НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

БУРСКИЙ Владимир Петрович

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02. - дифференциальные уравнения.

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк - 1996

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена в отделе нелинейного анализа Института прикладной математики и механики Национальной Академии Наук Украины.

Официальные оппоненты: - доктор физико-математических наук, профессор Ройтберг Я.А.

- доктор физико-математических наук, профессор Михайлец В.А.

- доктор физико-математических наук, профессор Шелепов В.Ю.

Ведущая организация - Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится "20" декабря 1996 года в 15 часов на заседании специализированного Совета Д.06.01.01 при Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, Донецк, ул. Р.Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан "6" ноября 1996 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета А. Марков Марковский А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Граничные задачи в теории дифференциальных уравнений в частных производных занимают особое место и в первую очередь из-за их прикладного значения. Теория граничных задач, как часть теории дифференциальных уравнений, собственно даже как определяющая часть, традиционно развивалась в направлениях мало связанных между собой сообразно типам дифференциальных уравнений, для которых ставились граничные задачи. Понятие типа, оформившееся к тридцатым годам нашего столетия для уравнений и систем в работах И.Г.Петровского, сильно продвинуло теорию граничных задач, объединив разрозненные, но близкие по характеру результаты в три самостоятельных направления, соответственно типу: эллиптическому, параболическому, гиперболическому. Соответственно типу уравнения ставятся и граничные задачи, поскольку, как оказалось, граничные задачи корректно поставленные для одного типа уравнений, некорректно поставлены для другого. Теория граничных задач, корректных внутри типа, обширна и досточно известна, теория граничных задач для бестипных уравнений и нетипичных задач для данного типа уравнений, которым в основном посвящена данная работа, делает только первые шаги, не имея, как правило, сколько-нибудь четких ориентиров. В этой области исследований, восходящих к Ж.Адамару, (см.обзор и результаты в книге Б.И.Пташника) систематически изучались граничные задачи для уравнений с постоянными коэффициентами в прямоугольных областях, параллелепипеде, цилиндре, а для непрямоугольных областей вопросы единственности решения задачи Дирихле для волнового уравнения в плоской области. Имеется также ряд отдельных результатов по разрешимости, тривиальной разрешимости, корректности граничных задач, в основном задачи Дирихле. Большое число работ, начиная с работ М.И.Вишика и Л.Хермандера, посвящено осмыслению понятия граничной задачи и изучению свойств граничных задач с точки зрения функционального анализа. В этом подходе однородная граничная задача проявляется в задании области определения расширения оператора дифференциального уравнения. Если расширение разрешимо, то соответствующая граничная задача корректно поставлена,см.например,книги А.А.Дезина, Ю.М.Березанского, В.И.Горбачук и М.Л.Горбачука. Главные проблемы в этой области исследований, иногда называемой общей теорией граничных задач, состоят в указании классов операторов, для которых существует корректно поставленная граничная задача,и в описании множества корректно поставленых граничных задач для классов операторов и конкретно заданных дифференциальных операторов, а также в описании свойств классов корректно поставленных граничных задач.Фундаментальным здесь является представление о граничных свойствах решений дифференциальных уравнений,на которых основывается само понятие граничной задачи. Теория граничных свойств решений дифференциальных уравнений,берущая свое начало с классического представления граничного значения непрерывной функции как ограничения ее на подмножество области ее определения, развивавшаяся вначале как теория граничных значений аналитических функций, после работ С.Л.Соболева превратилась в новое направление исследований в теории функций, в теории дифференциальных уравнений и граничных задач для них, без которых современный анализ невозможно сейчас представить. Таким образом, теория краевых задач для дифференциальных уравнений и теория граничных значений решений являются актуальными .

Цель работы. Изучение граничных задач для дифференциальных уравнений и систем в частных производных общего вида и связанных с ними граничных свойств решений.

Методы исследования. Основным методом изучения граничных задач в настоящей работе и в теоретическом и вычислительном плане является анализ формулы Грина. Краткое описание используемых методов см. ниже.

