

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

*На правах рукопису*

ЖУК Петро Федорович

# БАГАТОКРОКОВІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ТИПУ

Спеціальність 01.01.07 —  
обчислювальна математика

**Автореферат**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1996



519.6



00743863 (V)

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі ч  
фізики Київського університету імені Тараса Шевченка.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук,  
професор Макаров Володимир Леонідович.

- Офіційні опоненти:
1. Член-кореспондент НАН України,  
доктор фізико-математичних наук,  
професор Шор Наум Зуселевич.
  2. Доктор фізико-математичних наук,  
професор Лучка Антон Юрійович.
  3. Доктор фізико-математичних наук,  
професор Велов Юрій Анатолійович.

Провідна організація: Московський державний університет  
імені М.В.Ломоносова.

Захист відбудеться " 19 " 12 1996 р.

о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 01.01.23  
при Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою:  
252127, м. Київ-127, проспект акад. Глушкова, 2, корп. 6,  
факультет кібернетики, ауд. 40 (тел.(044) 266-12-58; факс:  
266-12-48; E-mail:vpsh@icchq.univ.kiev.ua).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського  
університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розіслано " 5 " 11 1996 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради

Шевченко В.П.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПРАЦІ

*Актуальність проблеми.* Ітераційні методи варіаційного типу є одними з найбільш поширених методів наближеного розв'язку прикладних задач, що допускають варіаційну постановку. Найважливішими прикладами таких задач є лінійні задачі (що зводяться до відшукування мінімуму квадратичного функціонала), задачі на власні значення самоспряжених лінійних операторів (розв'язок яких рівносильний відшукуванню екстремумів відношення Релея) та нелінійні задачі (що зводяться до безумовної оптимізації неквадратичних, зокрема опуклих, функціоналів).

Ітераційні методи варіаційного типу здійснюють послідовну скінченномірну оптимізацію функціонала екстремальної задачі. Вони включають такі відомі ітераційні процеси як методи найшвидкішого спуску, мінімальних ітерацій Ланцоша, спряжених градієнтів та їх модифікації.

На відміну від лінійних ітераційних процесів, розв'язувальні оператори варіаційних методів навіть для лінійних задач мають досить складний нелінійний характер, а аналітичні залежності п'ятого та наступних наближень від початкового є практично неозорими. Вказані обставини суттєво утруднюють теоретичний аналіз реальної поведінки ітераційних методів варіаційного типу, що, в свою чергу, заважає їх практичному застосуванню.

Труднощі, що виникають при практичному використанні варіаційних методів, а також шляхи їх подолання найбільш чітко відслідковуються на прикладі методів Ланцоша та спряжених градієнтів. Так, дослідження, які провів Ланцош на початку 50-х років, показали, що в межах точної арифметики метод мінімальних ітерацій є ефективним засобом розв'язання лінійних рівнянь та задач на власні значення. Однак, величини, що обчислюються під час ітерування, можуть значно відхилитися від

їх теоретичних аналогів, зокрема, заокругленнями порушується ортогональність між породжуваними векторами. Через це про метод Ланцоша склалася думка (що протрималася до 70-х років) як про нестійкий, такий, що не має практичного значення.

З початку 70-х років інтерес до методу Ланцоша починає відроджуватися завдяки працям Пежа, в яких виконано глибокий теоретичний та експериментальний аналіз реальної (з врахуванням помилок заокруглення) поведінки методу та виявлені причини його нестійкості. Показано, що втрату ортогональності викликає збіжність одного з векторів Рітца, причому при продовженні процесу він немов "забуває", що вже знайшов власну пару і починає обчислювати її знову.

Подальші дослідження (C.C.Paige, G.H.Golub, B.N.Parlett, J.Cullum, T.Ericsson, H.G.Matthies, J.Yicheng, S.K.Kim, H.Wozniakowski, С.Писсанецки) спричинилися до створення досить стійких алгоритмів методу Ланцоша як для часткової, так і для повної задач на власні значення. Незважаючи на досягнутий прогрес, теорія методу Ланцоша далека від завершення, на що вказує, зокрема, той факт, що аналізуючи реальну швидкість збіжності цього методу, перевагу віддають чисельним експериментам.

Аналогічна історія методу спряжених градієнтів, який запропонували на початку 50-х років Хестенс та Штифель для розв'язування систем лінійних рівнянь. Цей метод хоча і є ітераційним, але збігається до точного розв'язку системи за скінченне число ітерацій при відсутності помилок заокруглення. Ця властивість та нескладна обчислювальна схема методу спряжених градієнтів відразу ж привернули до нього увагу спеціалістів з чисельного аналізу. Однак широкого розповсюдження спочатку він не отримав, оскільки були виявлені випадки його чисельної нестійкості, яка призводить до розбіжності методу.

З середини 60-х років цікавість до методу спряжених градієнтів відроджується. По-перше, виявилася здатність методу до прискорення збіжності стаціонарних ітераційних процесів (С.К.Годунов, Г.П.Прокопов, О.А.Самарський, Є.С.Ніколаєв, Г.І.Марчук, Ю.О.Кузнєцов, Л.Хейгеман, Д.Янг). По-друге, було досягнуто певного прогресу в розумінні реального обчислювального процесу. На основі чисельних експериментів було показано (M.Engeli, Th.Ginsburg, H.Rutishauser, E.Stiefel), що хоча після  $n$  ітерацій методу спряжених градієнтів ( $n$  - мірність лінійної системи) наближений розв'язок може значно відрізнятись від точного, це не відбувається, якщо кількість ітерацій перевищує  $n$ . При цьому рано чи пізно настає момент, коли відхилення почне різко зменшуватися, і в кінцевому рахунку точність розв'язку буде визначатися числом обумовленості матриці системи. По-третє, було помічено (J.K.Reid, P.Concus, G.Golub, D.O'Leary), що під час розв'язування сіткових рівнянь метод спряжених градієнтів, як правило, збігається досить швидко, особливо з передобумовлювачем, причому кількість необхідних для досягнення заданої точності ітерацій виявляється значно меншою, ніж мірність системи.

Незважаючи на досягнутий прогрес, питання про вплив помилок заокруглення на поведінку методу спряжених градієнтів у значній мірі залишається відкритим; в літературі, як правило, аналізують лише результати чисельних експериментів.

При побудові чисельно стійких варіантів методів Ланцоша та спряжених градієнтів часто використовують (особливо для нелінійних задач) процедуру відновлення початкового ітераційного процесу (Е.Полак, Б.Т.Поляк, Ф.П.Васильєв, Г.І.Марчук, Б.М.Пшеничний). Ця процедура полягає в тому, що в деякі моменти (моменти відновлення) ітераційний процес переривається, а потім

знову стартує, причому за нове початкове наближення беруть останнє підраховане наближення.

Утворений таким чином циклічний процес називається багатокроковим або  $s$ -кроковим, якщо відновлення відбувається через кожні  $s$  ( $s \geq 1$ ) ітерацій. Так, відновлюючи через кожні  $s$  ітерацій метод Ланцоша (метод спряжених градієнтів) отримуємо відповідно  $s$ -кроковий метод Ланцоша ( $s$ -кроковий метод спряжених градієнтів).

Багатокрокові методи Ланцоша і спряжених градієнтів відносять до класу багатокрокових ітераційних методів варіаційного типу, початок вивченню якого покладено в працях Л.В.Канторовича. Л.В.Канторович запропонував для розв'язування лінійних операторних рівнянь  $s$ -кроковий метод найшвидкішого спуску,  $(k+1)$ -ше наближення якого вибирають з умови мінімуму відповідного квадратичного функціонала на  $s$ -мірному підпросторі Крилова, породженому  $k$ -м наближенням.

Для лінійних задач  $s$ -кроковий метод найшвидкішого спуску тісно пов'язаний з  $s$ -кроковим методом спряжених градієнтів: фактично  $s$ -кроковий метод спряжених градієнтів є ефективною схемою реалізації на ЕОМ  $s$ -крокового методу найшвидкішого спуску (Г.І.Марчук., Ю.О.Кузнецов). Аналогічно співвідносяться між собою  $s$ -кроковий метод найшвидкішого спуску, який запропонував М.Ш.Бірман для задач на власні значення, та  $s$ -кроковий метод Ланцоша. Для нелінійних задач, однак,  $s$ -крокові методи, що здійснюють послідовну  $s$ -мірну оптимізацію функціонала задачі, можуть значно відрізнятись від  $s$ -крокових методів, побудованих за допомогою процедури відновлення.

При  $s=1$   $s$ -кроковий метод називають однокроковим; прикладами однокрокових методів варіаційного типу є такі відомі ітераційні процеси, як метод найшвидкішого спуску, метод мінімальних нев'язок та  $\alpha$ -процеси (М.А.Красносельський,

С.Г.Крейн), метод мінімальних похибок (В.М.Фрідман), двошарові градієнтні методи (О.А.Самарський, Є.С.Ніколаєв).

Історично першим ітераційним методом варіаційного типу є метод найшвидкішого спуску, який запропонував Коші в 1847 році. Дослідженню, використанню та узагальненню цього методу присвячені роботи Р.Куранта, Л.В.Канторовича, Дж.Форсайта, М.Ш.Бірмана, В.А.Самокиша, А.М.Ostrowski, J.Crockett, M.Altman, О.А.Самарського, В.М.Пшеничного, Г.І.Марчука, Є.С.Ніколаєва, Ю.О.Кузнєцова, Б.Т.Поляка, Ю.І.Любіча, Г.Д.Майстровського, В.Г.Приказчикова та інших авторів.

