Національно-технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

На правах рукопису

УДК 539.3

ЮРКОВ Віктор Миколайович

# ЕНЕРГЕТИЧНА ТЕОРІЯ ТА МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ТРІЩИН В ОБОЛОНКАХ

05.02.07 — механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
НАЗАРЕНКО В. М.,

доктор технічних наук, професор
САХАРОВ О. С.,

доктор технічних наук КІР'ЯН В. І.

Провідна установа: Фізико-механічний інститут
ім. Г. В. Карпенка НАН України.

Захист відбудеться «09» грудня 1996 р. о 15.00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.02.18 при Національно-технічному університеті України «КПІ» за адресою:

252056 Київ 56, проспект Перемоги, 37, аудиторія № 166.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національно-технічного університету України «КПІ».

Автореферат розісланий «05» листопада 1996 р.



Учений секретар
спеціалізованої вченої ради БОРОНКО О. О.

Актуальність теми. Відомо, що тонкостінні конструкції в вигляді оболонок, маючі широке застосування в багатьох галузях народного господарства нашої країни, містять мікродефекти. В процесі експлуатації оболонок вони спонтанно, або під дією різноманітного роду зовнішніх факторів, розвиваючись коаліс-ціюють і трансформуються в макродефекти типу тріщин. В залежності від довжини тріщини, навантаження і зовнішніх умов вона справляє домінуючий вплив на вичерпання несучої спроможності тієї чи іншої оболонки, і є основною причиною, яка приводить до локального або повного руйнування. В зв"язку з цим, актуальними проблемами теоретичної механіки руйнування оболоночних конструкцій, вміщуючих дефекти типу тріщин, є створювання фізичних та математичних моделей і їх методів розрахунку. Ці моделі і методи повинні адекватно відображати фізико-механічний процес, діючий при поширенні тріщини. Проблема створювання адекватних моделей і методів розрахунку напружено-деформованого стану оболонок з тріщинами, яким властиві складна геометрична форма, структура матеріалів, нелінійність, велика розмірність, розрізненні зовнішні дії, неможливість одержання замкнутих аналітичних розв"язків, уявляє собою до цього часу нерозв"язну задачу. Усе це і обусловлює інтенсивне вивчення, утворення і розробку прийнятих математичних моделей оболонок, вміщуючих скрізні тріщини, а також ефективних наближенних методів їх розрахунку.

Мета дисертаційної праці - утворення основи неукової бази для чисельного розв"язку крайових задач статики довільних оболонок, вміщуючих тріщини-розрізи.

Для здійснення цієї мети необхідно слідуюче:

- побудувати уточнену нелінійну теорію пологих анізотропних шарових оболонок з тріщинами-розрізами;

- сформулювати варіаційну постановку крайових задач статики довільних оболонок з тріщинами-розрізами;

- розробити єдиний і простий підхід до розв"язку лінійних та нелінійних крайових задач механіки тріщин в оболонках;

- розробити наближенні методи, які дозволяють обчислювати коефіцієнти інтенсивності напружень довільних оболонок з тріщинами-розрізами;

- розвити теорії Гріффітса та Ірвіна на лінійні та нелінійні крайові задачі статики некласичної механіки оболонок з тріщинами-розрізами;

- застосувати МСЕ і МГЕ до чисельного розрахунку лінійних та нелінійних задач механіки оболонок, вміщуючих двухмірні та трьохмірні тріщини-розрізи;

- розв"язати нові задачі теорії тріщин в оболонках та зробити аналіз отриманих розв"язків.

Наукова новина і практична цінність дисертації.

Запропонована та розроблена енергетична теорія і застосовані методи чисельного розрахунку податливих на зсув жорстких і гнучких фізично лінійних та нелінійних ізотропних, трансверсально-ізотропних і ортотропних одношарових і багатошарових пологих та непологих оболонок, вміщуючих двухмірні та трьохмірні тріщини-розрізи, береги яких можуть контактвати і не контактувати. Ця робота представляє собою основу нового наукового напрямку у області чисельного розв"язування варіаційних крайових задач статики довільних оболонок, вміщуючих дефекти типу тріщин.

На чисельних експериментах показано, що для чисельного розрахунку двумірних оболонок з розрізами застосован МСЕ, а для трьохмірних задач теорії тріщин можна використовувати спосіб, який базується на комбінації МСЕ і МГЕ. Рекомендується при виборі методів розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень ураховувати їх загальність, ефективність, універсальність, доступність і простоту при розумінні, якими володіють запропоновані енергетичні методи. Ці методи дозволили чисельно розв"язати практичну задачу розрахунку оболонки з тріщиною-розрізом. Результати подані у вигляді графіків і таблиць, ілюструють широкі можливості запропонованної теорії і її чисельної реалізації. Поданий якісний і кількістний аналіз напруженного стану біля тріщин-розрізів в оболонках.

Таким чином, дисертаційна робота є основою наукової бази для чисельних досліджень напруженно-деформованного стану довільних оболонок з тріщинами-розрізами, що і являє собою принципову новину.

Впровадження результатів. Запропонована теорія і чисельні результати, одержані в дисертаційній роботі по визначенню основної характеристики сінгулярного поля напружень біля вершини тріщини-розрізу, розташованих в оболонці, знайшли практичне застосування в ДКТБ ІПМ НАН України.

Апробація роботи. Дисертаційна робота доповідалась: в Інституті проблем міцності НАН України, НДІАСБ Держбуду України, НТУУ "КПІ", Фізико-механічному Інституті НАН У, ІМ НАН України у 1995/96.

Публікації. На тему дисертації опубліковано п"ять наукових робіт.

Структура і об"єм праці. Дисертаційна робота складається із вступу, п"яти розділів, висновку, списку літератури, який має

149 примірників, додатку і списку літератури 25 примірників до додатку. Об"єм складає 175 сторінок машинописного тексту, у тому числі 23 рисунки, 9 таблиць.

Зміст праці

Аналітичні дослідження, використовуючі описання напруженно-деформованного стану оболонок з тріщинами при допомозі лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, викладені в працях Е.Фоліаса, Д.Сі, Г.Ердогана, В.В.Панасюка, В.І.Мосаковського, В.О.Осадчука, М.П.Саврука, С.Я.Яреми, Б.О.Кудрявцева, Г.П.Черепанова, М.Л.Фільштінського та ін. Ці дослідження відносяться до найпростіших окремих задач теорії тріщин в оболонках, використовуючих складніший математичний апарат, який в багатьох випадках не є ефективним, а для складних задач не має можливості його застосувати.

Вперше в цій роботі подан чисельний аналіз варіаційних задач механіки тріщин в оболонках, ураховуючий не тільки лінійні, а й нелінійні двухмірні та трьохмірні ефекти. Ці ефекти мають вплив на амплітуду коефіцієнта інтенсивності напружень, який повністю характеризує сінгулярне поле напружень біля вершини тріщини. В реферируємій праці ілюструються метод піддатливості і метод віртуального росту тріщини, які запропоновані для чисельного дослідження концентрації напружень біля тріщин в довільних оболонках. Оболонки знаходяться під дією як поверхневих навантажень, так і навантажених одночасно розтягуючими і поверхневими силами.

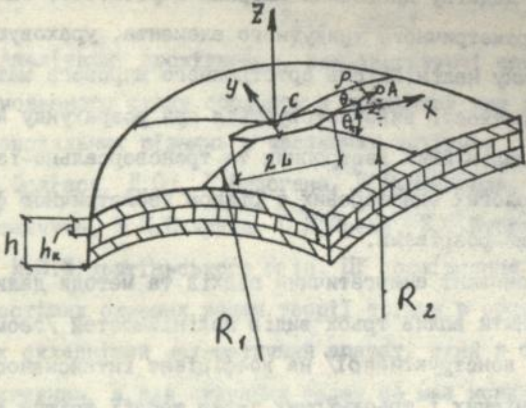
Для розрахунку оболонок з розрізами використовується модель С.П.Тимошенко в геометрично нелінійній постановці. Ця модель застосовується при аналізі полів напружень біля тріщин-розрізів в гнучких фізично нелінійних оболонках, а також є базою при вилучені коефіцієнтів інтенсивності напружень для лінійних та нелінійних трьохмірних задач теорії тріщин в оболонках.