Теоретическая и практическая ценность исследования и его научная новизна. Предлагается и апробируется несколько подходов к изучению граничных задач для общих уравнений, основанных на формуле Грина. Для каждой функции из области определения максимального оператора доказывается существование в распределениях следовых выражений, называемых автором ассоциированными следами, проводится изучение их свойств, что позволяет, в частности, получить необходимое и достаточное условие связи ассоциированных следов решения однородного уравнения, изучаются пространства таких следов и связанных с ними операторов, что позволяет исследовать один класс общих граничных задач, а также пространства, связанные с дифференциальной операцией. Условия связи ассоциированных следов решения изучаются для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в общей области на плоскости, откуда следует, в частности, что задачи Дирихле и Неймана обладают одинаковыми свойствами , и что позволяет также исследовать первую, вторую и третью граничные задачи в круге. Изучается типичность свойства единственности решения граничных задач, а также единственность решения задачи Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре. Все перечисленные результаты являются новыми.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались на III Международном Конгрессе по прикладной и индустриальной математике

ICIAM-95 (Гамбург 1995), на Международной конференции по теоретическим вопросам математического моделирования (Берлин, 1990), на I-й Международной конференции памяти акад. Кравчука, на семи республиканских конференциях по дифференциальным уравнениям, нелинейному анализу и математической физике, на Воронежской школе по функциональному анализу (1986), на семинарах профессоров: В.С.Владимирова; А.В.Бицадзе; В.А.Ильина; М.М.Лаврентьева и Ю.Е.Аниконова; И.В.Скрыпника; Ю.М.Березанского и М.Л.Горбачука; М.Л.Горбачука; А.А.Дезина и В.Н.Масленниковой; А.А.Дезина; В.П.Михайлова; А.К.Гущина; В.П.Михайлова и А.К.Гущина; В.Я.Скоробогатько и Б.И.Пташника; В.И.Буренкова.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 36 научных работ. Из них 19 работ в научных журналах, 1 препринт, 4 депонированные рукописи, 11 тезисов докладов.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка цитированной литературы, который включает 162 названия. Объем работы - 283 машинописные страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Применяемые методы. Основным методом изучения граничных задач в настоящей работе и в теоретическом и вычислительном плане является анализ формулы Грина, рассматриваемой в разных формах и получаемой несколькими способами. Модификацией формулы Грина, вероятно, можно считать, например, следующий метод.

1 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $L = \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ - дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами, порождающая оператор $L\colon H^m(\Omega) \to L_2(\Omega)$ в соболевских пространствах. Пусть $u \in H^m(\Omega)$ - решение уравнения

$$Lu = 0 \tag{1}$$

Функция u имеет следы

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi_0,\ u'_\nu\big|_{\partial\Omega} = \varphi_1, \dots,\ u^{(m-1)}_{\nu^{m-1}}\big|_{\partial\Omega} = \varphi_{m-1}, \tag{2}$$

где ν- внешняя нормаль к границе, $\phi=(\varphi_0,\varphi_1, \dots,\varphi_{m-1}) \in H^{(m)}(\partial\Omega)= = H^{m-1/2}(\partial\Omega) \times \dots \times H^{1/2}(\partial\Omega)$. Ставится вопрос: Как связаны между собой следы ϕ?

Пусть функция $u \in H^m(\Omega)$ - решение задачи (1),(2), $u \in H^m(\Omega)$ - решение задачи (1),(2), $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ - любое продолжение функции $u(x)$, и пусть $\theta(x)$ - характеристическая функция множества Ω: $\theta(x) = 1,\ x \in \Omega,\ \theta(x) = 0,\ x \in \Omega$. Применим оператор L к произве - дению θv. Пользуясь правилом Лейбница, получим

$$L(\theta v) = \theta L v + \sum_{k=0}^{m-1} b_k (\delta_{\partial\Omega})^{(k)}_{\nu^k}, \tag{3}$$

где $\delta_{\partial\Omega}$- мера, сосредоточенная на $\partial\Omega$, т.е. $\forall\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\langle\delta_{\partial\Omega},\varphi\rangle= = \int_{\partial\Omega} \bar{\varphi}\, ds$, а b_k - линейные дифференциальные выражения по касательным направлениям τ от следов ϕ с коэффициентами, порожденными направляющими косинусами нормали. Заметим, что $\theta'_\nu = -\delta_{\partial\Omega}$, $\theta'_\tau = 0$. Член $\theta L v$ равен нулю, а к оставшемуся равенству (3) применим пре - образование Фурье. Получим

$$l(\xi)\ \widehat{\theta v}(\xi) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} L_{(k)} u\, (-i\nu(s),\xi)^k e^{-i(s,\xi)} ds, \tag{4}$$