Основним недоліком методу найшвидкішого спуску є відносно невисока швидкість збіжності, особливо для погано обумовлених задач. Причини такої поведінки методу аналізувалися на початку 50-х років Дж.Форсайтом та Т.Моцкіним. Вони вивчали асимптотичну поведінку методу найшвидкішого спуску

$$u_{k+1} = u_k - \tau_k r_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$r_k = Au_k - f, \quad \tau_k = (r_k, r_k) / (Ar_k, r_k),$$

при розв'язуванні системи лінійних рівнянь  $Au = f$  з симетричною додатною матрицею  $A$ . На підставі чисельних експериментів вони висловили в 1951 році таке припущення: якщо  $\xi_{10}\xi_{n0} \neq 0$ , то для всіх  $1 < i < n$   $\xi_{ik} = o(\|z_k\|)$ , коли  $k \rightarrow \infty$ , причому похибки методу найшвидкішого спуску  $z_k = u_k - u^*$ ,  $k=0,1,\dots$ , наближаються за напрямом до площини  $\pi_{1n}$ , натягнутої на вектори  $e_1, e_n$ , коливаючись між двома граничними напрямками (тут  $\xi_{ik}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , - коефіцієнти розкладу вектора  $z_k$  за системою власних векторів  $\{e_i\}$  матриці  $A$ ). З цього припущення, зокрема, випливає, що метод найшвидкішого спуску є асимптотично лінійним, а ітераційний процес, складений з двох його послідовних

ітерацій, - асимптотично стаціонарним (така асимптотична поведінка методу найшвидкішого спуску дозволила Форсайту та Моцкіну рекомендувати для його прискорення прийоми прискорення лінійних ітераційних процесів).

Доведення вказаного припущення було знайдене лише в 1959 році Н.Екейком за допомогою розвинутої ним техніки послідовних перетворень розподілу імовірностей. Результат Екейка вказує на глибокий зв'язок між варіаційними методами з періодичним відновленням та лінійними (зокрема, стаціонарними) ітераційними процесами.

Вивчення цього зв'язку продовжив Форсайт в 1968 році. Він розглянув s-кроковий метод найшвидкішого спуску

$$u_{k+1} = u_k + \gamma_1^{(k)} r_k + \gamma_2^{(k)} A r_k + \dots + \gamma_s^{(k)} A^{s-1} r_k, \quad k=0,1,\dots$$

де  $r_k = Au_k - f$ ,  $A$  - симетрична та додатна матриця, а ітераційні параметри  $\{\gamma_i^{(k)}, i=1,\dots,s\}$  вибирають з умови мінімуму квадратичного функціонала  $F(u_{k+1}) = 0.5 (Au_{k+1}, u_{k+1}) - (u_{k+1}, f)$ . Основну увагу Форсайт приділив опису множини граничних напрямків послідовності градієнтів  $r_k$ , оскільки інші асимптотичні характеристики методу можна знайти за допомогою цієї множини.

Позначимо через  $y_k = r_k / \|r_k\|$  послідовність нормованих градієнтів, через  $R(y_0)$  - множину граничних векторів послідовності  $\{y_{2k}, k=0,1, \dots\}$ , а через  $T$  - нелінійний оператор, визначений на частині одиничної сфери простору співвідношенням  $y_{k+1} = Ty_k$ . Нехай, крім того,  $y_0 = \xi e_1 + \dots + \eta e_n$  ( $\xi \neq 0, \dots, \eta \neq 0$ ) - розклад вектора  $y_0$  за системою власних векторів  $e_1, \dots, e_n$  матриці  $A$ , відповідних різним власним значенням. Основним результатом Форсайта є твердження: якщо  $n > s$ , то

1) розклад будь-якого вектора  $y \in R(y_0)$  за системою векторів

$e_1, \dots, e_n$  містить не менше  $s+1$  і не більше  $2s$  ненульових компонент;

2) якщо  $y \in R(y_0)$ , то  $T^2 y = y$ , тобто будь-який граничний вектор інваріантний за напрямом відносно двох послідовних ітерацій  $s$ -крокового методу найшвидкішого спуску;

3) множина  $R(y_0)$  - континуум (тобто замкнена та зв'язна множина, що складається, можливо, з однієї точки).

Відзначимо, що з результату Форсайта не випливають ні збіжність послідовності  $\{y_{2k}, k=0,1, \dots\}$ , ні асимптотична лінійність  $s$ -крокового методу найшвидкішого спуску. Оскільки і те, і інше мають місце, згідно з Екейком, для методу найшвидкішого спуску, виникає запитання: чи дійсно поведінка  $s$ -крокового методу так сильно відрізняється від поведінки методу найшвидкішого спуску?

Спираючись на результати чисельних експериментів з 2-кроковим методом, Форсайт зробив висновок, що асимптотична поведінка  $s$ -крокового методу найшвидкішого спуску в дійсності аналогічна асимптотичній поведінці методу найшвидкішого спуску. Він висловив у 1968 році гіпотезу: якщо  $n > s$ , то послідовність  $\{y_{2k}, k=0,1, \dots\}$  збігається.

Для скінченномірних просторів гіпотеза Форсайта не доведена і не спростована до цього часу. Для нескінченномірних просторів вона не вірна, оскільки послідовність  $\{y_{2k}, k=0,1, \dots\}$  може бути некомпактною (див. §1.6 дисертаційної роботи).

Недосконалість теоретичного аналізу  $s$ -крокових ітераційних методів варіаційного типу не дозволяє використовувати в повній мірі їх потенційні можливості, зокрема, застосовувати до них прийоми прискорення, розроблені Дж.Форсайтом, Т.Моцкіним, О.А.Самарським, Є.С.Ніколаєвим, А.Ф.Заболоцькою та іншими авторами для однокрокових методів типу найшвидкішого спуску. Таким чином, дослідження поведінки (зокрема, асимптотичної)

s-крокових ітераційних методів варіаційного типу є актуальною проблемою обчислювальної математики.

Всі ітерації s-крокового методу здійснюються однотипово. У принципі можна побудувати ітераційний процес, що являє собою комбінацію різних ітераційних методів (такий ітераційний процес природно назвати комбінованим).

Першим прикладом комбінованих ітераційних методів варіаційного типу є, мабуть, метод двоступінчатого градієнтного спуску (д. г. с.), який запропонували в 1980 році В.В.Єрмаков та М.М.Каліткін для розв'язування систем лінійних рівнянь з додатною матрицею. Кожна непарна ітерація д. г. с. виконується за методом мінімальних нев'язок, а кожна парна - за методом найшвидкішого спуску.

Незважаючи на простоту конструкції методу д. г. с., ніяких теоретичних результатів про його збіжність, а тим більш про швидкість збіжності, В.В.Єрмаков і М.М.Каліткін не отримали. На підставі чисельних експериментів вони дійшли до висновку, що д. г. с. кращий за методи найшвидкішого спуску та мінімальних нев'язок, взяті окремо, та його швидкість наближається до швидкості збіжності методу спряжених градієнтів. Але С.П.Воскобойніков, Ю.В.Сеніченков та І.А.Цукерман в 1983 році показали (знову ж таки за допомогою чисельних експериментів), що для несиметричних матриць д. г. с., взагалі кажучи, не ефективний.

Деяка протилежність висновків наведених вище авторів вказує на необхідність доповнення результатів чисельних експериментів теоретичними дослідженнями. Труднощі таких досліджень виникають, зокрема, через те, що поведінка д. г. с. істотно відрізняється від поведінки методів, що його складають. Наприклад, чисельні експерименти показали, що метод д. г. с. навіть для симетричних матриць не є асимптотично лінійним, і

його ітераційні параметри можуть вести себе досить хаотично, хоч методи найшвидкішого спуску та мінімальних нев'язок, взяті окремо, асимптотично лінійні.

Отже, дослідження швидкості збіжності комбінованих ітераційних методів варіаційного типу є актуальною проблемою обчислювальної математики.

Оскільки не існує загальної схеми, яка б містила всілякі багатокрокові ітераційні методи варіаційного типу, під цим терміном у дисертаційній праці розуміємо такі відомі ітераційні процеси, як  $s$ -крокові варіаційні методи розв'язування лінійних операторних рівнянь, явні та неявні  $s$ -крокові методи найшвидкішого спуску для задач на власні значення (що містять  $s$ -кроковий метод Ланцоша),  $s$ -кроковий метод спряжених градієнтів Полака-Ріб'єра для нелінійних задач, а також комбіновані ітераційні методи варіаційного типу.

*Метою даної роботи є:*

- 1) побудова асимптотичної теорії  $s$ -крокових ітераційних методів варіаційного типу;
- 2) дослідження швидкості збіжності комбінованих ітераційних методів варіаційного типу;
- 3) розробка на основі асимптотичної теорії прийомів прискорення  $s$ -крокових ітераційних методів варіаційного типу.

*Загальна методика досліджень.*

За основу досліджень взяті методи теорії ітераційних процесів та теорії лінійних операторів в гільбертовому просторі.

### *Наукова новизна результатів:*

- отримані умови стабілізації та непокращувані оцінки швидкості збіжності  $s$ -крокового методу розв'язування лінійних операторних рівнянь та  $s$ -крокового методу Ланцоша;
- досліджена асимптотична поведінка ітераційних параметрів  $s$ -крокових методів варіаційного типу та доведено такий аналог гіпотези Форсайта: якщо за даного початкового наближення  $s$ -кроковий метод не стабілізується і не збігається суперлінійно, то існують граничні ітераційні параметри методу по парних (непарних) ітераціях. Отже, за вказаних умов,  $s$ -кроковий метод є асимптотично лінійним, а ітераційний процес, що складається з двох його послідовних ітерацій, - асимптотично стаціонарним;
- вивчені асимптотичні напрями похибки  $s$ -крокового методу варіаційного типу та отримані аналоги результатів Екейка та Форсайта;
- визначені істотні області значень асимптотичних швидкостей збіжності  $s$ -крокового варіаційного методу розв'язування лінійних операторних рівнянь та  $s$ -крокового методу Ланцоша;
- отримані двосторонні оцінки осереднених швидкостей збіжності комбінованих ітераційних методів варіаційного типу.

Вірогідність результатів впливає з їх строгих математичних доведень.