Запропоновані методи реалізуються чисельним шляхом за допомогою МСЕ і МГЕ. В додатку приведена матриця жорсткості, яка виведена для суперпараметричного трикутного елемента, ураховуючи геометричну і фізичну нелінійність ортотропного шарового матеріалу. Ця матриця жорсткості використовується при розрахунку МСЕ як лінійних, так і нелінійних ізотропних та трансверсально-ізотропних пологих та непологих одношарових з різною геометричною формою оболонок з тріщинами-розрізами.

Вперше запропоновані енергетичний підхід та методи дали змогу чисельно оцінити вплив трьох видів нелінійностей /геометричної, фізичної і конструктивної/ на коефіцієнт інтенсивності напружень для двухмірних і трьохмірних задач теорії тріщин в оболонках.

В першому розділі дисертаційної роботи сформульована варіаційна постановка крайових задач геометрично нелінійної некласичної теорії оболонок з тріщинами-розрізами. Подано вивід усіх співвідношень теорії оболонок, які містяться в варіаційному рівнянні у вигляді рівнянь Ейлера. Запропонован енергетичний підхід, метод піддатливості і метод віртуального росту тріщин, а також викладен розвиток теорій Гріффітса та Ірвіна на геометрично нелінійну та лінійну некласичну теорію оболонок з тріщинами-розрізами.

Розглянемо довільну ортотропну пологу оболонку, вміщуючу вздовж лінії найменшого опору тріщину-розріз довжиною $2L$. Віднесемо декартову прямокутну систему координат $X$, $Y$ і $Z$ до серединної поверхні оболонки так, щоб її початок знаходився в центрі розрізу, а осі зівпадали з лініями перетину площин пружної симетрії всіх шарів. Частину цієї оболонки показано на мал. I.




Мал. I

Необхідні рівняння, співвідношення і крайові умови на зовнішнім контурі оболонки і на внутрішнім контурі, який обмежує поверхню тріщини-розріза, одержимо на основі функціонала геометрично нелінійної теорії оболонок, при $\theta_1 = 0$:

$$V = \iint\limits_S \{W_0 - [e_x - (u_{,x} + z_{,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2)]N_x -$$

$$-[e_y - (v_{,y} + z_{,y} w_{,y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2)]N_y - [2e_{xy} - (u_{,y} +$$

$$+ v_{,x} + z_{,y} w_{,x} + z_{,x} w_{,y} + w_{,x} w_{,y}]N_{xy} + (\varkappa_x - \varphi_{,x})M_x +$$

$$+(\varkappa_y - \psi_{,y})M_y + (2\varkappa_{xy} - \varphi_{,y} - \psi_{,x})M_{xy} +$$

$$+(\gamma_{xz}-\varphi-w_{,x})Q_x+(\gamma_{yz}-\psi-w_{,y})Q_y-$$

$$-(q_x u+q_y v+q_n w+m_x\psi+m_y\varphi)\}\,dx\,dy-$$

$$-\int_{\Gamma_1}(N_t^0 u+N_{st}^0 v+Q_t^0 w+M_t^0\varphi+M_{st}^0\psi)\,d\Gamma-\int_{\Gamma_2}[(u-u^0)N_t+$$

$$+(v-v^0)N_{st}+(w-w^0)Q_t+(\varphi-\varphi^0)M_t+(\psi-\psi^0)M_{st}]\,d\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma_3}(N_t^1 u+N_{st}^1 v+Q_t^1 w+M_t^1\varphi+M_{st}^1\psi)\,d\Gamma_t+\int_{\Gamma_4}[(u-u^1)N_t+$$

$$+(v-v^1)N_{st}+(w-w^1)Q_t+(\varphi-\varphi^1)M_t+(\psi-\psi^1)M_{st}]\,d\Gamma_t, \qquad (1)$$

де $W_0(A_{ij}, D_{ij}, u, v, w, \varphi, \psi, x, y)$ - дефінітний пружний потенціал Гріна анізотропної шарової оболонки, який є функцією $A_{ij}$ - мембранних і $D_{ij}$ - згинних жорсткістів; $u$, $v$, $w$, $\varphi$, $\psi$ - та кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки в площинах $XZ$ і $YZ$; $N_x, N_{xy}, Q_x, M_x, M_{xy}$ - інтегральні силові фактори: сили та моменти діючі в нормальному перерізі $x=const$; $N_y, N_{yx}, Q_y, M_y, M_{yx}$ - також в перерізі $y=const$; ці силові фактори визначаються слідуючими відношеннями

$$(N_x, N_{xy}, Q_x)=\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}(\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz})\,dz,$$

$$(N_y, N_{yx}, Q_y)=\sum_{k=1}^{m}\int_{h_{k-1}}^{h_k}(\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz})\,dz,$$

$$(M_x, M_{xy}) = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_x, \tau_{xy}) z\, dz,$$

$$(M_y, M_{yx}) = \sum_{k=1}^{m} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\sigma_y, \tau_{yx}) z\, dz,$$

де $h_k$ - товщина $k$ -го шару; $m$ - кількість шарів, $\sigma_x, \sigma_y$ та $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ - нормальні та дотичні напруження, діючі в площинах, та поперечні дотичні напруження елемента оболонки; в роботі прийнято, що $N_{xy} = N_{yx}$ та $M_{xy} = M_{yx}$ ; $e_x, e_y, e_{xy}$ - деформації серединної поверхні оболонки в напрямку відповідних осів; $Z_{,x}$ та $Z_{,y}$ - кути нахилу дотичних до серединної поверхні оболонки в напрямку осів $X$ та $y$ , описуваних рівнянням $Z(X, y)$ ; $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y$ - змінність кривин нормальних перерізів в напрямку відповідних осів; $\mathcal{H}_{xy}$ - зміна кривини при кручінні нормалі до серединної поверхні; $\gamma_{xz}$ та $\gamma_{yz}$ - поперечні зсуви в площинах $XZ$ та $YZ$ ; $K_1 = \frac{1}{R_1}, K_2 = \frac{1}{R_2}$ - кривини поверхні оболонки; $\bar{q} = q_x \bar{e}_x + q_y \bar{e}_y + q_n \bar{e}_n$ та $\bar{m} = m_x \bar{e}_x + m_y \bar{e}_y$ - вектори зовнішніх силових факторів: сил та моментів, $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$ та $\bar{e}_n$ - орти координатної системи; кома обозначає диференціювання по відповідній координаті; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , де $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ - частини зовнішнього контуру; $N_t^0, N_{st}^0, Q_t^0, M_t^0, M_{st}^0$ та $u^0, v^0, w^0, \varphi^0, \psi^0$ - узагальнені зусилля та переміщення, які заданні на зовнішньому контурі; $S$ - поверхня оболонки; $\Gamma_t = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ - контур тріщини-розріза; $N_x^1, N_{xy}^1, Q_x^1$ та $M_x^1, M_{xy}^1$ - узагальненні зусилля та моменти, діючі на поверхні розрізу; $u^1, v^1, w^1, \varphi^1, \psi^1$ - зміщення та кути повороту, які задані на поверхні розрізу.

В роботі використовується підхід, базуючийся на потенціальній енергії оболонки, а тому в функціоналі енергії [1] залишаємо інтеграл по контуру $\Gamma_3$ .

Варіруя функціонал (I) по усіх незалежних аргументах та ураховуючи варіаційне рівняння $\delta V = 0$, яке виражає умови стаціонарності функціонала, а також групуючи коефіцієнти при одноіменних варіаціях, маємо

