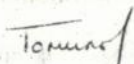


КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ТОМІЛОВ Юрій Володимирович



Асимптотична поведінка розв'язків еволюційних рівнянь у
банаховому просторі

01.01.01 — математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

517



00753867 (-)

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано в Київському університеті імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник:

- доктор фізико-математичних наук, професор Дороговцев Анатолій Якович.

Офіційні опоненти:

- доктор фізико-математичних наук, професор Горбачук Мирослав Львович,
- доктор фізико-математичних наук, професор Слюсарчук Василь Юхимович.

Провідна установа:

- Львівський державний університет ім. І.Я. Франка.

Захист відбудеться "25" листопада 1996 року о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 01.01.21 при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, м. Київ-127, пр. акад. Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотечі Київського університету імені Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано "21" жовтня 1996 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

Курченко О. О.

AB-35.924

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми.

Еволюція багатьох фізичних систем, в залежності від конкретної реалізації, може описуватись диференціальним або різницеvim рівнянням. При дослідженні поведінки таких систем на великих проміжках часу природнім чином виникає задача характеризації асимптотичних властивостей розв'язків відповідних еволюційних рівнянь. Сучасні задачі теорії контролю та обчислювальної математики, застосувань до теорій рівнянь у частинних похідних та функціонально-диференціальних рівнянь, вимагають вивчення еволюційних рівнянь у нескінченновимірних просторах. Саме цій тематиці присвячена дисертація.

Різницеvi рівняння займають важливе місце у вивченні еволюційних систем. Крім застосувань безпосередньо для опису поведінки системи, вони використовуються в багатьох ситуаціях як модель для відповідного диференціального рівняння. Починаючи з класичних робіт О.Перрона та Р.Беллмана, особлива увага приділялася дослідженню асимптотичних властивостей розв'язків різницеvих рівнянь. Зокрема, асимптотична поведінка розв'язків різницеvих рівнянь у банахових просторах вивчалася в роботах І.В. Бойкова, А.Я. Дороговцева, В.С. Кіма, І.І. Мармерштейна, Р.К. Романовського та А.М. Біberman, В.А. Щеглова, К.Кофмана і Х. Шефера, Х. Логемана, К. Пржилуцького, Г. Папаса і Д. Хірінсена, Дж. Вейса, Ф. Вірца та ін. Найбільш систематичне її дослідження було проведено В.Є.Слюсарчуком.

На жаль, теорія, що була розвинута, стосувалася переважно рівнянь, заданих на Z . Про асимптотичну поведінку розв'язків нескінченновимірних різницеvих рівнянь на $N \cup \{0\}$ було відомо дуже мало. Навіть для рівнянь вигляду

$$x_{n+1} = Ax_n + b_n, \quad n \in N \cup \{0\},$$

у банаховому просторі B , де $A \in C(B)$, у більшості відомих результатів

одержувалися тільки умови належності розв'язків до деякого банахового простору F послідовностей на $\mathbb{N} \cup \{0\}$ для будь-якого $x_0 \in \mathbb{B}$ та будь-якої $\{b_n : n \geq 0\} \in F$. В термінах спектру $\sigma(A)$ оператора A ці умови, як правило, мали вигляд:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}. \quad (1)$$

При цьому складніші типи асимптотичної поведінки майже не розглядалися, а одержувані твердження для таких і більш загальних рівнянь носили достатній характер. Так, для різницевого рівняння вигляду

$$x_{n+1} = Ax_n + Bb_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$\{A, B\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{B})$, класичного об'єкту вивчення теорії керування, більшість результатів формулюється в термінах сумісної поведінки операторів A, B , точніше сім'ї $\{A^n B : n \geq 0\}$. При цьому зв'язок між спектральними властивостями операторів A, B та асимптотичною поведінкою розв'язків залишається невивченим. Основні труднощі тут полягають в тому, що образ оператора B , $\text{Im}(B)$, є множиною першої категорії в H , якщо він не співпадає з H . Тому твердження типу принципу рівномірної обмеженості незастосовні до звужень $\{\sum_{k=0}^n A^k|_{\text{Im}(B)} : n \geq 0\}$. Деякі шляхи подолання цих труднощів запропоновані в дисертаційній роботі.