где l- символ оператора L, $\widehat{\theta v}$ - преобразование Фурье функции θv, функции $L_{(k)}u$,как и b_k,-линейные дифференциальные выражения по касательным направлениям порядка m-k-1 от следов с переменными коэффициентами. Обозначим правую часть в (4) через $G_\phi(\xi)$.Подчеркнем, что функции $G_\phi(\xi)$ зависит только от следов ϕ решения u и не зависит от поведения u в Ω. По теореме Пэли - Винера - Шварца функции $\widehat{\theta v}$ и G_ϕ - целые функции определенного роста на бесконеч - ности.Обозначим через Z кольцо целых функций на $\mathbb{C}^n$ первого порядка и конечного типа. Равенство (4) означает, что

$$G_\phi \in (l) \text{ в } Z \qquad (5)$$

$$\widehat{G_\phi / l} \in \{\theta v \mid v \in H^m(\mathbb{R}^n)\}, \qquad (6)$$

где (l) – главный идеал, порожденный элементом l. Можно показать, что условия (5), (6) являются и достаточными. То есть, для каждого набора следов $\phi \in H^{(m)}(\partial\Omega)$, удовлетворяющего условиям (5),(6), существует единственное решение $u \in H^m(\Omega)$ задачи (1),(2). Доказательство проводится обратными рассуждениями.

Предложение I. Для однозначной разрешимости задачи (1),(2) необходимо и достаточно выполнение условий (5),(6).

Сразу заметим, что, если символ l разложим в произведение различных неприводимых полиномов, то условие (5) можно записать в эквивалентном виде

$$G_\phi(\xi) = 0, \ \forall\ \xi \in \Lambda, \qquad (7)$$

где Λ – алгебраическое многообразие нулей символа l. Условие (6) выглядит трудно проверяемым, но можно доказать, что для некоторых операторов и областей оно может быть сведено к условию (5) только некоторым повышением гладкости следов ϕ (см. §2.4;§3.2).

2. Покажем, что получается для оператора второго порядка

$$L = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \ a,b,c \in \mathbb{C}. \qquad (8)$$

в плоской области. Здесь функция $G_\phi = \int\limits_{\partial\Omega} [(-i)(x,\xi)P(\tau) + C(\tau)] \cdot$ $\cdot e^{-i\langle x,\xi\rangle} d\tau_x$, где $\tau \in \partial\Omega$-координата, $P(\tau) = -l(x(\tau))\phi_0(\tau)$, $C(\tau) = l(x(\tau))\phi_1(\tau) + l'_\tau \phi'_{0\tau} + \frac{k}{2} l''_{\tau\tau}\phi_0$, $l(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, k-кривизна. В этом случае условие (7) можно записать в такой эквивалентной форме:

$$\forall\ Q \in \mathbb{C}[z],\ \forall\ \xi \in \Lambda,$$

$$\int\limits_{\partial K} [(x,\xi)Q'((x,\xi))\, P(\tau) + Q((x,\xi))\, C(\tau)]d\tau = 0, \qquad (9)$$

где $\mathbb{C}[z]$ - кольцо полиномов одной переменной. Условие (7) в форме (9) позволяет записать связь между функциями ϕ_0, ϕ_1 в терминах коэффициентов разложения в ряд Фурье функций P и C, если область - единичный круг, которые можно использовать для изучения задачи Дирихле (гл.2; гл.3, §3.I, §3.2, §3.6).

Этот метод делимости преобразования Фурье правой части уравнения Lu=f во всем пространстве на символ оператора с постоянными коэффициентами использовался и раньше для уравнений, а в применении к граничным задачам предложен Я.А.Ройтбергом и независимо и одновременно автором.

То же условие (9) можно сразу получить из формулы Грина

$$\int\limits_{\Omega} [\, Lu\, \bar{v} - u\, \overline{L^{+}v}\,]\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} [\, P(\tau)\, \bar{v}'_{\nu} + C(\tau)\, \bar{v}\,]\, d\tau_x, \qquad (10)$$

если положить $v = Q((x,\xi))$, $Q \in \mathbb{C}[z]$, $\xi \in \Lambda$. Точно также условие (7), как выяснилось, можно получить из общей формулы Грина типа формулы (10), если положить $v = e^{-i(x,\xi)}$, $\xi \in \Lambda$, а $u \in \ker L$.

3. Прямо из формулы (10) также удобнее получать условие связи следов функции из ядра ker L, записанное в виде проблемы моментов

$$\forall N \geq 0, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} [\, u'_{\nu_*} + (-1)^{j-1} \frac{\Delta}{2}\, u'_{\tau}\,]\, (x, \tilde{a}^j)^N d\tau_x = 0,$$

где ν_*-конормаль, $\tilde{a}^j$, j=1,2 -направляющие векторы бихарактеристик, $\Delta = \sin\varphi_0 = \det\|\tilde{a}^1 \tilde{a}^2\|$, φ_0-(комплексный) угол между $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$. Исследуя последнее условие , можно сопоставить свойства граничных задач между собой и, в частности, для случая круга выяснить значение типа уравнения, который, как оказалось, на свойства граничных задач особого влияния не оказывает (гл.3, §3.3, §3.4).