$$0=\iint_S\{[e_x-(u_{,x}+z_{,x}w_{,x}+\tfrac{1}{2}w_{,x}^2)]\delta N_x+[e_y-(v_{,y}+z_{,y}w_{,y}+\tfrac{1}{2}w_{,y}^2)]\delta N_y+$$
$$+[2e_{xy}-(u_{,y}+v_{,x}+z_{,y}w_{,x}+z_{,x}w_{,y}+w_{,x}w_{,y})]\delta N_{xy}+(\varkappa_x-\varphi_{,x})\delta M_x+$$
$$+(\varkappa_y-\psi_{,y})\delta M_y+(2\varkappa_{xy}-\varphi_{,y}-\psi_{,x})\delta M_{xy}+(\gamma_{xz}-\varphi-w_{,x})\delta Q_x+$$
$$+(\gamma_{yz}-\psi-w_{,y})\delta Q_y-[(N_x-\frac{\partial W_0}{\partial e_x})\delta e_x+(N_y-\frac{\partial W_0}{\partial e_y})\delta e_y+$$
$$+(N_{xy}-\frac{\partial W_0}{\partial e_{xy}})\delta e_{xy}+(M_x-\frac{\partial W_0}{\partial \varkappa_x})\delta\varkappa_x+(M_y-\frac{\partial W_0}{\partial \varkappa_y})\delta\varkappa_y+$$
$$+(M_{xy}-\frac{\partial W_0}{\partial \varkappa_{xy}})\delta\varkappa_{xy}+(Q_x-\frac{\partial W_0}{\partial \gamma_{xz}})\delta\gamma_{xz}+(Q_y-\frac{\partial W_0}{\partial \gamma_{yz}})\delta\gamma_{yz}-$$
$$-[(N_{x,x}+N_{xy,y}+q_x)\delta u+(N_{y,y}+N_{xy,x}+q_y)\delta v+(Q_{x,x}+$$
$$+Q_{y,y}-(K_1+w_{,xx})N_x-(K_2+w_{,yy})N_y-2w_{,xy}N_{xy}+q_n)\delta w+$$
$$+(M_{x,x}+M_{xy,y}-Q_x+m_x)\delta\gamma_{xz}+(M_{y,y}+M_{xy,x}-Q_y+m_y)\delta\gamma_{yz}]\}dxdy-$$
$$-\int_{\Gamma_1}[(N_t-N_t^\circ)\delta u+(N_{st}-N_{st}^\circ)\delta v+(Q_t-Q_t^\circ)\delta w+(M_t-M_t^\circ)\delta\varphi_t+$$
$$+(M_{st}-M_{st}^\circ)\delta\psi_s]d\Gamma-\int_{\Gamma_2}[(u-u^\circ)\delta N_t+(v-v^\circ)\delta N_{st}+(w-w^\circ)\delta Q_t+$$

$$+(\varphi-\varphi^{\circ})\delta M_t+(\psi-\psi^{\circ})\delta M_{st}]d\Gamma-\int_{\Gamma_t}[(N_t-N_t^1)\delta e_1+(N_{st}-N_{st}^1)\delta\vartheta+$$
$$+(Q_t-Q_t^1)\delta w+(M_t-M_t^1)\delta\varphi-(M_{st}-M_{st}^1)\delta\psi]\,d\Gamma_t. \qquad (2)$$

Варіаційне рівняння (2) має місце тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при варіаціях дорівнюють нулю, т.т. у якості рівнянь Ейлера утримуються:

геометричні співвідношення для деформацій

$$e_x=u_{,x}+z_{,x}w_{,x}+\frac{1}{2}w_{,x}^2, \quad e_y=\vartheta_{,y}+z_{,y}w_{,y}+\frac{1}{2}w_{,y}^2,$$

$$2e_{xy}=u_{,y}+\vartheta_{,x}+z_{,x}w_{,y}+z_{,y}w_{,x}+w_{,x}w_{,y},$$

$$\varkappa_x=\varphi_{,x}, \; \varkappa_y=\psi_{,y}, \; 2\varkappa_{xy}=\varphi_{,y}+\psi_{,x},$$

$$\gamma_{xz}=\varphi+w_{,x}, \; \gamma_{yz}=\psi+w_{,y} \qquad (3)$$

статичні рівняння рівноваги

$$N_{x,x}+N_{xy,y}+q_x=0, \; N_{y,y}+N_{xy,x}+q_y=0,$$

$$Q_{x,x}+Q_{y,y}-N_x(k_1-w_{,xx})-N_y(k_2-w_{,yy})-2N_{xy}w_{,xy}+q_n=0,$$

$$M_{x,x}+M_{xy,y}-Q_x+m_x=0, \; M_{y,y}+M_{xy,x}-Q_y+m_y=0 \qquad (4)$$

фізичні співвідношення пружності

$$N_x=\frac{\partial W_0}{\partial e_x}, \; N_y=\frac{\partial W_0}{\partial e_y}, \; N_{xy}=\frac{\partial W_0}{\partial e_{xy}},$$

$$M_x=\frac{\partial W_0}{\partial \varkappa_x}, \quad M_y=\frac{\partial W_0}{\partial \varkappa_y}, \quad M_{xy}=\frac{\partial W_0}{\partial \varkappa_{xy}},$$

$$Q_x=\frac{\partial W_0}{\partial \gamma_{xz}}, \quad Q_y=\frac{\partial W_0}{\partial \gamma_{yz}} \qquad (5)$$

для лінійних та нелінійних задач, розглянутих в цій роботі, співвідношення (5), виходячи з пружного потенціалу сил, відомого з літератури, наприклад, з робіт Б.Л.Пелеха, можна одержати відношення пружності, які мають вигляд

$$N_x=A_{ii}e_x+A_{ij}e_y, \quad N_y=A_{ij}e_x+A_{jj}e_y,$$

$$N_{xy}=A_{kk}e_{xy},$$

$$M_x=D_{ii}\varkappa_x+D_{ij}\varkappa_y, \quad M_y=D_{ij}\varkappa_x+D_{jj}\varkappa_y,$$

$$M_{xy}=2D_{kk}\varkappa_{xy},$$

$$Q_x=k'_x A_{ss}\gamma_{xz}, \quad Q_y=k'_y A_{tt}\gamma_{yz}, \qquad (6)$$

де, згідно робіт С.А.Амбарцумяна

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{k} h_k, \quad D_{ij}=\sum_{k=1}^{m} B_{ij}^{k} h_k^3/12,$$

$$A_{ss}=\sum_{k=1}^{m} B_{ss} h_k, \quad A_{tt}=\sum_{k=1}^{m} B_{tt} h_k,$$

$$(i,j=1,2,6;\ s,t=4,5)$$

де $h=\sum_{k=1}^{m} h_k$ - товщина оболонки; коефіцієнти $B_{ij}^k$ мають вигляд для к-го шару

$$B_{11}^k=\frac{a_{22}^k}{T},\quad B_{22}^k=\frac{a_{11}^k}{T},\quad B_{12}^k=-\frac{a_{12}^k}{T},\quad B_{66}^k=\frac{1}{a_{66}^k},$$

$$B_{55}^k=\frac{1}{a_{55}^k},\quad B_{44}^k=\frac{1}{a_{44}^k},\quad T=a_{11}^k a_{22}^k-(a_{12}^k)^2,$$

$$a_{11}^k=\frac{1}{E_x^k},\quad a_{22}^k=\frac{1}{E_y^k},\quad a_{12}^k=-\frac{\nu_{xy}^k}{E_x^k}=-\frac{\nu_{yx}^k}{E_y^k},$$

$$a_{66}^k=\frac{1}{\mu_{xy}^k},\quad a_{55}^k=\frac{1}{\mu_{xz}^k},\quad a_{44}^k=\frac{1}{\mu_{yz}^k}$$

тут $E_y^k$, $E_x^k$ та $\mu_{xy}^k$, $\mu_{xz}^k$, $\mu_{yz}^k$ - модулі пружності першого та другого роду; $\nu_{xy}^k$ - коефіцієнт Пуассона, характеризуючий поперечне розтягування (стиск) у напрямку осі $X$ при стиску ( розтягу) у напрямку осі $Y$. Таким чином одержані фізичні співвідношення для одношарових і багатошарових ізотропних та трансверсально-ізотропних оболонок з тріщинами-розрізами.

Статичні граничні умови на участку $\Gamma_1$ зовнішнього контуру оболонки

$$N_t=N_t^0,\ N_{st}=N_{st}^0,\ Q_t=Q_t^0,\ M_t=M_t^0,\ M_{st}=M_{st}^0. \qquad (7)$$

Кінематичні граничні умови на участку $\Gamma_2$ зовнішнього контуру оболонки

$$u=u^0,\ \vartheta=\vartheta^0,\ w=w^0,\ \varphi=\varphi^0,\ \psi=\psi^0. \qquad (8)$$

Граничні умови на зовнішньому контурі оболонки з розрізом можуть задаватись у змішаному варіанті за допомогою ( 7) та ( 8).