Важливою задачею в теорії різницевих рівнянь є дослідження рівнянь високого порядку як природніх узагальнень рівнянь згадуваних вище. Відзначимо, що навіть для різницевих рівнянь другого порядку, як правило, не вдається одержати спектральні критерії обмеженості розв'язків. Відомі лише достатні умови, що формулюються в термінах норм операторних коефіцієнтів. Тому знаходження типів таких рівнянь, що допускають спектральну характеристику обмеженості розв'язків, являє значний інтерес. В дисертації розглядається один з таких типів.

Велика увага в теорії еволюційних рівнянь приділяється вивченню C_0 -напівгруп. Важливе значення C_0 -напівгруп полягає, насамперед, в тому, що вони однозначно відповідають рівномірно коректній задачі Коші та описують її класичні розв'язки. Однак дослідженню асимптотичної

поведінки C_0 -напівгруп, зокрема зв'язку цієї поведінки з властивостями генератора напівгрупи, до останнього часу приділялася недостатня увага. Лише з середини 80-х років почалося інтенсивне вивчення асимптотичної, експоненціальної та інших типів стійкості C_0 -напівгруп, гіперболічності, теорем про відображення спектру та ін. Найбільш істотний вклад у розвиток цієї тематики був внесений В. Арендтом, Ш. Бетті, Дж. Вейсом, Ву Куок Фонгом, Я. Нірвеном, Ю. Латушкіним, Ф. Робігером, В. Робелем, Ф.Л. Хуангом та ін.

Завдяки широкому застосуванню перетворення Лапласа до вивчення C_0 -напівгруп особливу роль набувають інтегральні умови для різних типів їх асимптотичної поведінки. Цьому напрямку досліджень присвячені роботи Дж. Вейса, Р. Датко, А. Лебоу, В. Млака, Н.К. Нікольського, Я. ван Нірвена, А. Пазі та ін. Однією з найпоширеніших у згадуваних роботах є умова інтегровності в певному сенсі всіх орбіт C_0 -напівгрупи. В дисертації розглядаються інтегральні умови нового типу, що вимагають інтегровності лише деяких підмножин множини орбіт напівгрупи. Вивчаються інші інтегральні умови такої ж природи.

У 1984 році Я. Прюсом була одержана характеристика типу C_0 -напівгрупи у гільбертовому просторі як абсциси обмеженості резольвенти її генератора. (Такий же результат був отриманий раніше у 1979 році Л.Гірхартом для напівгруп стиску.) Ця характеристика має зручний для застосування вигляд. На жаль, в класі банахових просторів B вона перестає бути вірною. Тому природньо виділити умови на C_0 -напівгрупу або простір, в якому вона діє, для того щоб зберігти вказане вище співвідношення в більш загальному випадку. Так, у 1994 році М. Кашуком та С. Вердуйн Ланелем були введені умови інтегровності резольвенти генератора, що гарантували справедливність твердження Прюса-Гірхарта у довільному банаховому просторі і виявилися корисними при вивченні асимптотичних властивостей розв'язків диференціально-функціональних рівнянь. В дисертації показано, що для деяких банахових просторів ці умови

можна істотно спростити.

Із сказаного випливає актуальність досліджуваної теми.

Мета роботи.

Дослідити зв'язок між асимптотичною поведінкою розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі та спектральними властивостями операторних коефіцієнтів цих рівнянь. Отримати нові умови від'ємності спектральної межі генератора C_0 -напівгрупи та знайти застосування цих умов до вивчення асимптотичної поведінки C_0 -напівгруп. Дослідити зв'язок асимптотичних властивостей C_0 -напівгруп у деяких банахових просторах з геометрією цих просторів.

Методи досліджень.

Використовуються методи функціонального аналізу, зокрема, теорії банахових алгебр, теорії операторів та геометричної теорії банахових просторів.

Наукова новизна.

- Для широких класів різницевих рівнянь першого порядку у банахових просторах одержані критерії обмеженості та асимптотичної періодичності розв'язків в термінах геометричної структури спектрів операторних коефіцієнтів та їх інваріантних підпросторів. Доведена сумовність за Чезаро розв'язків цих рівнянь за умови їх обмеженості.
- Для деяких різницевих рівнянь другого порядку отримано спектральний критерій обмеженості їх розв'язків.
- Одержані нові інтегральні умови від'ємності спектральної межі генератора C_0 -напівгрупи у банаховому просторі, які узагальнюють відомі умови цього типу. Одержані також наслідки цих інтегральних умов стосовно асимптотичної поведінки певної множини орбіт напівгрупи.