В общетеоретическом плане формула Грина также оказалась полезной. С ее помощью можно изучать граничные свойства решений, получать какие-то характеристики пространства Коши, области определения максимального и минимального операторов, их ядер (гл.I). Основным в наших построениях является понятие ассоциированного следа (в предыдущем пункте - функции P и C). Покажем, как определяются ассоциированные следы.

4. Пусть $\mathscr{L}(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ - линейная дифференциальная операция с гладкими комплекснозначными коэффициентами, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \cdot \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}$, Ω - ограниченная область с односторонней гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Рассмотрим уравнение

$$Lu = f, \qquad (11)$$

где L-максимальный оператор, порожденный операцией $L(x,D)$ в $L_2(\Omega)$.

Примеры показывают, что в общем случае обычные следы у решений из $L_2(\Omega)$ не существуют в распределениях даже для простейших уравнений. Так, например, для уравнения $Lu = \partial^2 u / \partial x_1 \partial x_2 = 0$ в единичном круге K решение $u(x) = (1-x_1^2)^{-3/8}$ принадлежит $L_2(K)$, но $\langle u|_{\partial K}, 1\rangle_{\partial K} = \infty$ в том смысле, что $\lim_{r\to 1-0} \int_{|x|=r} u(x)\, ds_x = \infty$, так что след $u|_{\partial K}$ не является распределением. Можно показать, однако, что у каждого решения $u \in L_2(K)$ такого уравнения существует след произведения $L_{(0)} u := -u(x) l(x)|_{\partial K} \in L_2(\partial K)$, где $l(x) = x_1 x_2$ - символ оператора. Точно так же не для всех решений существует след $u'_\nu|_{\partial K}$, но для каждого решения $u \in L_2(K)$ существует след $L_{(1)} u = -l(x) u'_\nu(x) + l'_\tau u'_\tau + 1/2\, l''_{\tau\tau} u|_{\partial K} \in H^{-3/2}(\partial K)$, где τ - угловая координата.

Подобные рассуждения можно провести и в общем случае. Они основываются на следующем утверждении.

Лемма. Для любой пары функций w и φ из $H^m(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующая формула Грина:

$$[w,\varphi] := \langle L(\theta_\Omega w) - \theta_\Omega Lw, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{q=0}^{m-1} \langle L_{(m-q-1)} w, \partial_\nu^q \varphi\rangle_{\partial\Omega} = \qquad (12)$$

$$:= \langle \mathscr{L}_{\partial\Omega} w, \varphi\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

где θ_Ω – характеристическая функция области Ω, $\partial_\nu^q \varphi = \varphi^{(q)}_{\nu^q}$, $L_p = \sum\limits_{s=0}^{p} L_\tau^{p,s} \partial_\nu^s$ – оператор степени p, $L_\tau^{p,s}$ – некоторый линейный дифференциальный оператор по касательным направлениям τ с гладкими коэффициентами степени p-s. Отметим, что, если L^+-формально сопряженный оператор, то $[w,v] = \int\limits_\Omega (w \cdot \overline{L^+\varphi} - \bar{\varphi} \cdot Lw)dx$. Заметим, что в эллиптическом случае распределения $f_q = (-1)^q \partial_\nu^q (\mu \cdot \delta_{\partial\Omega}), \mu \in \mathcal{D}'(\partial\Omega)$, действующие по формуле $\langle f_q, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mu, \partial_\nu^q \varphi \rangle_{\partial\Omega}$, принято называть для q=0 простым, а для q = 1 – двойным слоем на $\partial\Omega$ с плотностью μ. Соответствущий потенциал получится сверткой $f_q * G$ с фундаментальным решением G.

