{G}) \oplus \mathfrak{F}_0 = [\dots \oplus V_\varphi^2 \mathfrak{G} \oplus V_\varphi \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}] \oplus \mathfrak{F}_0, \quad (11)$$

и зададим операторы $T_\varphi \in [\mathfrak{F}_\varphi, \mathfrak{F}_\varphi]$, $F_\varphi \in [\mathfrak{F}_\varphi, \mathfrak{F}_\varphi]$, $G_\varphi \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_\varphi]$, $S_\varphi \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}_\varphi]$, имеющие при разложении (11) вид

$$T_\varphi = \begin{bmatrix} V_\varphi & \tilde{G} \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}, \quad V_\varphi = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ & 0 & I_p & \\ & & 0 & I_p \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ G \end{bmatrix}, \quad F_\varphi = \begin{bmatrix} F'_\varphi \\ \dots \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad F'_\varphi = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ S \end{bmatrix},$$

$$G_\varphi = [\dots, 0, 0, 0 \vdots r], \quad S_\varphi = F_0,$$

а операторы T_0 , F_0 , F_0 и r определяются из соотношений (8) и (9).

Непосредственно проверяется, что совокупность: $\Delta_\varphi = (\mathfrak{F}_\varphi, \mathfrak{F}_\varphi, \mathfrak{G}; T_\varphi, F_\varphi, G_\varphi, S_\varphi)$, $\mathfrak{F}_\varphi = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}_\varphi = \mathfrak{F}_0$ является унитарным узлом.

На языке открытых систем построение узла Δ_φ означает, что в системе \mathfrak{D}_Δ подпространство \mathfrak{F}_0 вывели на выход, а пространство выходов \mathfrak{G} ввели во внутрь системы.

Построения, относящиеся к $\psi(\zeta)$ носят аналогичный характер. В §4 приводятся примеры простого узла Δ , для которого узлы Δ_φ и Δ_ψ простыми не являются.

До сих пор рассматривались регулярные расширения либо только вверх, либо только влево. Однако эти операции можно комбинировать. Пусть $\theta_\circ(\zeta)$ и $\theta_\mathfrak{B}(\zeta)$ — максимальные регулярные расширения функции $\theta(\zeta)$ соответственно вверх и влево. Обозначим теперь максимальное регулярное расширение влево функции $\theta_\circ(\zeta)$ через $\theta_{\circ\mathfrak{B}}(\zeta)$, а максимальное регулярное расширение вверх функции $\theta_\mathfrak{B}(\zeta)$ через $\theta_{\mathfrak{B}\circ}(\zeta)$.

В §5 рассматривается случай, когда внутренние каналы $M_+(\Phi_0)$ и $M_+(\tilde{\Phi}_0)$ ортогональны. Пусть $M_+(\Phi_0) \perp M_+(\tilde{\Phi}_0)$. В этом случае $V_{T^*} = V_{T^*}$. Это значит, что левая дефектная функция для $\theta_{\mathfrak{G}}(\zeta)$ имеет вид

$$G_{\mathfrak{G}}(I - \zeta T_{\mathfrak{G}})^{-1} \tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} r \\ G \end{bmatrix} (I - \zeta T_{\mathfrak{G}})^{-1} \tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 T \\ G \end{bmatrix} (I - \zeta T)^{-1} \tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} \chi(\zeta) \\ \psi(\zeta) \end{bmatrix},$$

где $\chi(\zeta) = P_0 T (I - \zeta T)^{-1} \tilde{P}_0$. Следовательно

$$\theta_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}(\zeta) = \begin{bmatrix} \chi(\zeta) & \varphi(\zeta) \\ \psi(\zeta) & \theta(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Аналогично устанавливается, что в этом случае

$$\theta_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}(\zeta) = \begin{bmatrix} \chi(\zeta) & \varphi(\zeta) \\ \psi(\zeta) & \theta(\zeta) \end{bmatrix} = \theta_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}(\zeta).$$

Основным результатом диссертации является теорема 5.1:

Для того, чтобы внутренние каналы $M_+(\Phi_0)$ и $M_+(\tilde{\Phi}_0)$ были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\omega(\zeta) \in S[\Phi_0, \tilde{\Phi}_0]$, такая, что

$$\Omega(\zeta) = \begin{bmatrix} \omega(\zeta) & \varphi(\zeta) \\ \psi(\zeta) & \theta(\zeta) \end{bmatrix} \in S[\Phi_0 \oplus \mathfrak{G}, \tilde{\Phi}_0 \oplus \mathfrak{G}].$$

Если функция $\omega(\zeta)$ существует, то она единственна, при этом $\omega(\zeta) = \chi(\zeta)$, то есть в этом случае $\Omega(\zeta) = \theta_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}(\zeta)$.

Далее строятся унитарные узлы, для которых соответственно функции $\chi(\zeta)$ и $\theta_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}(\zeta) = \theta_{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}(\zeta)$ являются характеристическими.

Литература

1. Dubovoy V.K., Ramadan K. Mohammed. Defect functions of holomorphic contractive matrix functions, regular extensions and open systems. Math. Nachr. 160 (1993), P.69-110.
2. Рамадан К. Мохамед. О простоте унитарных узлов, соответствующих дефектным функциям. Харьков. 1996. — Деп. в ГНТБ Украины. 24.06.96, № 1498 - УК 1996. - С.28.

Ramadan K.Mohammed. Defect function of holomorphic contractive matrix function, regular extensions. Manuscript. The dissertation is to achieve the degree of Doctor of Philosophy in mathematics on the speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis. Kharkov State University. Kharkov. Ukraine. 1996.

The dissertation deals with operator approach to studying of defect function of holomorphic contractive function. Due to this approach criteria of orthogonality of inner channels of system and maximal properties the defect function is proved, one-to-one correspondance between regular extension above (to the left) and *-inner (inner) functions is obtained, unitary colligations which correspond defect functions are described, and then simplitaty is considered.

Key words: a gilbert space, a contraction, a unilateral shift, a unitary colligation, a characteristic function, a defect function, a regular extension, a open system.

Рамадан К.Мохамед. Дефектні функції і регулярні розширення голоморфних стискуючих матриць-функцій. Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01. — Математичний аналіз. Харківський державний університет. Харків. Україна. 1996.

Дисертація присвячена операторному підходу до вивчення дефектних функцій голоморфної стискуючої функції. Завдяки цьому підходу доведено критерій ортогональності внутрішніх каналів системи та максимальні властивості дефектних функцій, одержана взаємно однозначна відповідність між регулярними розширеннями вверх (вліво) та *-внутрішніми (внутрішніми) функціями, описані унітарні вузли, які відповідають дефектним функціям та розглянута їх простота.

Ключові слова: гільбертов простір, оператор стиску, однобічний зсув, унітарний вузол, характеристична оператор-функція, дефектна функція, регулярне розширення, відкрита система.

Handwritten text at the top of the page, possibly a date or reference number, appearing as "A.P. 22. 255".

Faint, illegible text located in the lower portion of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

А
АВ 35.922

Сдано в набор 10.10.96. Подписано к печати 15.10.96.
Формат 148 x 210. Бумага RANK XEROX.
Гарнитура TimesET. Печать высокая. Усл. печ.л.0,96.
Уч.-изд. лист 0,72 + 0,24. Тираж 100 экз. Заказ № 15.
Издательство "КиПи-РИЗО", 310166, Харьков,
пр. Ленина 17а. Тел. (0572) 45-21-33.