- Отримано характеристизацію типу C_0 -напівгруп у деяких B -опуклих просторах, яка містить в собі відомий резольвентний опис типу таких напівгруп у гільбертових просторах та є частковим узагальненням теореми Кашука-Вердуйн Ланеля про тип напівгрупи з інтегрованою резольвентою генератора.

Теоретична і практична цінність роботи.

Одержані результати мають теоретичне значення та можуть бути використані при дослідженні конкретних фізичних систем, що описуються різницевиими рівняннями та рівняннями в частинних похідних, практичних задач теорії контролю, автоматичного регулювання.

Апробація роботи.

Результати, одержані в дисертації, доповідались на семінарах кафедри математичного аналізу Київського університету (кер. проф. А.Я. Дороговцев), семінарах з теорії рівнянь в частинних похідних інституту математики НАН України (кер. проф. М.Л. Горбачук), на міжнародній конференції, присвяченій пам'яті Г. Гана, м.Чернівці, 1994, на міжнародній конференції "Nonlinear differential equations", Київ, 1995, на другій міжнародній конференції "Difference equations and applications", Veszprem, Hungary, 1995, на міжнародній конференції "Mathematical analysis and applications", Lincöping, Sweden, 1996.

Публікації.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-6].

Структура і обсяг дисертації.

Робота складається зі вступу, чотирьох глав, висновків та списку літератури із 69 найменувань. Обсяг роботи 73 сторінки.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи.

Нехай далі \mathbb{B} — комплексний банахів простір, \mathbb{B}^* — спряжений до нього, $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ — банахів простір лінійних обмежених операторів з \mathbb{B} в \mathbb{B} . Для оператора $A \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ позначимо через A^* його спряжений, через $\sigma(A)$, $\sigma_p(A)$ його спектр та точковий спектр відповідно, через $r(A)$ його спектральний радіус та через $\rho(A)$ його резольвентну множину. Символами $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$ будемо позначати відповідно образ та ядро оператора A .

Глава 1 дисертації присвячена вивченню обмеженості та асимптотичної періодичності розв'язків різницевого рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (2)$$

у банаховому просторі \mathbb{B} , де $A \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ та $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$ — обмежена або T -періодична послідовність. Нагадаємо, що послідовність $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$ називається T -періодичною, якщо $T \in \mathbb{N}$ — найменше число, таке що $b_{n+T} = b_n$, $n \geq 0$.

§1.1 носить допоміжний характер. Він містить основні поняття та означення, необхідні для формулювання теореми Ю.І. Любича — М.Ю. Любича про відокремлення граничного спектру майже періодичних операторів.

Далі, у § 1.2 доводиться наступний критерій обмеженості розв'язків рівняння (2).

Теорема 1.1 Для того, щоб розв'язки різницевого рівняння (2) були обмеженими для будь-яких $x_0 \in \mathbb{B}$ та T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$, необхідно і достатньо, щоб

- 1) $\sup_{n \geq 0} \|A^n\| < \infty$;
- 2) $1 \in \rho(A^T)$.

За допомогою теореми 1.1 та ергодичної теореми для середніх у § 1.2 встановлюється сумовність за Чезаро розв'язків (2) при умові їх

обмеженості.

Наслідок 1.1 Якщо розв'язки $\{x_n : n \geq 0\}$ різницевого рівняння (2) обмежені в \mathbb{B} для будь-яких x_0 і T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$, то вони сумовні за Чезаро для будь-яких x_0 і T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\}$.

У § 1.3 досліджується асимптотична періодичність розв'язків рівняння (2). Нагадаємо, що розв'язок $\{x_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$ рівняння (2) називається асимптотично періодичним, якщо існує періодична послідовність $\{c_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$, така що $\|x_n - c_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Нехай $\mathbb{B}_0 := \{x \in \mathbb{B} | A^n x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$, $\sigma_{\text{per}}(A^T) = \{\lambda \in \sigma_p(A^T) | \exists n \in \mathbb{N} : \lambda^n = 1\}$, $T \in \mathbb{N}$. Тоді справедливе наступне твердження.