Статичні граничні умови на участку $\Gamma_t$ внутрішнього контуру оболонки, т.т. тріщині-розрізі

$$N_t = N_t^1,\ N_{st} = N_{st}^1,\ Q_t = Q_t^1,\ M_t = M_t^1,\ M_{st} = M_{st}^1 . \qquad (9)$$

Задача теорії тріщин в оболонках з умовами (9) не має рішення. У зв"язку з цим, ураховуючи математично ідеалізовану модель оболонки з тріщиною-розрізом, приблизно можна прийняти, що діюче поверхневе рівномірно розподільне навантаження не розташовано на контурі, обмежуючий розріз, а знаходиться в безпосередній близкості від нього. Це дозволяє задовільнити основній вимозі, щоб головний вектор зусиль, діючих на поверхні розрізу, дорівнював нулю. Таким чином, умови (9) повинні бути однорідні

$$N_t = 0,\ N_{st} = 0,\ Q_t = 0,\ M_t = 0,\ M_{st} = 0, \qquad (\mathrm{I0})$$

а цю крайову задачу можна рішити. Для вирішення цих задач можна використати підхід, який оснований на рішенні системи нелінійних диференціальних рівнянь, одержанних при підстановці співвідношень (3) в (6), а потім в (4) задовольняя граничні умови (7), (8) та умови (I0). Ця замкнута система, виражена в переміщенні, дуже складна і на цей час замкнених як і приблизних рішень немає. В цій роботі запропонован простий шлях для її вирішення. Для цього сформулюемо варіаційну постановку крайових задач теорії оболонок, вміщуючих тріщини-розрізи.

Варіаційна постановка крайових задач теорії оболонок з тріщинами-розрізами полягає в слідуючом: визначити мінімальне значення функціоналу $V = W - \iint\limits_S (\bar{q}\bar{\tau} + \bar{m}\bar{\gamma})\,ds$, де $\bar{\tau}$ - вектор переміщень; $\bar{\gamma}$ - вектор кутів повороту; який виражає потенціальну енергію пружньої деформації, оболонки з розрізом, виходячи із умов, що перша варіація $\delta V \geqslant 0$ по усіх незалежних аргументах, які задовольняють умовам на контурі оболонки (7), (8) та граничним умовам на поверхні розрізу $|x| \leq l$ при $y=0$ ( I0). Так як зона збурення мала в порівнянні з областю, яку займає оболонка, то необхідно забезпечити виконання умов на "нескінченності"

$$u|_{\rho \to \infty} \to 0, \quad v|_{\rho \to \infty} \to 0,$$
$$w|_{\rho \to \infty} \to 0, \quad \varphi|_{\rho \to \infty} \to 0, \quad \psi|_{\rho \to \infty} \to 0, \qquad (\text{II})$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань від вершини розріза.

Існуючі підходи до розв"язання крайових задач теорії тріщин в оболонках дають змогу рішати ці задачі в два етапи: перший - обчислюються значення крайових умов, діючих на поверхні тріщини; другий - опреділяється поле локальних напружень біля тріщини. На першому етапі вирішується задача обмеженної оболонки без тріщини, а на другому - для нескінченної області з тріщиною.

Новий підхід, який запропонований у цій роботі не потребує двох етапів, а достатньо одного етапу, що являється суттєвою перевагою у виборі підходів. Однією з переваг нового підходу в порівненні з існуючим є те, що новий підхід базується на варіаційних методах, а їх переваги загальновідомі.

Самим плодотворним підходом з точки зору механіки руйнування оболонок з тріщинами-розрізами є такий підхід, який використовує коефіцієнт інтенсивності напружень. Для його обчислення в цій роботі запропоновані і розроблені енергетичні методи - метод піддатливості і метод віртуального росту тріщини.

Метод піддатливості. Як для лінійних, так і для геометрично нелінійних задач теорії тріщин в оболонках, потенціальну енергію, опреділяємо згідно теореми Клапейрона

$$V=\frac{1}{2}\iint\limits_{S}(\bar{q}\,\bar{z}+\bar{m}\,\bar{\gamma})(1\pm K_1 h/2)(1\pm K_2 h/2), \quad (12)$$

де $K_i=1/R_i\ (i=1,2)$ - нормальні головні кривини. При цьому повинні задовольнятись граничні умови на контурі оболонки (7), (8) і на поверхні розріза (10).

Інтенсивність звільнення пружньої енергії обчислюється згідно концепції Гріффітса

$$G=\partial V/\partial L \quad (13)$$

і тим самим задовольняються умови (11). Для визначення коефіцієнта $K_I$ при нормальному відриві одержимо залежність інтенсивності $G_I$ від коефіцієнта $K_I$. Для цього приймемо гіпотезу: поверхневий шар останнього шару багатошарової оболонки в області вершини тріщини-розрізу локально на розтягнутій стороні веде себе аналогічно пластині, яка знаходиться у стані рівномірного розтягу. На основі цієї гіпотези та допущення, що тріщина розвивається колінеарно своєї площини, яка лежить в площині пружньої симетрії, подамо два варіанти виводу для лінійних задач.

Перший варіант. Виходячи з того, що розріз. збільшуючи свою поверхню на одиницю площі, виділяє потік енергії, одержуючий, у результаті роботи сил $\sigma_y dx$ на переміщеннях $\vartheta$, маємо

$$G_I=2\lim_{\delta_1\to 0}\frac{1}{\delta_1}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\delta_1}\frac{1}{2}\sigma_y\,\vartheta\,dx\,dz, \quad (14)$$

де $G_I$ - інтенсивність вивільненої енергії при нормальному відриві; $\delta_1$ - величина просування розрізу; $\sigma_y$, $\vartheta$ - нормальне напруження та переміщення у напрямку осі $y$ в шарі з координатою $z=-h/2$.

Асимптотичне значення для симетричного поля напружень при $\theta=0$ та переміщень при $\theta=\pi\ (\rho=\delta_1-x)$

$$\sigma_y=K_I/\sqrt{2\pi x},\ \vartheta=4K_I\sqrt{\frac{\delta_1-x}{2\pi}}\left\{\left(\frac{A_{11}A_{22}}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{A_{22}}{A_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2A_{12}+A_{66}}{2A_{11}}\right]^{1/2}\right\}\times \quad (15)$$

де коефіцієнти $A_{ij}\ (i,j=1,2,6)$ підраховуються згідно робіт С.А.Амбарцумяна.

Після підстановки (15) у (14) та інтегрування, одержуємо залежність між $G_I$ та $K_I$ при $h=1$

$$K_I^2=G_I/\left\{\left(\frac{A_{11}A_{22}}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{A_{22}}{A_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2A_{12}+A_{66}}{2A_{11}}\right]^{1/2}\right\}. \quad (16)$$

Другий варіант. Ураховуючи гіпотезу та припущення, що тріщина росте при сталому напруженні $\sigma_y$, стрибок зміщення $\vartheta$ на тріщині дає шуканий потік енергії інтенсивності $G_I$, згідно слідуючій залежності:

$$G_I=\frac{\partial V}{\partial L}=\frac{\partial}{\partial L}\left[\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-L}^{L}\sigma_y(x,0)(\vartheta^+-\vartheta^-)dx\,dz\right], \quad (17)$$

де $\vartheta^+-\vartheta^-=2A_{22}\sigma_y(L^2-x^2)^{1/2}\,Re\left[i\left(\frac{s_1+s_2}{s_1 s_2}\right)\right]$

- значення стрибка; $|x|\le L$; $s_t\ (t=1,2)$ - корні біквадратного рівняння для ортотропного шарового матеріалу.

Підставляя значення стрибка в (17), інтигруючи по $x$ та $z$, потім продиференціювавши по $L$, а також ураховуючи, що $K_I=\sigma_y\sqrt{\pi L}$ та $h=1$, маємо залежність (16).

Якщо в (16) підставити пружні сталі, які характеризують трансверсально-ізотропні чи ізотропні шари то одержимо слідуючу залежність

$$K_I^2=G_I E, \quad (18)$$

де $E=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{m}E^k h_k$ - модуль пружності пакета.

Таким чином, метод піддатливості визначається слідуючими формулами (12), (13) та (16) чи (18).

Метод віртуального росту тріщини. Відміка розглядаючого методу від методу піддатливості полягає в тому, що приріст потенціальної енергії оболонки з тріщиною-розрізом одержуємо, згідно різниці

$$V(\Delta L) = V(L+\Delta L) - V(L) \qquad (19)$$

яку можна визначити не розглядаючи збільшення довжини розрізу на одну чи декілька вічків сітки, а за рахунок зміни координати вершини тріщини усередину вічка задавати її поширення. У результаті цієї операції зміняться жорсткість елементів, які прилягають безпосередньо до вершини розріза, ураховуючи це, шляхом виключення вирішуються лінійні та нелінійні системи рівнянь. Ця особливість дозволяє обчислити за одне рішення зміну енергії, згідно (19). Формули (12), (16) та (18) залишаються без змін.