### *Практична значимість роботи.*

Результати дисертації можуть бути використані для підвищення ефективності  $s$ -крокових методів варіаційного типу (для прискорення їх збіжності, для формування критеріїв закінчення), а також для отримання додаткової інформації про оператори задачі практично без додаткових обчислень. Крім того, розвинута в роботі методику можна використовувати при дослідженні інших ітераційних методів варіаційного типу.

### *Апробація роботи.*

Основні результати доповідалися на III Республіканській конференції "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" (Канев, 1982), на науковому семінарі "Питання теорії різницевих схем" проф. В.Л.Макарова в Київському університеті ім. Тараса Шевченка, на науковому семінарі акад. О.А.Самарського в Московському університеті ім. М.В. Ломоносова.

### *Публікації.*

Результати виконаних досліджень надруковані в 14 наукових статтях та тезах доповідей.

### *Структура та об'єм роботи.*

Дисертація складається з вступу, п'яти розділів та додатку; вона містить 265 сторінок машинописного тексту. Бібліографія складається з 164 найменувань.

## КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

В розділі 1 вивчаються  $s$ -крокові ітераційні методи варіаційного типу розв'язування лінійних операторних рівнянь  $Au = f$  в гільбертовому просторі. Означення та способи реалізації цих методів наведені в §1.1. Означення спирається на загальну теорію ітераційних методів Самарського та охоплює широкий клас ітераційних процесів, включаючи неявні  $s$ -крокові методи найшвидкішого спуску, спряжених градієнтів, спряжених нев'язок, спряжених поправок та спряжених похибок. Однак, на відміну від теорії Самарського, оператори  $A$ ,  $B$ ,  $D$  ітераційної схеми не обов'язково обмежені; відносно них припускаємо:

- 1) області визначення  $D_A$ ,  $D_B$ ,  $D_D$  операторів  $A$ ,  $B$ ,  $D$  щільні в  $H$ ;
- 2) оператор  $D$  самоспряжений та додатно визначений в  $H$ ;

3) область визначення  $D_{B^{-1}A}$  оператора  $B^{-1}A$  щільна в енергетичному просторі  $H_D$  і  $\forall u, v \in D_{B^{-1}A} \cap H_D$

$$а) B^{-1}Au \in H_D, \quad б) (B^{-1}Au, v)_D = (u, B^{-1}Av)_D,$$

$$в) v_1 \|u\|_D^2 \leq (B^{-1}Au, u)_D \leq v_2 \|u\|_D^2, \quad 0 < v_1 \leq v_2.$$

Наведені вище припущення виконуються, наприклад, якщо  $A$  та  $B$  - самоспряжені додатно визначені оператори з щільними в  $H$  областями визначення, причому  $D_A = D_B$  (оператори  $A$  та  $B$  подібні) і  $D = A$ .

Для скінченномірних просторів  $D_A = D_B = D_D = D_{B^{-1}A} = H$ , а умови б), в), записані у вигляді  $(DB^{-1}Au, v) = (u, DB^{-1}Av)$ ,  $v_1(Du, u) \leq (DB^{-1}Au, u) \leq v_2(Du, u)$  еквівалентні умовам самоспряженого, у значенні Самарського, випадку: оператор  $DB^{-1}A$  самоспряжений та додатно визначений в  $H$ , а  $v_1, v_2$  - постійні енергетичної еквівалентності операторів  $D$  та  $DB^{-1}A$ .

З умови 3) випливає, що оператор  $B^{-1}A$  може бути розширений до обмеженого самоспряженого та додатно визначеного в енергетичному просторі  $H_D$  оператора  $K$ . За означенням послідовні наближення  $s$ -крокового методу пов'язані між собою рекурентним співвідношенням

$$u_{k+1} = u_k + \gamma_1^{(k)} K z_k + \dots + \gamma_s^{(k)} K^s z_k, \quad k=0,1,\dots,$$

де  $u_0$  - довільне початкове наближення з  $H_D$ ,  $z_k = u_k - u^*$ ,  $u^*$  - точний розв'язок рівняння  $Au = f$  (припускаємо, що  $u^* \in H_D$ ), а

ітераційні параметри  $\{ \gamma_i^{(k)}, i=1, \dots, s \}$  надають мінімум квадратичному функціоналу  $F(u_{k+1}) = \|u_{k+1} - u^*\|_D^2$ .

Для чисельної реалізації  $s$ -крокового методу в роботі наведені формули тришарової схеми та схеми з поправкою методу спряжених напрямів з відновленням через  $s$  ітерацій.

В §1.2 встановлена тотожність

$$(z_{k+2} \cdot z_k)_D = \|z_{k+1}\|_D^2, \quad k=0,1,\dots, \quad (1)$$

яка відіграє важливу роль в аналізі  $s$ -крокового методу. За допомогою цієї тотожності в §1.3 знайдена умова закінчення  $s$ -крокового методу за скінченну кількість ітерацій (умова стабілізації): якщо вектори  $z_0, Kz_0, \dots, K^s z_0$  лінійно залежні, то  $u_1 = u_2 = \dots = u^*$ , інакше  $u_k \neq u^*$ ,  $k=0,1, \dots$ . Цей результат дозволяє розглядати в подальшому тільки такі початкові наближення, за яких вектори  $z_0, Kz_0, \dots, K^s z_0$  лінійно незалежні (множина таких  $z_0$  позначається через  $\mathcal{U}$ ). Відзначимо, що для неквадратичних функціоналів простих умов стабілізації  $s$ -крокового методу, подібних попередньому, взагалі кажучи не існує (винятком є  $s$ -кроковий метод Ланцоша, який розглядається в другому розділі).

Тотожність (1) є також основою для досліджень швидкості збіжності  $s$ -крокового методу, виконаних в §1.4. Швидкість збіжності  $s$ -крокового методу з початковим наближенням  $u_0$  характеризується послідовністю  $\rho_k(u_0) = \|z_{k+1}\|_D / \|z_k\|_D$ ,  $k=0,1, \dots$  (величина  $\rho_k(u_0)$  визначає швидкість спадання функціонала, що мінімізується, на  $(k+1)$ -ій ітерації). Відносно цієї послідовності доведено наступне твердження.

**Теорема 1.4.1.** *Якщо  $u_0 - u^* \in \mathcal{U}$ , то послідовність  $\rho_k(u_0)$  монотонно не спадає та обмежена зверху, тобто*

$$\rho_k(u_0) \leq \rho_{k+1}(u_0) \leq \rho_S(u_0) \leq \rho_S^* < 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

де  $\rho_S^*(u_0) = \max_{t \in \Sigma_0} |\pi_S(t, u_0)|$ ,  $\rho_S^* = \max_{t \in \text{sp}(K)} |\pi_S(t)|$ ,  $\Sigma_0$  - множина точок росту функції розподілу  $\sigma_0(t) = (E_t z_0, z_0)_D$  вектора  $z_0$  ( $E_t$  - спектральна функція оператора  $K$ ),  $\pi_S(t, u_0)$  та  $\pi_S(t)$  - многочлени від змінної  $t$  степеня  $s$ , які найменш відхиляються від нуля відповідно на множині  $\Sigma_0$  та спектрі  $\text{sp}(K)$  оператора  $K$ .

Отже, для будь-якого наближення  $u_0$   $s$ -кроковий метод збігається принаймні як геометрична прогресія із знаменником  $\rho_S^*(u_0)$ , причому зі збільшенням кількості ітерацій, швидкість збіжності методу може лише зменшуватися.

Далі розглядається питання про точність одержаних в теоремі 1.4.1 оцінок швидкості збіжності  $s$ -крокового методу.

**Теорема 1.4.2.** Якщо спектр оператора  $K$  містить більше, ніж  $s$  точок, то для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує початкове наближення  $u_0(\varepsilon)$  таке, що  $\rho_S^* - \varepsilon \leq \rho_k(u_0(\varepsilon)) \leq \rho_S^*$ ,  $k=0, 1, \dots$ ; якщо, до того ж, спектр оператора  $K$  складається тільки із власних значень, то існує початкове наближення  $u_0$  таке, що

$$\rho_k(u_0) = \rho_S^*(u_0) = \rho_S^*, \quad k = 0, 1, \dots$$

Отже, оцінка  $\rho_k(u_0) \leq \rho_S^*$ ,  $k = 0, 1, \dots$  - непокращувана, а для операторів  $K$  з чисто точковим спектром - досяжна.

В §1.5 вивчається асимптотична поведінка ітераційних параметрів  $s$ -крокового методу. Доведено аналог гіпотези Форсайта.

**Теорема 1.5.** Якщо  $u_0 - u^* \in \mathcal{U}$ , то існують граничні параметри  $s$ -крокового методу

$$\gamma_i^v = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_i^{(2k+v)}, \quad i = 1, \dots, s; \quad v = 0, 1,$$

які залежать від початкового наближення.

З цього твердження випливає, зокрема, що  $s$ -кроковий метод є асимптотично лінійним, а ітераційний процес, що складається з двох його послідовних ітерацій, - асимптотично стаціонарним. Отже, асимптотична поведінка  $s$ -крокового методу в гільбертовому

просторі цілком аналогічна асимптотичній поведінці методу найшвидкішого спуску в скінченномірному просторі.

В §1.6 вивчена асимптотична поведінка нормованих похибок  $y_k = z_k / \|z_k\|_D$  s-крокового методу. Параграф складається з трьох пунктів. В першому отримані аналоги результатів Екейка та Форсайта в термінах функцій розподілу  $\varphi_k = \varphi_k(t) = (E_t y_k, y_k)_D$  векторів  $y_k$ .

Нехай

$$p^{(v)}(t) = 1 + \gamma_1^v t + \dots + \gamma_s^v t^s, \quad v = 0, 1; \quad q(t) = p^{(1)}(t) p^{(0)}(t) + \rho^2,$$

де  $\gamma_i^v = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_i^{(2k+v)}$ ,  $i = 1, \dots, s$ ;  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k(u_0)$ . Корені многочленів

$p^{(v)}(t)$ ,  $v = 0, 1$ , та  $q(t)$  дійсні та розміщені на відрізку  $[v_1, v_2]$ .