Теорема 1.2 Для того, щоб розв'язки різницевого рівняння (2) були асимптотично періодичними для довільного $x_0 \in \mathbb{B}$ і довільної T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{B}$, необхідно і достатньо, щоб

1) $1 \in \rho(A^T)$;

2) $\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 \oplus \mathbb{B}_T$, де $\mathbb{B}_T = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(A^T - \lambda_i I)$, $m \in \mathbb{N}$,

$\{\lambda_i : 1 \leq i \leq m\} \subset \sigma_{\text{per}}(A^T)$, якщо $\sigma_{\text{per}}(A^T) \neq \{\emptyset\}$ та $\mathbb{B}_T = \{0\}$ в інших випадках.

Доведення цього твердження базується на вже згаданій теоремі про відокремлення граничного спектру майже періодичних операторів та деяких тотожностях, що дозволяють звести дослідження розв'язків рівняння (2) до аналізу розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Також, в § 1.3 показано, що клас T -періодичних послідовностей є в певному сенсі оптимальним для отримання нетривіальних умов асимптотичної періодичності розв'язків (2). Так, якщо клас T -періодичних послідовностей замінити на клас послідовностей вигляду $\{b_n = c_n + d_n : n \geq 0\}$, де $\{c_n : n \geq 0\}$ — T -періодична послідовність, $\|d_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то необхідні і достатні умови асимптотичної періодичності розв'язків рівняння (2) будуть мати вигляд (1).

В главі 2 дисертації вивчаються різницеві рівняння вигляду

$$x_{n+1} = Ax_n + Bb_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (3)$$

у гільбертовому просторі H , де $\{A, B\} \subset \mathcal{L}(H)$ та $\{b_n : n \geq 0\} \subset H$ – обмежена або T -періодична послідовність. § 2.1 є допоміжним. В ньому наводяться деякі властивості алгебри Калкіна та пов'язаних з нею операторів. У § 2.2 досліджується обмеженість розв'язків рівняння (3) для довільних $x_0 \in H$ та обмеженої послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset H$. Пропонується вивчати “образ” рівняння (3) у фактор-алгебрі Калкіна $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)/K(H)$ ($K(H)$ – підпростір компактних операторів в $\mathcal{L}(H)$):

$$\widehat{X}_{n+1} = U_{\widehat{A}}(\widehat{X}_n) + U_{\widehat{B}_n}(\widehat{B}_n), \quad n \geq 0,$$

де $U_{\widehat{A}} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{A}\widehat{X}$, $U_{\widehat{B}} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{B}\widehat{X}$ – відповідні фактор-оператори. Якщо $\dim H = \infty$, то алгебра \mathcal{A} нетривіальна. Використовуючи властивості \mathcal{A} , вивчення рівняння (3) для певного класу операторів B зводиться до вивчення рівняння вигляду (2). Таким чином, у § 2.2 одержаний наступний результат.

Теорема 2.1 Нехай $\text{codim Im}(B) < +\infty$. Для того, щоб розв'язки різницевого рівняння (3) були обмеженими для довільних $x_0 \in H$ та обмеженої послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset H$, необхідно і достатньо, щоб існували підпростори $\{H_0, H_1\} \subset H$, інваріантні відносно A , такі що

- 1) $H = H_0 \oplus H_1$, $\dim H_1 < \infty$;
- 2) а) $r(A|_{H_0}) < 1$, б) $\text{Im}(B) \subset H_0$;
- 3) якщо $H_1 \neq \{0\}$, то $\sigma(A|_{H_1}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$, причому оператор $A|_{H_1}$ має діагональну жорданову форму.

Якщо, крім того, $AB = BA$, то умови 1) – 3) необхідні і достатні і в тому випадку, коли $\text{Im}(B)$ замкнена, $\dim \text{Ker}(B) < +\infty$.

В § 2.3 розглядається приклад, який свідчить, що твердження теореми 2.1 не поширюється на випадок оператора B з незамкненим образом.

У § 2.4 одержуються критерії обмеженості та асимптотичної періодичності розв'язків рівняння (3), які є узагальненнями теорем 1.1, 1.2 у

випадку гільбертового простору H . За допомогою оберненої ергодичної теореми Буцера-Вестфала вдається отримати включення $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A^T - I)$, яке в силу факторизаційної теореми Дугласа еквівалентне співвідношенню: $B = (A^T - I)C$ для деякого $C \in \mathcal{L}(H)$. Це дає змогу розглянути загальний випадок $B \in \mathcal{L}(H)$ та уникнути жорстких умов комутуваності операторів A, B .