Пусть $J_{m,q}: H^{m-q-1/2}(\partial\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^n)$, $q = 0,1,\ldots,m-1$, – непрерывный оператор продолжения со свойством $\partial_\nu^p (J_{m,q}\phi)\big|_{\partial\Omega} = \delta_q^p \cdot \phi$, $p = 0,1,\ldots,m-1$. Подставим в (12) вместо φ функцию $J_{m,q}\phi$, а вместо w-последовательность $\{w_k\} \in H^m(\mathbb{R}^n)$, сходящуюся к решению u уравнения (11) в смысле нормы графика $\|w\|_{L_2(\Omega)} + \|Lw\|_{L_2(\Omega)}$. Левая часть равенства (12) будет стремиться к выражению

$\int\limits_\Omega (u\, \overline{L^+ J_{m,q}\phi} - \overline{J_{m,q}\phi} \cdot f)dx$, линейному и непрерывному по $\phi \in H^{m-q-1/2}(\partial\Omega)$. Полученный функционал обозначим $L_{(m-q-1)}u$. Распределение $L_{(p)}u$ назовем <u>p-м следом решения u на $\partial\Omega$, ассоциированным с оператором L</u>, или просто p-м L-следом функции u на $\partial\Omega$, а распределение $L_{\partial\Omega}w$ из (12) – L-граничным распределением.

Итак, мы видим, что L-следы функции из области определения $D(L)$ максимального оператора существуют и $L_{(p)}u \in \left[H^{m-q-1/2}(\partial\Omega)\right]'$, $p = 0,1,\ldots,m-1$, если $H^m(\Omega)$ плотно $D(L)$. Главным свойством L-следов является то, что они все равны нулю тогда и только тогда, когда они являются L-следами функции из области определения минимального оператора, что видно из формулы (12), расширенной на области определения максимального L^+ и минимального L_0 операторов. Это позволяет сузить их на пространство Коши, тем самым расширяя область определения явно заданного оператора $\varkappa_{\partial\Omega}$, и характеризовать пространства, связанные с оператором L. А отмеченное вложение ассоциированных следов в пространство распределений $H^{(-m)}(\partial\Omega)= H^{-1/2}(\partial\Omega)\times^{-3/2}(\partial\Omega)\times\ldots\times H^{-m+1/2}(\partial\Omega)$ позволяет получить общий вид одного класса хорошо поставленных граничных задач. Кроме того в терминах ассоциированных следов получается условие связи обычных следов функций из ядра (§1.3):

Предложение 2. Для того чтобы набор $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ из пространства L-следов A(L) был набором L- следов решения u, $Lu=0$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $v_k \in H^m(\mathbb{R}^n)$, сходящейся в норме $\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|L^+v\|_{L_2(\Omega)}$ к некоторому решению уравнения $L^+v = 0$, было выполнено условие

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{q=0}^{m-1} \langle u_{m-q-1}, \partial_\nu^q v_k \rangle_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Отмеченные выше условия (7) и (9) являются формой условия (13). Другим применением L-следов являются формулы представления решения через аналоги классических потенциалов и теорема о среднем (§1.4).

Из формулы Грина следует также следующий метод изучения граничных задач, который будем называть двойственностью уравнение--область (гл.4).

5. Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ граничную задачу

$$\begin{aligned} &Lu = f \in L_2(\Omega) \text{ в } \Omega, \\ &L_{(p)}u\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ p = 0, 1,\ldots, k \leqslant m-1. \end{aligned} \tag{14}$$

Пусть L- оператор с постоянными коэффициентами, а область Ω полуалгебраична, т.е. $\exists\, P \in \mathbb{R}[x]$, $\Omega =\{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x) > 0,\ \nabla P\big|_{\partial\Omega} \neq 0\}$, ограничена и с гладкой границей. Подставляя в (12) вместо φ функцию $\overline{(P(x))}^{m-k-1}\varphi_0(x)$, а вместо w – решение задачи (14), получим после преобразования Фурье уравнение

$$[P(-D_\xi)]^{m-k-1}[l(\xi)v(\xi)] = \hat{F}, \tag{15}$$

где $v = \widehat{\theta_\Omega u} \in Z_\Omega = \{\widehat{\theta_\Omega u} \mid u \in L_2(\Omega)\}$, $F=(P(x))^{m-k-1}(\theta_\Omega f)$; $\theta_\Omega u, \theta_\Omega f$ – продолжения функций u и f нулем. Справедливо

Предложение 3. Каждому решению $u \in L_2(\Omega)$ задачи (14) отвечает единственное решение $v \in Z_\Omega$ уравнения (15) и наоборот.

Заметим, что, если область Ω выпукла, в предложении 3 можно Z_Ω заменить на $Z_0 = \{\hat{u} \mid u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)\}$. Заметим также, что, если в уравнении (3) учесть граничные условия (14), умножить полученное равенство на $(P(x))^{m-k-1}$ и применить преобразование Фурье, то получим то же равенство (15) с нулевой правой частью.