Позначимо через  $\mathcal{N}$  множину коренів многочлена  $q(t)$ .

Нехай  $\Phi_v$  - множина граничних функцій послідовності  $\{\varphi_{2k+v}, k=0, 1, \dots\}$  відносно поточної збіжності, а  $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$  - множина граничних функцій послідовності  $\{\varphi_k, k = 0, 1, \dots\}$ .

*Лема 1.6.3. Будь-яка функція  $\varphi \in \Phi$  кусково стала та має не менше, ніж  $s+1$ , та не більше, ніж  $2s$ , стрибків, причому точки стрибків належать множині  $\mathcal{N} \cap \Sigma_0$ .*

Отже, опис множини  $\Phi$  зводиться до опису деякої підмножини скінченномірного простору. А саме, нехай  $\chi_1 < \dots < \chi_N$  - впорядковані елементи множини  $\mathcal{N} \cap \Sigma_0$ . Позначимо через  $\mathcal{M}$  множину неспадних на проміжку  $]-\infty, \infty[$  дійсних функцій, через  $R^N$  - N-мірний дійсний евклідовий простір і розглянемо відображення  $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow R^N$ , що задається формулою

$$\mathcal{F}\psi = (\psi(\chi_1 + \varepsilon) - \psi(\chi_1 - \varepsilon), \dots, \psi(\chi_N + \varepsilon) - \psi(\chi_N - \varepsilon)),$$

де число  $\varepsilon > 0$  вибирається так, щоб інтервали  $\Delta_i(\varepsilon) = [\chi_i - \varepsilon, \chi_i + \varepsilon[$ ,  $i=1, \dots, N$ , попарно не перетиналися. Відображення  $\mathcal{F}$  встановлює

взаємно однозначне співвідношення між множиною  $\Phi$  та його скінченномірним образом  $V = \mathcal{F}\Phi$ , причому послідовність  $\{\varphi_{k_i}, i=1,2,\dots\}$  поточно збігається до  $\varphi$  тоді і тільки тоді, коли послідовність  $\{\mathcal{F}\varphi_{k_i}, i=1,2,\dots\}$  збігається в просторі  $R^N$  до  $\mathcal{F}\varphi$ .

Позначимо через  $W_v, v \in \{0,1\}$ , множину невід'ємних розв'язків  $(h_1, \dots, h_N)$  системи лінійних рівнянь

$$h_1 + \dots + h_N = 1, \quad \sum_{i=1}^N \chi_i^{j(v)}(\chi_i) h_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Покладемо  $V_v = \mathcal{F}\Phi_v, v = 0, 1$ . Аналогом результату Форсайта є

**Теорема 1.6.1.** *Якщо  $u_0 - u^* \in \mathcal{U}$ , то*

1. *Будь-який вектор з  $V$  має не менш, ніж  $s+1$ , і не більш, ніж  $2s$  ненульових компонент.*
2.  $V_v \subseteq W_v, v = 0, 1$ .
3. *Якщо послідовність  $\{\varphi_{k_i}, i = 1, 2, \dots\}$  поточно збігається до функції  $\varphi \in \Phi$ , то до цієї ж функції збігається поточно послідовність  $\{\varphi_{k_i+2}, i = 1, 2, \dots\}$ .*
4. *Множини  $V_v, v = 0, 1$ , є континууми (тобто, непорожні зв'язні та замкнені в  $R^N$  множини).*

Узагальненням результату Екейка є

**Теорема 1.6.2.** *Якщо  $u_0 - u^* \in \mathcal{U}$ , то послідовність  $\{\varphi_{2k+v}, k=0,1,\dots\}$ ,  $v \in \{0, 1\}$ , функцій розподілу нормованих похибок однокрокового методу поточно збігається до кусково сталої функції зі стрибками в точках  $\chi_1, \chi_2$ .*

З теореми 1.6.1, зокрема, випливає, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left\| E_{\Delta_i(\varepsilon)} y_k \right\|_D^2 = 1,$$

тобто, нормовані похибки  $s$ -крокового методу асимптотично виводяться в підпростір  $(E_{\Delta_1(\varepsilon)} + \dots + E_{\Delta_N(\varepsilon)})H_D$ .

В другому пункті §1.6 описана множина  $\mathfrak{R}$  граничних векторів послідовності  $\{y_k, k = 0, 1, \dots\}$ .

Позначимо через  $\tilde{\chi}_1 < \dots < \tilde{\chi}_n$  власні значення оператора  $K$ , які належать множині  $\{\chi_1, \dots, \chi_N\}$ . Нехай  $\tilde{H}_D^{(i)}$  - власний підпростір оператора  $K$ , відповідний до власного значення  $\tilde{\chi}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\tilde{y}_0^{(i)}$  - ортогональна проєкція вектора  $y_0$  на підпростір  $\tilde{H}_D^{(i)}$ ,  $L_n$  - лінійна оболонка, натягнута на вектори  $\tilde{y}_0^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а  $\mathcal{B}$  - базис підпростору  $L_n$ , складений з ненульових векторів  $\tilde{y}_0^{(i)}$ . Позначимо через  $Y_v, v \in \{0, 1\}$ , множину одиничних в  $H_D$  векторів  $y \in L_n$ , що задовольняють рівності

$$(K^j p^{(v)}(K)y)_D = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Узагальненням і уточненням результату Форсайта в термінах граничних векторів є

**Теорема 1.6.3.** *Якщо  $\mathfrak{R} \neq \emptyset$ , то*

1.  $\mathfrak{R} \subseteq L_n$  і розклад будь-якого вектора з  $\mathfrak{R}$  за базисом  $\mathcal{B}$  містить не менше, ніж  $s+1$ , та не більше, ніж  $2s$  ненульових компонент.
2.  $\mathfrak{R}_v \subseteq Y_v, \quad v = 0, 1$ .
3. Якщо послідовність  $\{y_{k_i}, i = 1, 2, \dots\}$  збігається в  $H_D$ , то в  $H_D$  збігається послідовність  $\{y_{k_i+2}, i = 1, 2, \dots\}$  і їх границі однакові.
4. Якщо послідовність  $\{y_k, k = 0, 1, \dots\}$  компактна в  $H_D$ , то множини  $\mathfrak{R}_v, v=0,1$ , - континууми (тобто, непорожні зв'язні та замкнені в  $H_D$  множини).

Узагальненням результату Екейка є

Теорема 1.6.4. Якщо послідовність нормованих похибок  $\{y_k, k=0,1, \dots\}$  однокрокового методу компактна в  $H_D$ , то послідовності  $\{y_{2k+v}, k=0,1, \dots\}, v=0,1$ , збігаються в  $H_D$ .

В третьому пункті §1.6 отриманий критерій компактності послідовності  $\{y_k, k=0,1, \dots\}$  за умови, що граничними точками множини  $\Sigma_0$  можуть бути лише числа  $v_* = \min \Sigma_0, v^* = \max \Sigma_0$ .

Теорема 1.6.5. Нехай граничними точками множини  $\Sigma_0$  можуть бути лише числа  $v_*, v^*$ . Тоді, якщо  $v_*, v^*$  - власні значення оператора  $K$ , то послідовність  $\{y_k, k=0,1, \dots\}$  компактна в  $H_D$ , інакше  $\mathfrak{R} = \emptyset$ .

Теорему 1.6.5 можна застосувати до операторів  $K = \alpha E + C$ , де  $\alpha > 0, C$  - додатній компактний самоспряжений оператор. Зокрема, якщо число  $\theta$  - точка спектра, але не власне значення оператора  $C$ , то існує початкове наближення таке, що  $\mathfrak{R} = \emptyset$ .

В теоремі 1.6.6 доведено, що для однокрокового методу наведений вище критерій компактності послідовності  $y_k$  вірний і без припущення відносно граничних точок множини  $\Sigma_0$ .

У §1.7 розглянуто випадок скінченномірного простору. В п.1 описана множина  $\mathfrak{X}$  одиничних векторів, інваріантних за напрямком відносно двох послідовних ітерацій  $s$ -крокового методу. Показано, що множина  $\mathfrak{X}$  складається з граничних векторів всіляких послідовностей  $\{y_k, k=0,1, \dots\}$ ; таким чином,  $y_0 \in \mathfrak{X}$  тоді і тільки тоді, коли послідовності  $\{y_{2k}, k=0,1, \dots\}, \{y_{2k+1}, k=0,1, \dots\}, \{\rho_k(u_0), k=0,1, \dots\}$  постійні. Отримане зображення множини  $\mathfrak{X}$  у вигляді об'єднання незліченної сукупності множин невід'ємних розв'язків систем лінійних рівнянь.

У другому пункті §1.7 визначена істотна область значень асимптотичної швидкості збіжності  $s$ -крокового методу відносно

міри Лебега. Під асимптотичною швидкістю збіжності розуміємо таку функцію від початкового наближення :

$$V(u_0) = \begin{cases} -\ln \rho(u_0), & u_0 - u^* \in \mathcal{U} \\ \infty, & u_0 - u^* \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

де  $\rho(u_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k(u_0)$ . Доведена

Теорема 1.7.3. Якщо  $\dim H \geq 2s+1$ , то

$$\text{vrai inf}_H V(u_0) = -\ln \rho_s^*, \quad \text{vrai sup}_H V(u_0) = -0.5 \ln \rho_{2s}^*,$$

де  $\rho_i^* = \max_{t \in \text{esp}(K)} |\pi_i(t)|$ ,  $\pi_i(t)$  - многочлен степеня  $i$ , що найменш

відхиляється від 0 на спектрі оператора  $K$  і  $\pi_i(0) = 1$ .

Отже, хоч функція  $V(u_0)$  необмежена, вона істотно обмежена відносно міри Лебега.