Теорема 2.3 Для того, щоб розв'язки різницевого рівняння (3) були обмежені для довільного $x_0 \in H$ та довільної T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset H$, необхідно і достатньо, щоб

- 1) $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A^T - I)$;

- 2) $\sup_{n \geq 0} \|A^n\| < +\infty$.

Таким же чином, як і у главі 1, доводиться сумовність за Чезаро розв'язків рівняння (3) при умові їх обмеженості.

Наслідок 2.1 Припустимо, що розв'язки рівняння (3) обмежені для довільного x_0 та довільної T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\}$. Тоді ці розв'язки сумовні за Чезаро для довільного x_0 та довільної T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\}$.

За схемою доведення теореми 1.2 у § 2.4 одержується наступний критерій асимптотичної періодичності розв'язків рівняння (3).

Теорема 2.2 Для того, щоб розв'язки різницевого рівняння (3) були асимптотично періодичними для довільного $x_0 \in H$ і довільної T -періодичної послідовності $\{b_n : n \geq 0\} \subset H$ необхідно і достатньо, щоб

- 1) $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A^T - I)$;

- 2) $H = H_0 \oplus H_T$, де $H_T = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(A^T - \lambda_i I)$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq m\} \subset \sigma_{\text{per}}(A^T)$, якщо $\sigma_{\text{per}}(A^T) \neq \{\emptyset\}$ та $H_T = \{0\}$ в інших випадках.

В главі 3 дисертації вивчається обмеженість розв'язків різницевого рівняння другого порядку

$$X_{n+1} = A_1 X_n + X_{n-1} A_2 + B_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

у банаховому просторі $\mathcal{L}(\mathbb{B})$, де $\{A_1, A_2\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{B})$ та $\{B_n : n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{B})$ — обмежена послідовність.

Вище відзначалося, що для різницевих рівнянь високого порядку, як правило, не вдається одержати спектральні критерії обмеженості розв'язків. Рівняння (4) займає виняткове положення, що ілюструє наступна

Теорема 4.1 Для того, щоб розв'язки різницевого рівняння (4) були обмежені в $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ для довільних $X_0, X_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{B})$ та обмеженої послідовності $\{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{B})$, необхідно і достатньо, щоб

$$1) \sigma(A_2) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\},$$

$$2) \forall p \in \sigma(A_1), \forall q \in \sigma(A_2) : 1 - |q|^2 > |p + q\bar{p}|.$$

Доведення теореми 4.1 є змістом § 3.1. Воно істотно використовує структуру рівняння (4) та той факт, що простір $\mathcal{L}(\mathbb{B})$, де розглядається (4), є банаховою алгеброю. В § 3.2 вивчаються наслідки з теореми 4.1, а саме, зв'язок обмеженості розв'язків рівняння (4) з обмеженістю розв'язків рівнянь

$$X_{n+1} = A_1 X_n + A_2 X_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1,$$

в просторі $\mathcal{L}(\mathbb{B})$, та

$$x_{n+1} = A_1 x_n + A_2 x_{n-1} + b_n, \quad n \geq 1,$$

в \mathbb{B} .

У § 3.3 наводяться приклади, що ілюструють одержані в § 3.1, § 3.2 твердження.

Глава 4 дисертації присвячена дослідженню зв'язків інтегровності C_0 -напівгруп з їх асимптотичною поведінкою. У § 4.1 наводяться деякі допоміжні відомості з теорії C_0 -напівгруп. Нагадаємо, що сім'я $(T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(\mathbb{B})$ називається C_0 -напівгрупою, якщо вона задовольняє наступним умовам:

$$а) T(0) = I;$$

$$б) T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0;$$

с) функція $t \rightarrow T(t)x$ неперервна в точці 0 для будь-якого $x \in \mathbb{V}$.

Як наслідок а) - с) легко вивести

с') $T(t)x$ неперервна на \mathbb{R}^+ для будь-якого $x \in \mathbb{V}$.

Генератором C_0 -напівгрупи $(T(t))_{t \geq 0}$ називається оператор A , заданий рівністю

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

з областю визначення $D(A) = \{x \in \mathbb{V} \mid \exists \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t}\}$.