Можливість застосувати (16) та (18) до рішення геометрично нелінійних задач теорії оболонок з тріщинами-розрізами базується на теоремі, яка приведена у роботах Н.Ф.Морозова, з якої можна зробити висновок, що головна частина асимптотики енергетичного рішення біля вершини розрізу визначається його лінійною частиною.

Розвиток теореми Клапейрона розуміється в значенні розширення області її використання, т.я. вона вперше застосовується до розрахунку розглядаючого класу задач, а також її чисельна реалізація.

По теоремі Клапейрона визначається загальна потенціальна енергія анізотропної багатошарової оболонки з тріщиною-розрізом

$$V = V_0 + V_T ,$$

де $V_0$ - потенціальна енергія оболонки без розрізу; $V_T$ - потенціальна енергія оболонки, яка обумовлена наявністю розрізу.

Розвиток теорії Гріффітса на геометрично нелінійні задачі теорії тріщин в оболонках викладається на основі узагальнених сил $Q_{ij}$ та переміщень $q_{ij}$.

Припустимо, що на якусь оболонку з розрізом діє сила $Q_{ij}$, яка викликає відповідне переміщення $q_{ij}$. Хай $Q'_{ij} > Q''_{ij}$ тоді при фіксованих узагальнених переміщеннях $q_{ij} = const$ в оболонці з напівдовжиною розрізу $L + dL$ енергія пружньої деформації $W_2 = \frac{1}{2}\iint\limits_S Q''_{ij} q_{ij}\, dS + \Gamma_2$ буде меншою ніж в оболонці з напівдовжиною розріза $L$ $W_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_S Q'_{ij} q_{ij}\, dS + \Gamma_1$, це приводить до зменшення енергії пружньої деформації

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\iint\limits_S (Q'_{ij} - Q''_{ij})\, q_{ij}\, dS + \Delta\Gamma, \qquad (20)$$

де $\Delta\Gamma$ - збільшення поверхневої енергії розріза.

При постійному навантаженні $Q'_{ij} = Q''_{ij} = Q_{ij}$ збільшення напівдовжини розріза на $dL$ веде до зростання енергії пружньої деформації від $W_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_S Q_{ij}\, q'_{ij}\, dS + \Gamma_1$ до $W_2 = \frac{1}{2}\iint\limits_S Q_{ij}\, q''_{ij}\, dS + \Gamma_2$ при $q''_{ij} > q'_{ij}$. При цьому узагальнене навантаження звершує роботу $A = \iint\limits_S Q_{ij}(q''_{ij} - q'_{ij})\, dS$. У результаті відбувається зменшення потенціальної енергії оболонки з тріщиною на величину

$$\Delta V = \Delta W - A + \Delta\Gamma = \\ = -\frac{1}{2}\iint\limits_S Q_{ij}(q''_{ij} - q'_{ij})\, dS + \Delta\Gamma. \qquad (21)$$

Покажемо, що при $dL \to 0$ величини зменшення енергії пружньої деформації та потенціальної енергії ідентичні. Для цього представимо $Q'_{ij} - Q''_{ij} = \delta Q_{ij}$ та $q''_{ij} - q'_{ij} = \delta q_{ij}$ тоді (20) та (21) мають вигляд

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\iint\limits_S \delta Q_{ij}\, q_{ij}\, dS + \Delta\Gamma, \qquad (22)$$

$$\Delta V = -\frac{1}{2}\iint\limits_S Q_{ij}\, \delta q_{ij}\, dS + \Delta\Gamma. \qquad (23)$$

У зв"язку з тим, що матеріал підлеглий закону Гука, можна виразити узагальнені переміщення та узагальнені сили, як взаємо-однозначні функції

$$q_{ij} = C Q_{ij} \quad , \quad Q_{ij} = \frac{1}{C} q_{ij} \, ,$$

де $C$ - податливість оболонки з розрізом. Для $L$ та $L+dL$ при $dL \to 0$ податливість однакова. Тоді $\delta q_{ij} = C\,\delta Q_{ij}$, а (20) та (21) приймають вигляд

$$\Delta W = -\frac{1}{2} \iint\limits_S \delta Q_{ij}\, C\, Q_{ij}\, dS + \Delta\Gamma, \qquad (23)$$

$$\Delta V = -\frac{1}{2} \iint\limits_S Q_{ij}\, C\, \delta Q_{ij}\, dS + \Delta\Gamma, \qquad (24)$$

що й потрібно було довести.

На основі ( 23) та ( 24) можемо сформулювати положення для оболонок з тріщиною-розрізом: у результаті збільшення тріщини на нескінчену малу величину в умовах фіксованної деформації оболонки з тріщиною-розрізом зменшення запасенної енергії пружньої деформації ідентично зменшенню потенціальної енергії при сталому навантаженні. На основі цього положення в функціоналі ( 2 ) вибрані умови на розрізі в зусиллях.

Залежність для інтенсивності $G$ одержимо виходячи з потенціальної енергії оболонки з розрізом

$$V = W - A + \Delta\Gamma = -\frac{1}{2} Q_{ij} q_{ij} + G\,dL \, , \qquad (25)$$

де $\Delta\Gamma = \int\limits_0^{dL} G\, dS_1 = \int\limits_0^{dL} G \cdot 1 \cdot dL = G\,dL$; $dS_1$ - приріст поверхні тріщини-розріза.

Продиференціювавши ( 25 ) по $L$ , а потім використовуючи умови критичного стану $V_{,L} = 0$ , одержимо

$$G = \left(\frac{1}{2} Q_{ij} q_{ij}\right)_{,L} \, , \qquad (26)$$

якщо обозначити у (26), згідно теореми Клапейрона, вираженчя в дужках, через $V$, матимемо вираз (13). Враховуючи, що величини, які входять в (12), являються функціями не тільки координат, а й довжини розрізу $\bar{q}=\bar{q}_i(L)$, $\bar{\tau}=\bar{\tau}_i(L)$ та $\bar{m}=\bar{m}_i(L), \bar{\gamma}=\bar{\gamma}_i(L)$, можна представити інтенсивність $G$ у слідуючому вигляді

$$G=\frac{1}{2}\iint\limits_S\left(\bar{q}_i\frac{\partial\bar{\tau}_i}{\partial L}-\bar{\tau}_i\frac{\partial\bar{q}_i}{\partial L}+\bar{m}_i\frac{\partial\bar{\gamma}_i}{\partial L}-\bar{\gamma}_i\frac{\partial\bar{m}_i}{\partial L}\right)ds, \quad (27)$$

який представляє модифікацію концепції Гріффітса для оболонок з тріщинами.

Виразимо інтегральну інтенсивність $G=G_I+G_{II}+G_{III}$, де $G_I$ - інтенсивність вивільненої енергії при нормальному відриві, $G_{II}$ - теж саме при поперечному зсуві; $G_{III}$ - теж саме при продольному зсуві, через коефіцієнти $K_I$, $K_{II}$ та $K_{III}$, як границя до якої наближається робота, яка здійснюється локальними напруженнями діючими в поверхневому шарі оболонки у вершини розріза в окремих напрямках і має слідуючу залежність

$$G=2\lim_{\delta_1\to 0}\frac{1}{\delta_1}\int_{-h/2}^{h/2}\int_0^{\delta_1}\frac{1}{2}\left(\sigma_y v+\tau_{xy}u+\tau_{xz}w\right)dx\,dz. \quad (28)$$

Асимптотичні значення напружень у вершини нерухомої тріщини одержимо при $\theta=0$, та переміщень при $\theta=\pi$ $(\rho=\delta_1-x)$

$$\tau_{xy}=K_{II}/\sqrt{2\pi x}, \quad \tau_{yz}=K_{III}/\sqrt{2\pi x},$$

$$u=4K_{II}\sqrt{\frac{\delta_1-x}{2\pi}}\frac{A_{11}}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{A_{22}}{A_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2A_{12}+A_{66}}{2A_{11}}\right]^{1/2}, \quad (29)$$

$$w=4K_{III}\sqrt{\frac{\delta_1-x}{2\pi}}\Big/\left(A_{44}A_{55}\right)^{1/2}.$$

Підставляя (І5) та (29) в (28) після інтегрування, маємо при

$$G=\frac{A_{11}}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{A_{22}}{A_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2A_{12}+A_{66}}{2A_{11}}\right]^{1/2}\left[\left(\frac{A_{22}}{A_{11}}\right)^{1/2}K_{I}^{2}+K_{II}^{2}\right]+ \qquad (30)$$

$$+K_{III}^{2}/\left[2\left(A_{44}A_{55}\right)^{1/2}\right].$$

Для трансверсально-ізотропного матеріалу

$$G=\left(K_{I}^{2}+K_{II}^{2}\right)/E+K_{III}^{2}/\left[2\left(A_{44}A_{55}\right)^{1/2}\right] \qquad (31)$$

та ізотропного матеріалу

$$GE=K_{I}^{2}+K_{II}^{2}+(1+\nu)K_{III}^{2}, \qquad (32)$$

де $\nu=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\nu^{k}$ - коефіцієнт Пуассона для всього пакету.