Теорема 1.7.3 дозволяє порівнювати багатокрокові методи між собою. Точніше, нехай  $\varepsilon > 0$  і

$$k_S(u_0, \varepsilon) = \min \{ k \mid \|u_k - u^*\|_D \leq \varepsilon \|u_0 - u^*\|_D \}.$$

Будемо говорити, що  $s_1$ -кроковий метод з початковим наближенням  $u_0$  асимптотично ефективніший за  $s_2$ -кроковий метод з початковим наближенням  $v_0$ , якщо існує  $\varepsilon(u_0, v_0) > 0$  таке, що для всіх  $0 < \varepsilon < \varepsilon(u_0, v_0)$  виконується нерівність  $s_1 k_{S_1}(u_0, \varepsilon) < s_2 k_{S_2}(v_0, \varepsilon)$ .

З теореми 1.7.3 випливає, що для майже всіх (за мірою Лебега) пар початкових наближень  $(u_0, v_0)$   $2s$ -кроковий метод асимптотично ефективніший за  $s$ -кроковий метод. Оскільки кількість арифметичних операцій, що необхідні для двох ітерацій  $s$ -крокового методу, практично дорівнює кількості арифметичних операцій при одній ітерації  $2s$ -крокового методу, то для майже всіх пар початкових наближень  $2s$ -кроковий метод асимптотично ефективніший за  $s$ -кроковий метод і щодо обчислювальних витрат.

В наступних двох розділах дисертаційної роботи теорія  $s$ -крокових ітераційних методів варіаційного типу, що розроблена в

розділі 1 стосовно лінійних операторних рівнянь, поширюється на задачі про власні значення, які зводяться до оптимізації відношення Релея. Оскільки властивості явних та неявних ітераційних методів обчислення власних значень істотно відрізняються і дослідження неявних методів не зводиться до вивчення явних за допомогою лінійних заміни (що має місце для ітераційних методів розв'язування лінійних операторних рівнянь), то в дисертації вивчення явних та неявних s-крокових методів обчислення власних значень проводиться окремо.

В розділі 2 досліджується явний s-кроковий метод найшвидшого спуску (скорочено: s-кроковий метод) при знаходженні межі спектра лінійного обмеженого самоспряженого оператора  $A$ , що діє в дійсному гільбертовому просторі  $H$ . Оскільки відшукування верхньої межі  $M$  спектра оператора  $A$ , зводиться, за допомогою заміни  $A$  на  $(-A)$ , до відшукування нижньої межі  $m$ , то ми обмежилися задачею мінімізації відношення Релея  $\mu(u) = (Au, u)/(u, u)$ . Зазначимо, що до цієї ж задачі зводиться також відшукування нижньої межі спектра пучка лінійних самоспряжених операторів  $(K, L)$ , де оператор  $L$  додатно визначений, а оператор  $A = L^{-1}K$  обмежений в енергетичному просторі  $H_L$ .

В §2.1 дано означення та вказані деякі способи чисельної реалізації s-крокового методу, зокрема за допомогою алгоритму Ланцоша (s-кроковий метод, реалізований за допомогою алгоритму Ланцоша, часто називають s-кроковим методом Ланцоша або методом Ланцоша з відновленням). Послідовні наближення s-крокового методу породжуються рекурентним співвідношенням

$$u_{k+1} = \sum_{i=0}^s \alpha_i^{(k)} A^i u_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

де ітераційні параметри  $\{\alpha_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, s\}$  вибираються з умов  $(-1)^S \alpha_S^{(k)} > 0$ ,  $\|u_{k+1}\| = 1$  і надають мінімум функціоналу  $\mu(u_{k+1})$ .

Нехай  $x_0 = u_0$ ,

$$x_{k-1} = A^S x_k + \gamma_{S-1}^{(k)} A^{S-1} x_k + \dots + \gamma_0^{(k)} x_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\gamma_i^{(k)} = \alpha_i^{(k)} / \alpha_S^{(k)}, \quad i=0, 1, \dots, S-1, \quad z_k = Ax_k - \mu_k x_k, \quad \nabla \mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

В § 2.2 доведена основна енергетична тотожність

$$(z_{k+2}, z_k) = \|z_{k+1}\|^2 - \nabla \mu_k (z_{k+2}, x_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

що відіграє таку ж важливу роль, як і тотожність (1) в першому розділі.

Будемо говорити, що  $s$ -кроковий метод з початковим наближенням  $u_0$  стабілізується, якщо для деякого номера  $k \in \{0, 1, \dots\}$  має місце рівність  $w_k = Au_k - \mu_k u_k = 0$ , тобто  $s$ -кроковий метод знаходить деяку власну пару оператора  $A$  за скінченне число ітерацій.

За допомогою тотожності (2) в §2.3 знайдена умова стабілізації  $s$ -крокового методу. Позначимо через  $\mathfrak{J}$  та  $\mathcal{U}$  множини одиничних векторів  $u_0$ , для яких вектори  $u_0, Au_0, \dots, A^{S+1}u_0$  відповідно лінійно залежні та лінійно незалежні.

**Теорема 2.3.** *Якщо  $u_0 \in \mathfrak{J}$ , то  $w_1 = 0$ , інакше  $u_k \in \mathcal{U}$ ,  $k=1,2,\dots$*

З теореми 2.3 випливає, що  $s$ -кроковий метод стабілізується тоді і тільки тоді, коли  $u_0 \in \mathfrak{J}$ . Отримана умова стабілізації цілком аналогічна умові стабілізації  $s$ -крокового методу при розв'язуванні лінійного операторного рівняння. З неї, зокрема, випливає, що, якщо власна пара оператора  $A$  не була знайдена за одну ітерацію  $s$ -крокового методу, то вона не буде знайдена і на наступних ітераціях.

Надалі відносно спектра оператора  $A$  і початкового наближення припускаємо, що

- 1)  $m > 0$ ,  $M = 1$  (це припущення не обмежує загальності результатів, але спрощує запис);
- 2)  $m$  - ізольована точка спектра, причому  $\text{sp}(A) \subseteq \{m\} \cup [m^*, 1]$ ,  $m < m^* < 1$ ;
- 3)  $\mu_0 < m^*$  (це припущення забезпечує збіжність  $\mu_k$  до  $m$ ).

В §2.4 досліджується швидкість збіжності  $s$ -крокового методу при вказаних вище припущеннях.

Нехай  $E_t$  - спектральна функція оператора  $A$ , а  $\sigma_k = \sigma_k(t) = (E_t x_k, x_k)$  - функція розподілу вектора  $x_k$ .

Позначимо через  $\Sigma_k$  множину точок росту функції  $\sigma_k$ , що належать відріzkу  $[m^*, 1]$ , а через  $\pi_s(t, u_0)$  многочлен від  $t$  степеня  $s$ , що найменше відхиляється від нуля на множині  $\Sigma_0$  і нормований умовою  $\pi_s(m, u_0) = 1$ . Покладаємо

$$\rho_S(u_0) = \max_{t \in \Sigma_0} |\pi_S(t, u_0)|, \quad \lambda_* = \min \Sigma_0, \quad \lambda^* = \max \Sigma_0.$$

Нехай  $H^{(1)}$  - власний підпростір оператора  $A$ , який відповідає власному значенню  $m$ . Розкладаємо вектор  $u_0$  на ортогональні складові  $u_0 = u_0^{(1)} + u_0^{(2)}$ ,  $u_0^{(1)} \in H^{(1)}$ ,  $u_0^{(2)} \perp H^{(1)}$  і утворимо вектор  $\tilde{u}_0 = u_0^{(1)} + \rho_S(u_0) u_0^{(2)}$ .

**Теорема 2.4.1.** Якщо  $u_0 \in \mathcal{U}$  та  $\mu_0 < m^*$ , то

$$\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} \leq \left( \frac{\rho_S(u_0)}{\|\tilde{u}_0\|} \right)^2 \leq \rho_S^2(u_0) \frac{\lambda_* - \mu_1}{\lambda_* - \mu_0} \quad (3)$$

З оцінки (3) випливає, що

$$\frac{\mu_1 - m}{\lambda_* - \mu_1} \leq \rho_S^2(u_0) \frac{\mu_0 - m}{\lambda_* - \mu_0} \quad (4)$$

Послідовне застосування нерівності (4) дає

$$\frac{\mu_k - m}{\lambda_* - \mu_k} \leq \rho_S^{2k}(u_0) \frac{\mu_0 - m}{\lambda_* - \mu_0}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

тобто послідовність  $\mu_k$  збігається до  $m$  принаймні зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником  $\rho_S^2(u_0)$ . Оцінка (4) непокращувана в тому розумінні, що коли  $\rho < \sup_{u_0} \rho_S(u_0)$ , то

$$\frac{\mu_1 - m}{\lambda_* - \mu_1} > \rho^2 \frac{\mu_0 - m}{\lambda_* - \mu_0}$$

для деякого початкового наближення  $u_0$  з  $\mu_0 < m$ . Однак, якщо на початкове наближення накласти додаткові обмеження, припустивши, наприклад, що значення  $\mu_0$  або  $\mu_1$  фіксоване, то оцінка (4)

може бути поліпшена. При цьому оцінка  $\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} \leq \left( \frac{\rho_S(u_0)}{\|\bar{u}_0\|} \right)^2$ , яка випливає з нерівності (3) залишається непокращуваною. Точніше, в § 2.4 доведена

**Теорема 2.4.2.** *Нехай  $H$  - скінченномірний простір. Якщо  $\dim H \geq s+2$ , то для будь-якого числа  $\mu$  ( $m < \mu < m^*$ ) існує початкове наближення  $u_0$  (яке залежить від  $\mu$ ) таке, що  $\mu_1 = \mu$  і*

$$\frac{\mu_1 - m}{\mu_0 - m} = \left( \frac{\rho_S(u_0)}{\|\bar{u}_0\|} \right)^2.$$

В § 2.5 досліджується асимптотична поведінка ітераційних параметрів  $s$ -крокового методу. Доведене слідуюче твердження.