Позначимо через $\omega_0 := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}$ - тип напівгрупи $(T(t))_{t \geq 0}$, та через $s(A) := \sup\{\operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ - спектральну межу її генератора A .

У § 4.2 доводяться узагальнення відомих інтегральних умов від'ємності спектральної межі генератора C_0 -напівгрупи, що належать Дж. Вейсу і Я. Нірвену, С. Штраубу та Л. Вейсу.

Нехай $C^\infty(A) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$, $C^\infty(A^*) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^{*n})$ - простори нескінченно диференційовних векторів операторів A та A^* відповідно. Відзначимо, що множини $C^\infty(A)$, $C^\infty(A^*)$ є ненульовими. Позначимо через $R(\lambda, A)$ резольвенту оператора A . Справедливі наступні твердження.

Теорема 4.1 Припустимо, що для довільного $x \in C^\infty(A)$ та довільного $x^* \in C^\infty(A^*)$:

$$\int_0^{\infty} |(T(t)x, x^*)| dt < +\infty.$$

Тоді:

$$s(A) < 0.$$

Теорема 4.2 Припустимо, що

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A);$$

для довільного $x \in C^\infty(A)$ і довільного $x^* \in C^\infty(A^*)$:

$$\sup_{s>0} \int_{-\infty}^{\infty} |(R(s+it, A)x, x^*)| dt < +\infty.$$

Тоді

$$s(A) < 0.$$

В доведенні теорем 4.1, 4.2 основну роль відіграє специфічна будова просторів нескінченно диференційовних векторів. Також використовуються теорія перетворення Гельфанда для C_0 -напівгруп та деякі властивості спряжених напівгруп. Також, у § 4.2 доводиться наступне твердження, що є $C^\infty(A)$ -варіантом відомої теореми Пазі.

Теорема 4.3 Нехай для довільного $x \in C^\infty(A)$:

$$\int_0^{\infty} \|T(t)x\|^p dt < +\infty, \quad p \in [1, +\infty).$$

Тоді

$$s(A) < 0.$$

Відзначимо, що існує широкий клас C_0 -напівгруп (диференційовні, компактні), що задовольняють рівність $\omega_0 = s(A)$. Для таких напівгруп теореми 4.1, 4.2 дають умови рівномірної стійкості.

Далі, використовуючи недавно операторну тауберову теорему Ш. Бетті, у § 4.2 одержується важливий наслідок з теорем 4.1, 4.2 стосовно асимптотичної поведінки $(T(t))_{t \geq 0}$.

Наслідок 4.2 За умов теореми 4.1 або 4.2 існує $m_0 \in \mathbb{N}$, таке що

$$\|T(t)R^{m_0}(\lambda_0, A)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

для деякого $\lambda_0 \in \rho(A)$.

Таким чином, інтегральні умови теорем 4.1, 4.2 забезпечують рівномірну стійкість "достатньо гладких" орбіт C_0 -напівгрупи.

В § 4.3 наводяться приклади, що показують незворотність тверджень теорем 4.1, 4.2.

§ 4.4 присвячений характеристиці типу C_0 -напівгруп у деяких B -опуклих банахових просторах. За Ж. Бурженом, B -опуклі простори можуть бути описані наступним чином. Нехай \mathbf{B} — комплексний банахів простір. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) $\mathbf{B} \in B$ -опуклим простором.

2) для будь-якої скінченної множини M з \mathbb{Z} і будь-якої послідовності $\{x_k : k \in M\} \subset \mathbb{B}$:

$$C_2 \left(\sum_{k \in M} \|x_k\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\int_0^{2\pi} \left\| \sum_{k \in M} e^{ikt} x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 \left(\sum_{k \in M} \|x_k\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}, \quad (5)$$

де $p_1 > 1$, p_2 , C_1 , C_2 — деякі додатні сталі.

Верхня межа $p(\mathbb{B})$ тих p_1 , для яких виконується нерівність (4), називається типом B -опуклого простору \mathbb{B} .

Накладаючи додаткові умови на B -опуклий простір \mathbb{B} , в § 4.4 одержується часткове узагальнення теореми Кашука-Вердуйн Ланеля про тип напівгрупи з інтегрованою резольвентою генератора.