Пусть в условиях п.4 оператор L – второго порядка с простыми характеристиками. Рассмотрим однородную задачу Дирихле, понимая под условием $u|_{\partial\Omega} = 0$ условие $l_2(\nu(x))u\,|_{\partial\Omega} = 0$,

$$L(D_x)u = 0,\ u|_{P(x)=0} = 0. \tag{16}$$

Тогда уравнение (15) запишется в виде $P(-D_\xi)[l(\xi)v(\xi)] = 0$. Если обозначить $w=lv$, то получим задачу

$$P(-D_\xi)w = 0,\ w|_{l(\xi)=0} = 0 \tag{17}$$

в некотором пространстве целых функций. Уравнение перешло в область, область – в уравнение. Предложение 3 утверждает, в частности, что существование нетривиальных решений задач (16) и (17) в соответствующих пространствах взаимно обусловлено существованием изоморфизма между пространствами решений. Этот метод позволил изучить единственность решения ультрагиперболического уравнения в шаре (§ 4.6), откуда следует одно приложение в интегральной геометрии на сфере, позволяющее посмотреть на используемые условия с точки зрения преобразования Радона (§ 5.4).

Двойственность уравнение-область, по-видимому, является изобретением автора, хотя обычный в физике способ построения решений однородного уравнения, например, уравнения Клейна-Гордона, через импульсное представление напоминает обратную процедуру.

Если же для изучения задачи (16) использовать условие (13), в котором стоит $v=\overline{e^{-i\langle x,\xi\rangle}}$, $\xi\in\Lambda^+$, $v\in\ker L^+$, то из существования нетривиального решения задачи Дирихле (16) в пространстве $L_2(\Omega)$ получим существование нетривиальной функции $\alpha\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, такой что

$$\int_{\partial\Omega}\alpha(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx = 0,\ \forall\xi\in\Lambda^+, \tag{18}$$

то есть неплотность функций вида $e^{-i\langle x,\xi\rangle}$, $\xi\in\Lambda^+$ на $\partial\Omega$. Здесь плотность экспонент $e^{-i\langle x,\xi\rangle}$, $\xi\in\Lambda^+$ на $\partial\Omega$ гарантирует, таким образом, единственность решения задачи Дирихле. Вычисления § 3.6, например, можно рассматривать с этой точки зрения. Условие (18) можно понимать также, как условие исчезновения правой части уравнения (3), в которой уже учтены граничные условия, условие ортогональности правой части ядру сопряженного оператора.

Содержание диссертации.

Пусть Ω - ограниченная область с границей $\partial\Omega$, являющейся гладким односторонним $(n-1)$- мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha,\ D^\alpha = (-i\partial)^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n},\ \alpha\in Z_+^n, |\alpha| = \sum_k \alpha_k$$

- дифференциальная операция с комплексными коэффициентами из пространства $C^\infty(\bar\Omega)$, $\mathcal{L}^+ = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha(a_\alpha^*\cdot)$, $a_\alpha^*=\bar a_\alpha$ - формально сопряженная дифференциальная операция, L_o и L_o^+-минимальные, а L и L^+- максимальные операторы этих операций в $L_2(\Omega)$, $D(L_o)$,$D(L)$ и $D(L_o^+)$, $D(L^+)$- их области определения, оператор $\tilde L$ с областью определения $D(\tilde L)$, являющейся замыканием пространства $C^\infty(\bar\Omega)$ в норме графика $\|u\|_L$. Рассмотрим следующие условия:

оператор $L_o : D(L_o) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный; (1.1)

оператор $L_o^+ : D(L_o^+) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный; (1.2)

$$\tilde{L} = (L_o^+)^*; \quad (1.3) \qquad \tilde{L}^+ = (L_o)^*. \quad (1.4)$$

Пространство Коши $C(L)$ определим как фактор $D(L)/D(L_o)$.

Линейной однородной граничной задачей называется задача нахождения решения u соотношений

$$Lu = f, \ \Gamma u \in B, \tag{1.5}$$

где Γ: $D(L) \to C(L)$ - отображение факторизации, B - линейное многообразие в $C(L)$. Граничное условие $\Gamma u \in B$ порождает подпространство $D(L_B) = \Gamma^{-1}(B)$ в пространстве $D(L)$ и оператор L_B, являющийся сужением оператора L на пространство $D(L_B)$ и расширением оператора L_o. Граничная задача называется корректно поставленной, а оператор L_B разрешимым расширением оператора L_o, если оператор L_B: $D(L_B) \longrightarrow L_2(\Omega)$ имеет непрерывный двусторонний обратный. Заметим, что условия (1.1),(1.2) эквивалентны существованию корректной граничной задачи для оператора L. Рассмотрим также условия:

оператор $L : D(L) \longrightarrow L_2(\Omega)$ сюрьективен; (1.6)

оператор L_o нормально разрешим в $L_2(\Omega)$. (1.8)

Утверждение 1.5. Диаграмма (1.10), построенная при условиях (1.6),(1.8) коммутативна, ее строки и столбцы точны.