**Теорема 2.5.** *Якщо  $u_0 \in \mathcal{U}$  і  $\mu_0 < m^*$ , то існують граничні ітераційні параметри*

$$\alpha_i^v = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^{(2k+v)}, \quad i = 0, 1, \dots, s; \quad v = 0, 1,$$

які залежать від початкового наближення.

Таким чином,  $s$ -кроковий метод при мінімізації відношення Релея є, як і при мінімізації квадратичного функціонала, асимп-

тотично лінійним, а процес, складений з двох послідовних ітерацій  $s$ -крокового методу, - асимптотично стаціонарним.

В §2.6 вивчається асимптотична поведінка нормованих градієнтів  $u_k = z_k/\|z_k\|$   $s$ -крокового методу. Факт існування граничних ітераційних параметрів  $s$ -крокового методу дозволив в цьому параграфі поширити результати Екейка та Форсайта на випадок функціонала Релея, заданого на гільбертовому просторі.

Структура § 2.6 аналогічна до структури § 1.6. В першому пункті отримані аналоги результатів Екейка та Форсайта в термінах функцій розподілу нормованих градієнтів. В другому пункті отримані аналоги вказаних результатів в термінах граничних векторів послідовності нормованих градієнтів, припускаючи, що ця послідовність компактна. В третьому пункті знайдені умови компактності послідовності  $u_k$ . Використовуючи ці умови, зокрема, повністю розв'язане питання про збіжність послідовності нормованих градієнтів однокрокового методу по парних (непарних) ітераціях.

Спираючись на результати досліджень асимптотичної поведінки нормованих градієнтів  $s$ -крокового методу, в § 2.7 доведена

збіжність послідовності  $\left\{ \frac{\mu_{k+1} - m}{\mu_k - m}, k = 0, 1, \dots \right\}$ , якщо тільки

$u_0 \in \mathcal{N}$ ,  $u_0^{(1)} \neq 0$  ( $u_0^{(1)}$  - ортогональна проекція вектора  $u_0$  на власний підпростір  $H^{(1)}$  оператора  $A$ ).

Цей факт дозволив визначити асимптотичну швидкість збіжності  $s$ -крокового методу, як слідуючу функцію від початкового наближення:

$$V(u_0) = \begin{cases} 0, & u_0^{(1)} = 0, \\ -0.5 \ln \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1} - m}{\mu_k - m}, & u_0^{(1)} \neq 0, u_0 \in \mathcal{N}, \\ \infty, & u_0^{(1)} \neq 0, u_0 \notin \mathcal{N} \end{cases}$$

Головним завданням §2.7 є відшукання істотної (за мірою Лебега) області значень асимптотичної швидкості збіжності  $s$ -крокового методу в скінченномірному просторі.

Нехай  $H$  - скінченномірний простір. Тоді

$$\text{sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad m = \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1, \quad \lambda_2 = m.$$

Позначимо через  $\pi_i(t)$  многочлен степеня  $i$ , що найменш відхиляється від нуля на множині  $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  та нормований умовою  $\pi_i(\lambda_1) = 1$ , а через  $\rho_i = \max_{j=2, \dots, n} |\pi_i(\lambda_j)|$  - величину відхилення. В §2.7 визначені істотні мінімум та максимум функції  $V(u_0)$  відносно міри Лебега  $\mathcal{Q}$ , що задана на одиничній сфері простору  $H$ .

Теорема 2.7.2. Якщо  $n \geq 2s+2$ , то

$$\text{vrai inf } V(u_0) = -\ln \rho_s, \quad \text{vrai sup } V(u_0) = -0.5 \ln \rho_{2s}$$

відносно лебегової міри  $\mathcal{Q}$ .

В розділі 3 вивчається неявний  $s$ -кроковий метод найшвидкішого спуску (скорочено:  $s$ -кроковий метод) при знаходженні найменшого власного значення і відповідного власного вектора узагальноної задачі на власні значення  $Mu = \lambda Lu$  в дійсному гільбертовому просторі  $H$ . Припускаємо, що

а) оператори  $M: D_M \rightarrow H$  та  $L: D_L \rightarrow H$  лінійні самоспряжені та додатно визначені з щільними в  $H$  областями визначення  $D_M$  і  $D_L$ , причому  $D_M \subseteq D_L$ ;

б) будь-яка множина, обмежена в енергетичному просторі  $H_M$ , компактна в енергетичному просторі  $H_L$ .

За цих припущень пучок операторів  $(M, L)$  має чисто точковий спектр  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , а власні вектори утворюють ортогональний базис у просторах  $H_M$  та  $H_L$ .

Відшукання  $\lambda_1$  та відповідного власного вектора зводиться до мінімізації узагального відношення Релея  $\mu(u) = \frac{\|u\|_M^2}{\|u\|_L^2}$  на

просторі  $H_M$ . Для мінімізації функціонала  $\mu(u)$  застосовується неявний  $s$ -кроковий метод (відмітимо, що мінімізація функціонала  $\mu(u)$  за допомогою явного  $s$ -крокового методу в нескінченномірному просторі не можлива, оскільки тоді оператор  $L^{-1}M$  не обмежений). Неявний  $s$ -кроковий метод відрізняється від явного тим, що використовує допоміжний лінійний самоспряжений і додатно визначений оператор  $B: D_B \rightarrow H$ , подібний до оператора  $M$ , тобто  $D_B = D_M$ . Послідовні наближення неявного  $s$ -крокового методу утворюються за правилом:

$$u_{k+1} = \sum_{i=0}^s \alpha_i^{(k)} A_k^i u_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

де  $u_0$  - довільний вектор з  $D_M$  ( $\|u_0\|_L = 1$ ), оператор  $A_k = B^{-1}(M - \mu_k L)$ ,  $\mu_k = \mu(u_k)$ , а ітераційні параметри  $\{\alpha_i^{(k)}, i = 0, 1, \dots, s\}$  надають мінімуму нормі  $\|u_{k+1}\|_M$  за умови  $\|u_{k+1}\|_L = 1$ .

Відносно швидкості збіжності неявного  $s$ -крокового метода в § 3.2 доведена

**Теорема 3.2.** *Якщо  $\mu_0 < \lambda_2$ , то послідовність  $\mu_k$ , яка породжується  $s$ -кроковим методом, збігається до  $\lambda_1$  принаймні зі швидкістю геометричної прогресії і для будь-якого  $k = 0, 1, \dots$  мають місце оцінки*

$$\mu_{k+1} - \lambda_1 \leq \max \{0.5(\mu_k - \lambda_1) - 0.5\lambda_1, \rho_k(\mu_k - \lambda_1)\},$$

$$\|u_k - u_k^{(1)}\|_L^2 \leq \frac{\mu_k - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \|u_k - u_k^{(1)}\|_M^2 \leq \frac{\mu_k - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_2$$

$$\text{де } \rho_k = 1 - d_k, \quad d_k = \frac{v_1 \mu_k (\lambda_2 - \mu_k)}{v_2 (1 + 2\zeta_k) \lambda_1 \lambda_2}, \quad \zeta_k = \sqrt{(\mu_k - \lambda_1) \mu_k \lambda_1^{-1}}$$

$u_k^{(1)}$  - ортогональна проекція в просторі  $H_L$  вектора  $u_k$  на власний підпростір, відповідний власному значенню  $\lambda_1$ .

Більш детальне вивчення послідовності  $\mu_k$  показує, що поведінка ітераційного процесу (5) істотно відрізняється навіть в скінченномірному просторі від поведінки ітераційних процесів, що досліджувалися в попередніх розділах.

Так, для будь-якого номера  $k$  можна вказати оператори  $M$ ,  $L$ ,  $B$  та початкове наближення  $u_0$  такі, що  $\mu_{k-1} \neq \lambda_1$ ,  $\mu_k = \lambda_1$ . До того ж, виявилось, що для деяких початкових наближень  $\mu_k \neq \lambda_1$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , але послідовність  $\mu_k$  збігається до  $\lambda_1$  суперлінійно. Ці обставини вимагали нових підходів до вивчення  $s$ -крокового методу. В першу чергу необхідно було описати можливу поведінку послідовності  $\mu_k$ . Використовуючи апроксимацію функціонала  $\mu(u) - \lambda_1$  допоміжним квадратичним функціоналом  $F(u) = ((M - \lambda_1 L)u, u)$ , в §3.3 доведене наступне твердження:

**Теорема 3.3.** *Нехай  $u_0$  - довільне початкове наближення, а  $\mu_k$  - послідовність, що породжується  $s$ -кроковим методом. Якщо*

$\mu_0 < \lambda_2$ , то:

1) або для деякого номера  $k$   $\mu_k = \lambda_1$ ,

2) або для будь-якого  $\varepsilon > 0$   $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1} - \lambda_1}{(\mu_k - \lambda_1)^{1.25 - \varepsilon}} = 0$ ,

3) або існує границя  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1} - \lambda_1}{\mu_k - \lambda_1} > 0$

Будемо говорити, що послідовність  $(\mu_k, u_k)$  має властивість майже лінійності, якщо для неї справедлива третя альтернатива. Надалі розглядаються лише такі початкові наближення, за яких послідовність  $(\mu_k, u_k)$  має властивість майже лінійності.

В §3.4 вивчена асимптотична поведінка ітераційних параметрів  $s$ -крокового методу.

Теорема 3.4. Якщо послідовність  $(\mu_k, u_k)$  має властивість майже лінійності, то існують граничні ітераційні параметри

$$\alpha_i^v = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^{(2k+v)}, \quad i = 0, 1, \dots, s; \quad v = 0, 1, \quad \alpha_0^0 = \alpha_0^1 = 1,$$

які залежать від початкового наближення.