Теорема 4.4 Нехай $\mathbb{B} \in B$ -опуклим простором з типом $p(\mathbb{B})$. Припустимо, що існує $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > \omega_0$ таке, що для деякого $p \in (1, p(\mathbb{B})]$ і для довільного $x \in X$ інтеграл

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \|R(\xi, A)x\|^p d\xi$$

збігається. Тоді

$$\omega_0 = \inf\{\omega > s(A) : R(\xi, A) \text{ обмежена на } \operatorname{Re} \xi \geq \omega\}.$$

Доведення використовує підхід, в якому на основі нерівності (5) застосовується апарат рядів Фур'є до дослідження векторних функцій зі значеннями в \mathbb{B} .

Автор висловлює ширю подяку своєму науковому керівникові, професору А.Я. Дороговцеву за плідні співбесіди та постійну увагу до роботи.

ПІДСУМКОВІ ВИСНОВКИ

- Одержані спектральні критерії обмеженості та асимптотичної періодичності розв'язків для широких класів операторних різницевих рівнянь першого порядку.
- Отримано спектральний критерій обмеженості розв'язків деяких операторних різницевих рівнянь другого порядку.
- Одержані нові інтегральні умови від'ємності спектральної межі генератора C_0 -напівгрупи у банаховому просторі, досліджені їх застосування до вивчення асимптотичної поведінки C_0 -напівгруп.
- Отримано резольвентну характеристизацію типу C_0 -напівгруп у деяких банахових просторах.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Томилов Ю.В. Асимптотическое поведение одной рекуррентной последовательности в банаховом пространстве // Сб. науч. трудов "Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений". – Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1992. – С. 146–153.
2. Томилов Ю.В. Об асимптотическом поведении последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями, в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1994. – 16, №5. – С. 633–641.
3. Томилов Ю.В. Об асимптотическом поведении некоторых рекуррентных последовательностей в гильбертовом пространстве // Тези Міжнародної математичної конференції пам'яті Ганса Гана. Чернівці. – 1994. – С. 146.
4. Томилов Ю.В. Об асимптотическом поведении некоторых бесконечномерных рекуррентных последовательностей // Укр. мат. журн. – 1995. – 17, №1. – С. 133–137.
5. Tomilov Yu.V. On local and global asymptotic properties of C_0 -semigroups // Abstracts of conference "Aspects of Spectral Theory". Vienna, Austria. – 1996. – P. 38.
6. Tomilov Yu.V. On asymptotic behavior of C_0 -semigroups // Conference on mathematical analysis and applications, Abstracts. – Lincöping, Sweden. – 1996. – P. 87.

Томілов Ю.В., Асимптотическе поведение решений эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. Киевский университет имени Тараса Шевченка, Киев, 1996.

В диссертации исследуется асимптотическое поведение решений некоторых эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Для широких классов разностных уравнений в банаховых пространствах получены критерии ограниченности и асимптотической периодичности решений в терминах структуры спектров и инвариантных подпространств их операторных коэффициентов. Найдены новые условия отрицательности спектральной грани генератора C_0 -полугруппы, изучены применения этих условий к исследованию асимптотического поведения таких полугрупп. Получена характеристика типа C_0 -полугрупп в некоторых B -выпуклых банаховых пространствах.

Tomilov Yu. V., The asymptotic behavior of solutions to evolutionary equations in a Banach space.

Manuscript. Thesis of dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01—mathematical analysis. Kiev Taras Shevchenko university, Kyiv, 1996.

There are investigated the asymptotic behavior of solutions to some evolutionary equations in a Banach space. For wide classes of difference equations there were obtained the criterias for boundedness and asymptotic periodicity of solutions in terms of the spectra and the invariant subspaces structure of their operator coefficients. The new conditions for the negativeness of the spectral bound of generator of C_0 -semigroup were established, the applications of this conditions to the investigation of such the semigroups have been studied. The characterization of the type of C_0 -semigroup in some B -convex spaces was obtained.

Ключові слова: різницеве рівняння, банахів простір, оператор, спектр, C_0 напівгрупа, нескінченно диференційовні вектори, резольвента, B -опуклий простір.

Підп. до друку 15.10.96. Формат 60 × 84^{1/16}.
Папір друк. № 1 . Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,84 .
Умовн. фарбо-відб. 0,25 . Обл.-вид. арк. 1,0 .
Тираж 100 . Зам. № 6-3640 .

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

141009

^

A

AB 35.924