Отметим смысл диаграммы (1.10), который состоит в разложении максимального оператора L в прямую сумму внутренней L_o и граничной L_C составляющих частей.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & \ker L_o \arrow[r, "i_{L_o}"] \arrow[d, dashed, "i_{ker}"] & D(L_o) \arrow[r, "L_o"] \arrow[d, dashed, "i_o"] & \operatorname{Im} L_o \arrow[r] \arrow[d, dashed, "i_{Im}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, dashed, "\Gamma_o"] & D(L) \arrow[r, "L"] \arrow[d, dashed, "\Gamma"] & L_2(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Gamma_{Im}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(\ker L) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d] & C(L) \arrow[r, "L_C"] \arrow[d] & \ker L^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

В § 1.1 дается введение в предмет и доказываются основные известные факты теории. Схема изложения опирается на коммутативную диаграмму (1.10), из которой следуют результаты Вишика по представлению области определения максимального оператора, по условиям существования разрешимого расширения, а также по описанию множества всех разрешимых расширений; результаты Хермандера по представлению пространства Коши и описанию множества всех корректных граничных задач. Включено также описание известных классов операторов, для которых существуют корректные граничные задачи.

В § 1.2. изучаются граничные свойства решений. На основе соображений, изложенных в четвертом разделе п.0.2 вводятся ассоциированные следы и их пространства. Доказывается

Утверждение 2.5. 1). Пространство L-следов $A(L)$ в случае общей области состоит из функционалов $L_{\partial\Omega}u \in D'(L^+)$, $\operatorname{supp} L_{\partial\Omega}u \subset \partial\Omega$, $L_{\partial\Omega}u|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$, зануляющихся на $D(L_0^+)$, где $u \in D(L)$. Соответствие $u \longrightarrow L_{\partial\Omega}u$, $L_{\partial\Omega}: D(L) \longrightarrow D'(L^+)$ непрерывно, $\ker L_{\partial\Omega} = D(L_0)$. Это соответствие порождает биективный оператор $\varkappa_c : C(L) \to C'(L^+)$ с плотным множеством значений $A(L) \subset C'(L^+)$. Имеет место разложение в прямую сумму $L_{\partial\Omega}u = \tilde{L}_{\partial\Omega}u + \operatorname{sing} L_{\partial\Omega}u$.

2) Если область имеет гладкую границу, то элемент $L_{\partial\Omega}u$ как функционал над $D(\tilde{L}^+)$ представляется в виде $\tilde{L}_{\partial\Omega}u = L_{\partial\Omega}u|_{D(\tilde{L}^+)} = \sum_{q=0}^{m-1} L^q_{\partial\Omega}u$ с распределениями $L^q_{\partial\Omega}u \in [D^q(\tilde{L}^+)]' \subset [H^{m,q}(\Omega)]'$, $\operatorname{supp} L^q_{\partial\Omega}u \subset \partial\Omega$, определенными равенствами

$$\langle L^q_{\partial\Omega}u, v\rangle_\Omega = \lim_{j\to\infty} \langle L_{\partial\Omega}u, v_j\rangle_\Omega, \quad H^{m,q}(\Omega) \ni v_j \xrightarrow{D(\tilde{L})} v \in D^q_J(\tilde{L}^+),$$

независящими от выбора v_j и непрерывно зависящими от $u \in D(L)$.

3) Распределение $L^q_{\partial\Omega}u$ как функционал над $H^{m,q}(\Omega)$ и как функционал над $H^m(\Omega)$ представляется в виде

$$\langle L^q_{\partial\Omega}\, u|_{H^m(\Omega)}, v\rangle = \langle L_{(m-q-1)}u, \partial_\nu^q v|_{\partial\Omega}\rangle_{\partial\Omega}$$ с распределением

$L_{(m-q-1)}u \in H^{-m+q+1/2}(\partial\Omega)$, которое можно продолжить до распределения $\tilde{L}_{(m-q-1)}u \in C_k'(\tilde{L})$, и в этом смысле пространство $A(\tilde{L})$ вкладывается в произведение $H^{(-m)}(\partial\Omega) := H^{-m+1/2}(\partial\Omega) \times \ldots \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Разложение $L_{\partial\Omega}u|_{H^m(\Omega)} = \sum_{q=0}^{m-1} L^q_{\partial\Omega}u|_{H^m(\Omega)}$ единственно.