Позначимо  $w_k = A_k u_k$ ,  $A = B^{-1}(M - \lambda_1 L)$ . В § 3.5 досліджується асимптотична поведінка нормованих градієнтів

$u_k = w_k / \|w_k\|_B$  припускаючи, що послідовність  $(\mu_k, u_k)$  має властивість майже лінійності. Отримані аналоги результатів Екейка та Форсайта як в термінах функцій розподілу, так і в термінах граничних векторів послідовності  $u_k$ . Зокрема отримана оцінка

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1} - \lambda_1}{\mu_k - \lambda_1} \leq \max_{t \in \Sigma} |\pi_\Sigma(t)|^2$ , де  $\Sigma = \text{sp}(A) \setminus \{0\}$ ,  $\pi_\Sigma(t)$  - многочлен степеня  $s$ , що найменше відхиляється від нуля на множині  $\Sigma$  та нормований умовою  $\pi_\Sigma(0) = 1$ .

Зазначимо, що результати розділу 3 легко поширюються на випадок напівобмежених самоспряжених операторів  $M$ .

В розділі 4 досліджуються  $s$ -крокові методи мінімізації сильно опуклих функціоналів в гільбертовому просторі.

Позначимо через  $F(u)$  двічі неперервно диференційовний за Фреше сильно опуклий дійсний функціонал, заданий на дійсному гільбертовому просторі  $H$ . Для відшукування точки мінімуму  $u^*$  функціонала  $F(u)$  використаємо  $s$ -кроковий метод спряжених градієнтів, кожна ітерація якого являє собою  $s$  кроків методу спряжених градієнтів Полака-Риб'єра. Перехід від  $k$ -го наближення  $u^{(k)}$  до  $u^{(k+1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , здійснюється за обчислювальною схемою:

а) початкове присвоювання:  $u_0^{(k)} = u^{(k)}$ ,  $h_0^{(k)} = g_0^{(k)} = -F'(u_0^{(k)})$ .

б) для  $i = 0, 1, \dots, s-1$  виконуються дії 1) - 4):

1) якщо  $g_i^{(k)} = 0$ , то покладемо  $\lambda_i^{(k)} = 0$ , інакше число  $\lambda_i^{(k)}$  є точкою мінімуму функції  $F(u_i^{(k)} + \lambda h_i^{(k)})$  від змінної  $\lambda$ ;

2) покладемо  $u_{i+1}^{(k)} = u_i^{(k)} + \lambda h_i^{(k)}$ ;

3) обчислимо  $g_{i+1}^{(k)} = -F'(u_{i+1}^{(k)})$ ,

$$\gamma_i^{(k)} = \begin{cases} \frac{(g_{i+1}^{(k)} - g_i^{(k)}, g_{i+1}^{(k)})}{\|g_i^{(k)}\|^2}, & g_i^{(k)} \neq 0 \\ 0, & g_i^{(k)} = 0 \end{cases}$$

4) покладемо  $h_{i+1}^{(k)} = g_{i+1}^{(k)} + \gamma_i^{(k)} h_i^{(k)}$ ;

в) покладемо  $u^{(k+1)} = u_S^{(k)}$ .

В §4.2 вивчений можливий характер збіжності  $s$ -крокового методу спряжених градієнтів. Розвиваючи підхід розділу 3 показано, що цей метод може збігатися або за скінченне число ітерацій, або суперлінійно, або майже лінійно. Точніше, припускаючи, що операторнозначна функція  $F''(u)$  задовольняє умові Ліпшица, доведений такий результат:

**Теорема 4.2.** *Нехай  $u_0$  - довільне початкове наближення, а  $u^{(k)}$  - послідовність, що породжується  $s$ -кроковим методом спряжених градієнтів. Тоді*

1) або для деякого номера  $k$   $u^{(k)} = u^*$ ;

2) або послідовності

$$\frac{\|u^{(k+1)} - u^*\|}{\|u^{(k)} - u^*\|^{1.5}}, \quad \frac{F(u^{(k+1)}) - F(u^*)}{[F(u^{(k)}) - F(u^*)]^{1.5}}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

обмежені;

3) або існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(u^{(k+1)}) - F(u^*)}{F(u^{(k)}) - F(u^*)} > 0. \quad (6)$$

Щоб довести це твердження послідовність  $u^{(k)}$  апроксимува-  
лася послідовними наближеннями  $s$ -крокового методу, який  
застосовувався до квадратичного функціонала

$$f(u) = 0.5 (A(u - u^*), u - u^*),$$

де  $A = F''(u^*)$ . Позначимо через  $u^{(k,1)}$  перше наближення  $s$ -кроко-  
вого методу з початковим наближенням  $u^{(k)}$ , який застосовувався  
до функціонала  $f(u)$ . Доведена така оцінка (лема 4.2.2):

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k,1)}\| \leq \kappa \|u^{(k)} - u^*\|^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

де число  $\kappa$  не залежить від  $u^{(k)}$ . Вектор  $u^{(k,1)}$  можна подати у  
вигляді

$$u^{(k,1)} = u^{(k)} + \sum_{i=1}^S \alpha_i^{(k)} A^i z_k, \quad z_k = u^{(k)} - u^*. \quad (8)$$

Якщо  $\dim H \leq s$ , то вектори  $z_k, Az_k, \dots, A^S z_k$  лінійно залежні, тому  
 $u^{(k,1)} = u^*$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . З оцінки (7) випливає, що в цьому випадку  
послідовність  $u^{(k)}$  збігається до  $u^*$  принаймні з квадратичною  
швидкістю. Це - відомий результат Коена.

Під ітераційними параметрами  $s$ -крокового методу спряже-  
них градієнтів на  $k$ -ій ітерації будемо розуміти коефіцієнти  
розкладу  $\{\alpha_i^{(k)}, i = 1, \dots, s\}$  вектора  $u^{(k,1)}$  за формулою (8). В § 4.3  
доведене існування граничних ітераційних параметрів  $s$ -крокового  
методу спряжених градієнтів при умові, що послідовність  $u^{(k)}$   
майже лінійна (тобто, існує границя (6)).

**Теорема 4.3.** *Якщо послідовність  $u^{(k)}$  майже лінійна, то  
існують граничні ітераційні параметри*

$$\alpha_i^v = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_i^{(2k+v)}, \quad i = 1, \dots, s; \quad v = 0, 1,$$

які залежать від початкового наближення.

В §4.4 досліджується асимптотична поведінка нормованих похибок  $w_k = z_k / \|z_k\|$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $s$ -крокового методу спряжених градієнтів у припущенні, що послідовність  $u^{(k)}$  майже лінійна. Отримані аналоги результатів Екейка та Форсайта як в термінах функцій розподілу, так і в термінах граничних векторів послідовності  $w_k$ . Зокрема, показано, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{F(u^{(k+1)}) - F(u^*)}{F(u^{(k)}) - F(u^*)}} \leq \max_{\text{sp}(A)} |\pi_S(t)|,$$

де  $\pi_S(t)$  - многочлен степеня  $s$ , який найменш відхиляється від нуля на спектрі оператора  $A$  та нормований умовою  $\pi_S(0) = 1$ .

Зазначимо, що обчислювальна схема Полака-Риб'єра, яка записана в енергетичному просторі  $H_B$  ( $B$  - лінійний самоспряжений та додатно визначений оператор в просторі  $H$ ), породжує неявний  $s$ -кроковий метод спряжених градієнтів, отже, результати розділу 4 вірні і для цього методу.

В розділі 5 вводиться поняття комбінованих ітераційних методів варіаційного типу і проводиться їх теоретичний аналіз на основі осереднених швидкостей збіжності.

Нехай  $A$  - лінійний самоспряжений обмежений оператор з границями спектра  $0 < m < M$ , що діє в дійсному гільбертовому просторі  $H$ . Послідовні наближення  $s$ -крокового  $\alpha$ -процесу до розв'язку  $u$  рівняння  $Au = f$  задаються формулою

$$u_{k+1}^{(\alpha)} = u_k^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^S \gamma_i^{(\alpha)} (z_k^{(\alpha)}) A^{i-1} z_k^{(\alpha)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

де  $\alpha, s$  - відповідно дійсне та натуральне числа,  $u_0^{(\alpha)}$  - довільне початкове наближення,  $z_k^{(\alpha)} = Au_k^{(\alpha)} - f$  - нев'язка, а дійсні числа  $\{\gamma_i^{(\alpha)}(z_k^{(\alpha)}), i = 1, \dots, s\}$  вибираються з умови мінімуму величини

$$F_\alpha(u_{k+1}^{(\alpha)}) = \|u_{k+1}^{(\alpha)} - u\|_{A^{\alpha+1}}^2 = (A^{\alpha+1}(u_{k+1}^{(\alpha)} - u), u_{k+1}^{(\alpha)} - u).$$

При  $s=1$  отримуємо  $\alpha$ -процес, при  $\alpha = 0,1$  - це  $s$ -крокові методи відповідно найшвидкішого спуску та мінімальних нев'язок

Зафіксуємо дві послідовності: послідовність  $S = (s_1, s_2, \dots)$  натуральних чисел та послідовність дійсних чисел  $\Lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$

Під  $(S, \Lambda)$  - комбінованим ітераційним методом варіаційного типу будемо розуміти ітераційний процес,  $k$ -та ітерація якого здійснюється за допомогою  $s_k$ -крокового  $\alpha_k$ -процесу.

Зокрема, комбінований метод з  $S = S^{(2)} = (s_1, s_2, s_1, s_2, \dots)$ ,  $\Lambda = \Lambda^{(2)} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$  (тобто, з послідовностями пар  $s_1, s_2$  та  $\alpha_1, \alpha_2$  відповідно) будемо називати двохступінчатим.