Якщо прирівняти праву частину (32) квадрату деякої величини $K$ та інтерпретувати її як сумарний середньоквадратичний коефіцієнт інтенсивності напружень, який характеризує інтенсивність напружень у вершині розрізу при накладанні трьох видів деформацій

$$K^{2}=K_{I}^{2}+K_{II}^{2}+(1+\nu)K_{III}^{2}, \qquad (33)$$

а інтенсивність енергії, ураховуючи (32), має вигляд

$$G=K^{2}/E. \qquad (34)$$

Залежність (34) справедлива для довільно орієнтованих розрізів, розташованих в будь-яких оболонках, зібраних із ізотропних шарів чи одношарових.

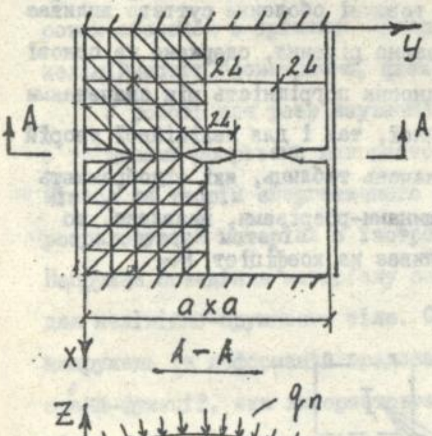
Таким чином, розрахункова модель гнучкої анізотропної шарової оболонки, вміщуючої тріщини-розрізи, побудована. Методи, запроповані для її рішення, є простими з математичної точки зору та загальними з точки зору механіки тріщин.

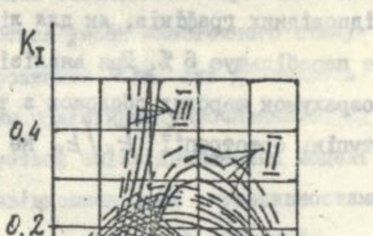
Розв"язування лінійних та геометрично нелінійних задач теорії оболонок з тріщинами-розрізами

У другій главі приведено чисельне дослідження лінійних, лінійних та конструктивно нелінійних, геометрично нелінійних, геометрично та конструктивно нелінійних одношарових ізотропних, трансверсально-ізотропних та ортотропних оболонок з тріщинами, розташованими в центрі, з боку та колінеарно з обох сторін. На оболонку з тріщинами-розрізами діє поверхневе поперечне навантаження та одночасово поперечне навантаження та розтягувальні сили. Значення коефіцієнтів $K$ підраховувались методом піддатливості та методом віртуального росту тріщини на базі МСЕ у формі переміщень.

Усі розрахунки представлені в вигляді графіків та таблиць. Аналіз графіків, побудованних за допомогою енергетичних методів, показує, що відносна погрішність не перебільшує 5-6 %. Наприклад, у роботі приведен розрахунок коефіцієнтів $K_I$ при адгезійному руйнуванні оболонки з тріщинами. Матеріал оболонки з тріщинами-розрізами, виконаний із різномодульних матеріалів $E_1$ та $E_2$. На мал. 2 представлені графіки, які показують залежність коефіцієнтів $K_I$ від напівдовжини тріщини.

Відносна погрішність між відповідними графіками для усіх випадків розташування тріщини не перебільшує 6 %. На мал. 2 штрихованими кривинами показані графіки, які виражають рішення одержане на основі геометрично нелінійної теорії. Для першого випадку розташування тріщини у гнучкій оболонці проведен чисельний експеримент, який дозволив виявити вплив контакта берегів тріщини на коефіцієнт $K_I$. Штрихованою кривиною показаний графік, побудований при не контактуючих берегах розріза. Штрих-пунктирними кривинами зображені графіки одержані при нульовому розхилі тріщини, т.т. $C = 0$. Відносна погрішність між відповідними графіками не більше 4 %. З аналізу цих графіків робиться висновок, що контакт берегів практично не має впливу на значення коефіцієнту $K_I$. Із аналізу графіків, побудованних для трансверсально-ізотропних оболонок з тріщинами, робиться висновок, що трансверсальність по товщині оболонки має суттєвий вплив на значення $K_I$. Із аналізу таблиць, в яких представлен розрахунок для ортотропних оболонок з тріщинами, можна зробити висновок, що ступінь ортотропії не має впливу на коефіціент $K_I$.



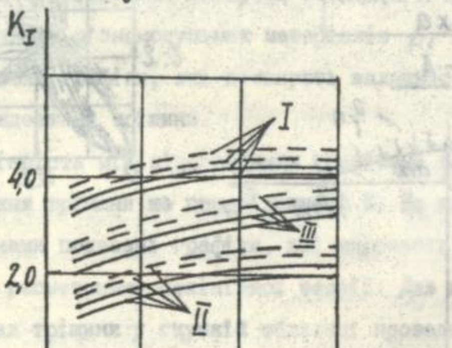

Мал. 2

В роботі прийнята розрахункова модель розріза: ширина дорівнює математичному нулю, береги паралельні до границі уточнення форми їх вершин, маючих клиновидну форму, кінцеві зони вершин не уточнюються і при чисельному розрахунку апроксимірується вузлами.

У третій главі зроблен аналіз напруженного стану біля тріщин-розрізів, які знаходяться в багатошарових оболонках. Розглядались чотирьохшарові та п"ятишарові жорсткі та гнучкі оболонки з трьома випадками розташування розріза. Матеріал шарів ізотропний, трансверсально-ізотропний та ортотропний.

Розглядалась чотирьохшарова циліндрична панель з тріщинами-розрізами при одночасній дії розтягувальних та згинаючих навантаженнях.

Із аналізу графіків, приведенних на мал. 3, можна зробити висновок, що трансверсальність по товщині оболонки суттєво впливає на коефіціент $K_I$. Штриховою показано рішення, одержане на основі геометрично нелінійної теорії. Відносна погрішність між значеннями відповідних графіків, як для лінійної, так і для нелінійної теорії не перебільшує 6 %. При аналізі значень таблиць, які відображають розрахунок шарових оболонок з тріщинами-розрізами, виявлено, що ступінь ортотропії $E_x/E_y$ не впливає на коефіцієт $K_I$.




Мал. 3

На мал. 3 представлені графіки, які показують зміну залежності коефіцієнта $K_I$ від параметра $E/\mu'$, де $\mu'$ - характеризує трансверсальність по товщині оболонки, при $h/L = 1$.

Розрахунок гнучких фізично нелінійних анізотропних одношарових та багатошарових оболонок з тріщинами-розрізами

В четвертій главі розглядаються дуже нелінійні варіаційні задачі статики, уточненної моделі типу Тимошенко, ортотропних, трансверсально-ізотропних та ізотропних одношарових та багатошарових оболонок з тріщинами-розрізами. Розглядаються три типи нелінійності: геометрична, фізична та конструктивна.

У роботі для розв"язування задач нелінійної теорії оболонок з тріщинами-розрізами використовуються умови пластичного стану Мізеса та теорія енергетичного упрочнення Хіла, які дозволяють розраховувати матеріал з ізотропним нелінійним упрочненням. Непружня поведінка матеріалу описується співвідношеннями моделі для нелінійно-пружнього тіла. Співвідношення між інтенсивностями напружень та деформацій представляється у вигляді кубічної сплайн-функції, яка використовується для визначення дотичних та січних модулів пружності.

Зміна у формулах енергетичних методів відбувається тільки при обчисленні потенціальної енергії

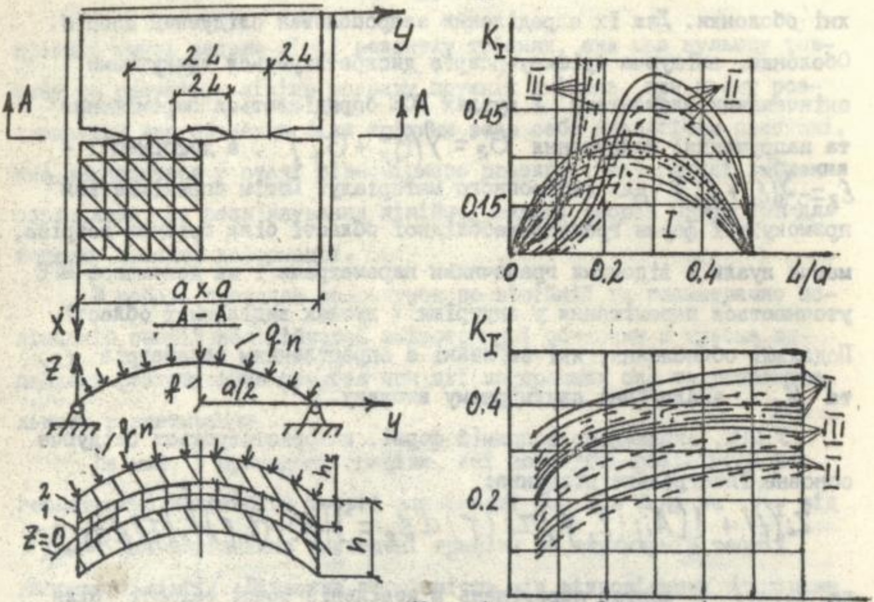
$$V = \iint\limits_{S} \int\limits_{0}^{\tau} q(\tau)\, d\tau\, ds$$

де $V$ - потенціальна енергія нелінійної оболонки з тріщиною-розрізом, яка представляє собою площу обмеженною діаграмою навантаження - переміщення; $q(\tau)$ - функція, яка описує криву навантаження - переміщення; $\tau$ - вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки.

Теорії Гріффітса та Ірвіна розвинені на дуже нелінійні задачі теорії оболонок з тріщинами. Приведен доказ, що ці теорії цілком можливо застосовувати для розрахунку оболонок з тріщинами, в геометрично та фізично нелінійній постанові. Так, наприклад, для виведення аналітичної залежності між $G_I$ та $K_I$ приймається гіпотеза: пластичні деформації, які з"являються у поверхневому шарі останнього шару оболонки в області вершини тріщини локально на розтягнутій стороні відносяться до випадку маломасштабного пластичного течіння, локалізовані у вузькій смузі вздовж лінії розвитку тріщини, маючої нульову товщину та рахуючою лінією розриву пружніх переміщень, при цьому розглядаючий шар оболонки біля тріщини веде себе аналогічно пластині, яка знаходиться у стані рівномірного розтягу; тоді значення пружніх переміщень визначаємо із розв"язування лінійної задачі теорії пружності. Використовуючи другий варіант виводу залежності між $G_I$ та $K_I$ для лінійної задачі одержимо це співвідношення і для розглядаючого випадку.

У роботі розв"язані задачі механіки тріщин в оболонках у таких постановках: фізично та конструктивно нелінійної для одношарової ізотропної двоякої кривини пологої оболонки з тріщиною в центрі, геометрично та фізично нелінійної ізотропної, трансверсально-ізотропної та ортотропної. На мал. 4 приведені графіки, які ілюструють залежність між коефіцієнтом $K_I$ та $L/a$, також $K_I$ та $E/\mu'$.

Із аналізу графіків можна зробити висновок, що трансверсальність по товщині суттєво впливає на коефіцієнт $K_I$. Із аналізу даних таблиць, які представляють розрахунок ортотропних оболонок з тріщинами, можна сказати, що ступінь ортотропії $E_x/E_y$ не впливає на коефіцієнт $K_I$.




Мал. 4

При розрахунку геометрично та фізично, геометрично, фізично та конструктивно нелінійних трьохшарової ізотропної, трансверсально-ізотропної та ортотропної оболонки з трьома випадками розташування тріщини встановлено, що фізична нелінійність впливає більше на коефіцієнт $K_I$, ніж геометрична, а тому при розрахунках впершу чергу треба ураховувати фізичну нелінійність, а потім вже геометричну. Конструктивна нелінійність практично не впливає на коефіцієнт $K_I$. Трансверсальність суттєво впливає на коефіцієнт $K_I$. Ортотропія $E_x/E_y$ не впливає на коефіціет $K_I$

Розв"язування трьохмірних задач теорії тріщини в оболонках

Для розв"язування трьохмірних задач теорії тріщин в оболонках енергетичними методами, також як і для двохмірних, основними трудношами є обчислення вектора переміщень точок серединної поверхні оболонки. Для їх опреділення запропонован слідуючий спосіб. Оболонка, вміщуюча тріщину-розріз дискретизується трикутними скінченними елементами. У вузлах МСЕ опреділяються переміщення та напруження; напруження $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ , а деформації - $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ для ізотропного матеріалу. Потім опреділяється прямокутної форми границя необхідної області біля тріщини-розріза, маюча вузли з відомими граничними параметрами і за допомогою МГЕ уточнюються переміщення у внутрішніх вузлах виділенної області. Подальші обчислення, які зв"язані з опреділенням параметрів $G_I$ та $K_I$ , аналогічні двухмірному випадку.

У МГЕ, вираженого в прямій формі, використовується слідуюче основне інтегральне рівняння:

$$z_i(t) + \iint_{S_0} A_{ij}(t,\xi) z_i(\xi) \, dS_0 = \iint_{S_0} B_{ij}(t,\xi) f_i(\xi) \, dS_0 ,$$

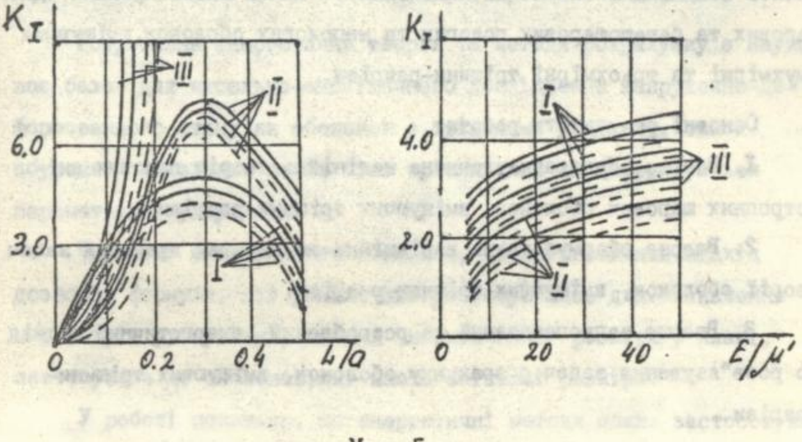
де $z_i(t)$ - вектор переміщень в довільній точці області біля тріщини-розріза, $z_i(\xi)$ та $f_i(\xi)$ - значення переміщень та напружень на границі області. $A_{ij}(t,\xi)$ та $B_{ij}(t,\xi)$ - ядра рівнянь які обчислюються за формулами, приведенними в роботі Ріццо та Круза; $S_0$ - поверхня виділенної області.

Цей спосіб застосовується для розв"язування лінійних та нелінійних задач теорії тріщин в оболонках.

Для фізично нелінійних трьохмірних задач теорії тріщин в оболонках вивід залежності між інтенсивностю $G_I$ та $K_I$ базується на гіпотезі: пластичні деформації, які з"являються в поверхневому шарі оболонки в області вершини тріщини локально на розтягнутій стороні відносяться до випадку маломасштабного пластичного течіння, т.т. довжина ліній сковзання мала в порівнянні з характерним розміром тіла чи довжиною тріщини, локалізовані в вузькій смузі вздовж лінії розвитку тріщини, яка має нульову товщину та рахується лінією розриву пружніх зміщень, при цьому розглядаючий шар оболонки біля тріщини веде себе аналогічно пластині, яка знаходиться у стані рівномірного розтягу; тоді пружні зміщення опреділяем із розв"язування лінійної задачі теорії пружності для випадку плоскої деформації.

В роботі проведен розрахунок по лінійній та геометрично нелінійній теорії нелінійчатої анізотропної оболонки з трьома випадками розташування розріза при дії поперечних сил та розтягувального навантаження.

На мал. 5 приведені графіки, які показують розрахунок по геометрично нелінійній теорії залежності $K_I$ від $L/a$ та $K_I$ від $E/\mu'$. Для порівняння приведені графіки по двухмірній теорії /штрихові лінії/. Відносна погрішність між відповідними графіками при різній густоті сітки для усіх випадків розташування тріщини не більше 5 %, а між двохмірною та трьохмірною теоріями біля 6 %.