Нехай  $u_0, u_1, \dots$  - ітераційна послідовність, породжена  $(S, \Lambda)$ -методом, а  $z_k = Au_k - f$ . Тоді

$$z_k = T_{S_k}^{(\alpha_k)} \dots T_{S_1}^{(\alpha_1)} z_0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де  $T_S^{(\alpha)}: H \rightarrow H$  - нелінійний оператор, що задається формулою

$$T_S^{(\alpha)} z = z + \sum_{i=1}^s \gamma_i^{(\alpha)}(z) A^i z.$$

Величину

$$R_k = R_k(A, S, \Lambda, \lambda) = - \frac{\ln \|T_{S_k}^{(\alpha_k)} \dots T_{S_1}^{(\alpha_1)}\|_\lambda}{s_1 + \dots + s_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

назвемо (за термінологією Г.І. Марчука та Ю.О. Кузнецова) осередненою швидкістю збіжності  $(S, \Lambda)$ -методу за  $k$  ітерацій, а величину

$$(61) \quad R_{\infty} = R_{\infty}(A, S, \Lambda) = \liminf_{k \rightarrow \infty} R_k(A, S, \Lambda, \lambda)$$

назвемо осередненою асимптотичною швидкістю збіжності. Тут

$$\lambda \in \mathbb{R}, \text{ а } \|T\|_{\lambda} = \sup_{0 \neq z \in H} \|Tz\|_{\Lambda^{\lambda-1}} \|z\|_{\Lambda^{\lambda-1}}^{-1} - \text{ норма оператора } T.$$

В §5.2 отримані непокрощувані оцінки знизу для  $R_k$ .

**Теорема 5.2.** *Якщо  $\inf \Lambda \geq \lambda$ , то  $(S, \Lambda)$ -метод збігається і*

$$R_k \geq -\ln(1 - m/M), \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Звідси, зокрема впливає, що  $(S, \Lambda)$ -метод збігається принаймні зі швидкістю геометричної прогресії.

В §5.3 отримані оцінки  $R_k$  зверху для двоступінчатого методу  $(S^{(2)}, \Lambda^{(2)})$  в скінченномірному просторі. Нехай  $\pi_S(t) = 1 + \pi_1 t + \dots + \pi_s t^s$  - многочлен степеня  $s = s_1 + s_2$ , що найменш відхиляється від нуля на спектрі оператора  $A$ , а  $\rho_S$  - величина відхилення.

**Теорема 5.3.** *Якщо  $\dim H > s$ , то  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*

$$R_{2k} \leq R_{\infty} \leq -s^{-1} \ln \rho_S, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Зокрема, для двоступінчатого градієнтного спуску ( $s_1 = s_2 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, s = 2$ ) маємо

$$R_{2k} \leq R_{\infty} \leq -0.5 \ln \rho_2.$$

Оцінка (9) дозволяє порівнювати двоступінчатий метод з  $s$ -кроковим методом. Нехай  $s = s_1 + s_2, \alpha \in \mathbb{R}$ . З теореми 1.4.1 випливає, що  $\|T_S^{(\alpha)}\|_{\alpha} \leq \rho_S$ , тому  $\|(T_S^{(\alpha)})^k\|_{\alpha} \leq \rho_S^k, k = 1, 2, \dots$ . Якщо  $n > s$ , то з теореми 1.4.2 випливає існування вектора  $z \neq 0$  такого, що  $\|(T_S^{(\alpha)})^k z\|_{\Lambda^{\alpha-1}} = \rho_S^k \|z\|_{\Lambda^{\alpha-1}}, k = 1, 2, \dots$ . Тому при  $n > s$

$$\left\| \left( T_S^{(\alpha)} \right)^k \right\|_{\alpha} = \rho_S^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Розглянемо  $s$ -кроковий  $\alpha$ -процес як комбінований метод з  $S^{(1)} = (s, s, \dots)$ ,  $\Lambda^{(1)} = (\alpha, \alpha, \dots)$ ; з рівності (10) отримуємо, що

$$R_k(A, S^{(1)}, \Lambda^{(1)}, \alpha) = R_m(A, S^{(1)}, \Lambda^{(1)}) = -s^{-1} \ln \rho_S, \quad k=1, 2, \dots \quad (11)$$

Порівнюючи оцінки (9), (11) можна зробити висновок про те, що  $s$ -кроковий метод з  $s = s_1 + s_2$  кращий (з точки зору осереднених швидкостей збіжності) за двоступінчатий метод. Зокрема, двокроковий метод найшвидкішого спуску (або мінімальних нев'язок) кращий за двоступінчатий градієнтний спуск.

В додатку на конкретних прикладах показана можливість використання асимптотичних властивостей  $s$ -крокових методів для прискорення їх збіжності, а також при формуванні апостеріорних критеріїв їх закінчення.

### Підсумки та основні результати роботи.

В дисертаційній роботі побудована асимптотична теорія  $s$ -крокових ітераційних методів варіаційного типу, досліджена швидкість збіжності комбінованих ітераційних методів варіаційного типу, розроблені на основі асимптотичної теорії прийоми прискорення  $s$ -крокових методів варіаційного типу.

#### Основні результати роботи:

1. Отримані умови стабілізації та непокрашувані оцінки швидкості збіжності  $s$ -крокового методу розв'язування лінійних операторних рівнянь та  $s$ -крокового методу Ланцоша.
2. Досліджена асимптотична поведінка ітераційних параметрів  $s$ -крокових методів варіаційного типу та доведено такий аналог гіпотези Форсайта: якщо за даного початкового наближення  $s$ -кроковий метод не стабілізується і не збігається суперлінійно, то існують граничні ітераційні параметри методу по парних (непарних) ітераціях. Отже, за вказаних умов,  $s$ -кроковий метод є асимптотично лінійним, а ітераційний процес, що складається з двох його послідовних ітерацій, - асимптотично стаціонарним.
3. Вивчені асимптотичні напрями похибки  $s$ -крокового методу варіаційного типу та отримані аналоги результатів Екейка та Форсайта.
4. Визначені істотні області значень асимптотичних швидкостей збіжності  $s$ -крокового варіаційного методу розв'язування лінійних операторних рівнянь та  $s$ -крокового методу Ланцоша.
5. Отримані двосторонні оцінки осереднених швидкостей збіжності комбінованих ітераційних методів варіаційного типу.

1. Жук П.Ф. Об асимптотических свойствах метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т.21. №2. С.271-285.
2. Жук П.Ф. Асимптотические свойства s-шагового метода скорейшего спуска // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1982. Т.22. №2. С.269-279.
3. Жук П.Ф. Об одной гипотезе Дж.Форсайта // Труды 3 Респ. конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе", Канев, 1982. С.49
4. Жук П.Ф., Приказчиков В.Г. Эффективная оценка сходимости неявного итерационного метода в задачах на собственные значения // Диффер. уравн. 1982. Т.18. №7. С.1197-1202.
5. Жук П.Ф., Бондаренко Л.Н. Об одной гипотезе Дж.Форсайта // Математический сборник. 1983. Т.121. №4. С.435-453.
6. Жук П.Ф. Асимптотическая скорость сходимости метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1984. Т.24. №4. С.605-607.
7. Гаврилюк И.П., Жук П.Ф., Бондаренко Л.Н. Решение нелинейной начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения второго порядка методом сеток. // Вычисл. и прикл. математика. Респуб. межвед. науч. сб. Киев. 1988. №65. С.34-46.
8. Бондаренко Л.Н., Жук П.Ф. Комбинированные итерационные методы вариационного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1988. Т.28. №9. С.1283-1296.
9. Жук П.Ф. Асимптотическое поведение трехшагового метода скорейшего спуска // Депонировано в ВИНТИ 17.10.91. № 4004-В91. 13 С.

10. Жук П.Ф. Асимптотическое поведение трехшагового метода скорейшего спуска // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1992. Т.32. №3. С.477-478.
11. Жук П.Ф. Асимптотическое поведение s-шагового метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения в гильбертовом пространстве // Математический сборник. 1993. Т.184. №12. С.87-122.
12. Жук П.Ф. Асимптотическое поведение s-шагового метода наискорейшего спуска при минимизации квадратичного функционала в гильбертовом пространстве// Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1995. Т.35. № 2. С.163-177.
13. Zhuk P.F. The asymptotic behaviour of the three-step method of steepest descent// Comput. Maths. Math. Phys. 1992. V.32. №3. P.419-420.
14. Zhuk P.F. The asymptotic behaviour of the s-step method of steepest descent for minimizing a quadratic functional in Hilbert space // Comput. Maths. Math. Phys. 1995. V.35. №2. P.127-137.

#### *Особистий вклад.*

Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. В публікаціях, які написані в співавторстві, дисертантові належить:

- в роботі [4] - результати §1, в якому досліджена асимптотична поведінка неявного методу найшвидкішого спуску;
- в роботі [5] - усі результати, крім теореми з §1;
- в роботі [7] - побудова та чисельна реалізація скінченно - різницевої схеми;
- в роботі [8] - усі результати, крім леми 2.

Zhuk P.F. Multistep iterational methods of variation type. Thesis for a doctor's degree of physical and mathematical sciences on speciality 01.01.07 - computational mathematics. Shevchenko Kiev University. Kiev, 1996.

The dissertation maintained studies multistep iterational methods of variation type. The results of research were published in 14 papers. The asymptotic theory of the  $s$ -step iterational methods of variation type in Hilbert space was created. The estimates of the rate of convergence of combination iterational methods of variation type were obtained.

Жук П.Ф. Многошаговые итерационные методы вариационного типа. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.07 - вычислительная математика. Киевский университет имени Тараса Шевченко. Киев, 1996 г.

Защищается диссертация, в которой исследуются многошаговые итерационные методы вариационного типа. Результаты исследований опубликованы в 14 работах. Построена асимптотическая теория  $s$ -шаговых итерационных методов вариационного типа в гильбертовом пространстве. Получены оценки скорости сходимости комбинированных итерационных методов вариационного типа.

*Ключові слова:* ітераційні методи варіаційного типу, швидкість збіжності, асимптотична поведінка, функціонал, оператор, гільбертовий простір, ітераційні параметри, власні значення, базис, граничний вектор.







АВ 36.029  
**АВ 36.029**

Підписано до друку 08.10.96. Формат 60x84/16.

Друк різнографія. Папір офсетний.

Наклад 100 пр. Без зам.

Друкарня "Пілотні школи", 325000, м. Херсон, вул. Белінського, 13.