Мал. 5

Із аналізу графіків видно, що трансверсальність по товщині оболонки суттєво впливає на коефіцієнт $K_I$. Ступінь ортотропії $E_x/E_y$ не впливає на $K_I$.

В роботі проведен розрахунок по лінійній та нелінійній теорії тріщин з урахуванням взаємодії поверхонь та впливу вільної поверхні на значення коефіцієнтів $K_I$. Із аналізу графіків робиться висновок, що взаємодія поверхонь практично не впливає на $K_I$, а вільна поверхня впливає до певної ширини розкриття тріщини. Показано вплив трансверсальності. Ортотропія не впливає на коефіцієнт $K_I$. Вперше розв"язана задача контактної теорії тріщин в оболонках.

Висновок

В дисертації відображені результати роботи, яка направлена на утворення нового наукового напрямку в області аналітичної механіки руйнування оболонок з тріщинами-розрізами. Розроблена та обгрунтована енергетична теорія, яка вміщує теоретичні методи розрахунку, реалізовані чисельним шляхом за допомогою ЕОМ, некласичної механіки лінійних та нелінійних моделей анізотропних одношарових та багатошарових пологих та непологих оболонок вміщуючих двухмірні та трьохмірні тріщини-розрізи.

Основні результати роботи:

1. Вперше збудована уточнена нелінійна теорія пологих анізотропних шарових оболонок, вміщуючих тріщини-розрізи.

2. Вперше сформульована варіаційна постановка крайових задач теорії оболонок, вміщуючих тріщини-розрізи.

3. Вперше запропонований та розроблений енергетичний підхід до розв"язування задач розрахунку оболонок, вміщуючих тріщини-розрізи.

4. Вперше запропоновані та розроблені енергетичні методи: метод піддатливості та метод віртуального росту тріщини для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень довільних оболонок з тріщинами-розрізами.

5. Розвинені: теорема Клапейрона, теорії Гріффітса та Ірвіна на лінійні та нелінійні моделі оболонок з тріщинами-розрізами.

6. Вперше запропоновані аналітичні та розрахункові моделі розріза-тріщини для розв"язання задач механіки тріщин в оболонках.

7. Запропонован МСЕ до розв"язку лінійних та нелінійних задач статики анізотропних шарових оболонок, вміщуючих тріщини-розрізи.

8. Запропонован та розроблен спосіб, який базується на комбінації МСЕ та МГЕ, для розв"язування просторових задач лінійної та нелінійної теорії тріщин в оболонках.

9. Розв"язані нові задачі теорії тріщин в оболонках.

Розроблена енергетична теорія та методи розрахунку є науковою базою для чисельно-аналітичного дослідження напружено-деформованного стану як оболонок з тріщинами у цілому, так і збуренних локальних полів біля тріщини, які характеризуються параметрами руйнування.

Чисельні експерименти показали, що енергетичний підхід дозволив формули, які раніше використовувались для визначення параметрів руйнування, маючих "нескінченні" розміри у плані, застосувати до оболонок, які мають скінчені розміри.

У роботі показано, що енергетичні методи можна застосовувати до розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень при контактуючих і не контактуючих берегах тріщини. Із оцінки впливу контакта, виникаючого в зоні стиску, поверхонь тріщини, а також їх вільної поверхні на коефіцієнти інтенсивності напружень у двохмірних та трьохмірних теоріях оболонок, зроблений вивід, що контакт поверхонь тріщини практично не впливає на їх величину, а вільна поверхня впливає до певної ширини її розкриття.

Чисельно визначено, що на коефіцієнт інтенсивності напружень суттєво впливають: кривина оболонки, трансверсальність матеріала по товщині оболонки, нелінійності різних видів, а також розмірність теорії.

Чисельно показано, що ступінь ортотропії не впливає на коефіцієнт інтенсивності напружень, як в лінійній так і нелінійній постановках двухмірних та трьохмірних задачах теорії тріщин в оболонках.

Достовірність чисельних результатів підтверджена шляхом порівняння їх з даними експерименту,де це можливо, аналітичних методів, а також шляхом згущення сітки елементів.

Аналіз приведенних рішень ілюструє надійність та ефективність запропонованної енергетичної теорії та чисельних методів її реалізації до розв"язування різних задач лінійної та нелінійної теорії оболонок з тріщинами-розрізами.

Основний зміст дисертації опублікован
у слідуючих роботах:

I. Юрков В.Н. Энергетический подход к решению задач неклассической теории неоднородных анизотропных оболочек, содержащих трещины-разрезы // Прикл. механика и техн. физика.- 1992.- № 3.- С. 108-112.

2. Юрков В.Н. Энергетические методы в решении сложных задач неклассической теории оболочек, содержащих трещины-разрезы // Механика твердого тела.- 1993.- № 5.- С. 154-159.

3. Юрков В.Н. Энергетический подход к решению нелинейных краевых задач неклассической теории анизотропных слоистых оболочек с разрезами-трещинами // Прикл. механика и техн. физика.- 1994.- № 3.- С. 131-135.

4. Юрков В.Н. Энергетическая теория линейной механики разрушения оболочек с трещинами-разрезами // Пробл. прочности.- 1995.- № 7.- С. 59-67.

Yorkov V.N. Linear mechanics energetic theory for fracture of shells with crackes - cuts. // Int. J. Strength of materials. - 1996.

5. Юрков В.Н. Оценка влияния контакта поверхностей трещины-разреза на распределение напряжений в оболочке // Пробл. прочности.- 1995.- № 3.- С. 42-47.

Yurkov V.N. An evalution of an influence of a contact of crack - cut surfaces on a stress distrubution in shells. // Int. J. Strength of materials. - 1996.

Abstract. Yourkov V.N. Energetic theory and methods for calculation problems mechanics cracks in shells.

The disertation presented for a doctor's degree /tecnical/. speciality 05.02.07 - mechanics of deformable bodies Francevich Institute problems materils. National Academy of sciences of Ukraine. Kiev. 1996.

Energetic theory and calculation of shells with cracks - cuys based on non classical Timoshenko type theory is offered and realized. Methods of compliance and virtual growth of cracks are developed for a calculation of the stress intensity factor as a fundamental characteristic of local stress field at crack tips. Thesl methods are realized by means of the finite element and finite difference methods. On the basis an energetic approach the linear and nonlinear three - dimensional porobleme of the nonclassical Timoshenko type theory of spells with cracks - cuts accounting surface interactions are resolved. The evaluation of an influence of contact areas and free. Surfaces on the stress intensity factor is siven. The used approach is realized by a numerical technigne based on the finite element and boundary element methods.

Аннотация. Юрков В.Н. Энергетическая теория и методы численного решения краевых задач механики трещин в оболочках. Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.02.07 - механика деформируемого твердого тела. Национальный технический университет Украины "КПИ", 1996.

Защищается предложенная и реализованная энергетическая теория и расчет оболочек с трещинами-разрезами по неклассической теории типа Тимошенко. Для определения коэффициента

интенсивности напряжений, который является основной характеристикой локального поля напряжений у вершины трещины, предложены и разработаны метод податливости и метод виртуального роста трещины. Эти методы реализованы при помощи метода конечных элементов в варианте перемещений и конечных разностей.

На основании энергетического подхода решены линейные и нелинейные трьохмерные задачи теории оболочек с трещинами-разрезами, учитывающие взаимодействие поверхностей. Оценено влияние площади контакта и свободной поверхности на коэффициент интенсивности напряжений. Этот подход реализовано численным путем при помощи предложенного приема, который основан на сочетании метода конечных элементов и метода граничных элементов.

Ключеві слова: теорія, метод, тріщина, розріз, піддатливість, віртуальний, варіація, рівняння, елемент, гіпотеза, пружність, коефіцієнт, інтенсивність, енергія, графік, модель, нелінійність, підхід, навантаження, оболонка, задача, функціонал, вектор, довжина, вершина, поле, погрішність, шарова, анізотропія.

Підп. до друку 29.10.96. Формат 60х84/16. Папір офс. Офс друк.
Ум. друк. арк. 2,09. Ум. фарбо-відб. 2,21. Обл.-вид. арк. 1,5.
Зам. 512. Тир. 100 прим.
Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В М Глушкова НАН України
252022 Київ 22, проспект Академіка Глушкова, 40