В § I.3 изучаются свойства ассоциированных следов, в частности, получено условие связи (I3) п.0.2 (см.выше). Кроме того, из свойств оператора $\mathscr{L}_{\partial\Omega}$, определяющего ассоциированные следы, следуют следующие утверждения:

Утверждение 3.4. При выполнении условий (1.1),(1.2) оператор $\mathscr{L}_c : C(L) \to C'(L^+)$ -сюрьективен, если оператор $\mathscr{L}$ формально самосопряжен.

Пусть у нас имеется две дифференциальные операции $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ порядка не больше m, порождающие минимальные операторы L_o и M_o в области Ω. Будем говорить, что <u>оператор $\mathscr{L}$ сильнее оператора $\mathscr{M}$ в области Ω</u> и писать $\mathscr{L} \succ \mathscr{M}$, если $D(L_o) \subseteq D(M_o)$.

Утверждение 3.6. Для сравнения $\mathscr{L} \succ \mathscr{M}$ необходимо, чтобы

$$\ker\mathscr{L}_{\partial\Omega}|_{H^{(m)}(\partial\Omega)} \subseteq \ker\mathscr{M}_{\partial\Omega}|_{H^{(m)}(\partial\Omega)}.$$

Утверждение 3.7. Для того, чтобы были выполнены условия (1.1),(1.2) необходимо, чтобы подпространства $\ker\mathscr{L}_{\partial\Omega}|_{H^{(m)}(\partial\Omega)}$ и $\check{K} = \gamma(\ker L \cap H^m(\Omega))$ были бы прямыми слагаемыми в пространстве $H^{(m)}(\partial\Omega)$, и чтобы подпространства $\ker\mathscr{L}^+_{\partial\Omega}|_{H^{(m)}(\partial\Omega)}$ и $\check{K}^+ = \gamma(\ker L^+ \cap H^m(\Omega))$ были бы прямыми слагаемыми в пространстве $H^{(m)}(\partial\Omega)$.

В § I.4 обсуждается связь условий (I.I),(I.2) с фундаментальными решениями, получаются формулы представления решения через его L-следы и теорема о среднем.

В § I.5 рассматриваются гладкопорожденные граничные задачи, в частности доказано следующее

Утверждение 5.15. Пусть выполнены условия (1.1),(1.2),(1.3), Множество $\partial_m\Omega = \{x \in \partial\Omega \mid l_m(\nu(x)) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\nu^\alpha = 0\}$ (5.1)

характеристических точек на $\partial\Omega$ имеет нулевую меру и пусть P -подпространство со свойствами (5.6), $K = \gamma\ker L\Big|_{H^m(\Omega)}$, $H^{(m)}(\partial\Omega) = K \oplus P$, $H^{(-m)}(\partial\Omega) = \bar{K} \oplus \bar{P}$ (замыкание в пространстве $H^{(-m)}(\partial\Omega)$). Тогда граничная задача (1.5), где $B = \bar{P}$ (замыкание в пространстве $C(L)$) корректна и может быть задана уравнением

$$B_0 L_{(0)} u + B_1 L_{(1)} u + \ldots + B_{m-1} L_{(m-1)} u = 0 \qquad (5.13)$$

с непрерывными операторами $B_q : H^{-1/2-q}(\partial\Omega) \to H^{(-m)}(\partial\Omega)$, причем $B_q = \gamma_B \iota_q$, где $\gamma_B = \sum_{q=0}^{m-1} B_q p_q : H^{(-m)}(\partial\Omega) \to \overline{A(\ker L)}$ -непрерывный проектор, $\iota_q : H^{-1/2-q}(\partial\Omega) \subset H^{(-m)}(\partial\Omega)$ -каноническое вложение, а $p_q : H^{(-m)}(\partial\Omega) \longrightarrow H^{-1/2-q}(\partial\Omega)$ -каноническая проекция.

Условиям (1.1-1.3), как отмечается в п.1.1.5, удовлетворяет любой оператор с постоянными коэффициентами и любой оператор вещественного главного типа вида (1.15).

В § I.6 приведены примеры, среди которых пример корректной граничной задачи для волнового уравнения в круге, рассматривается также связь с описанием Вишика корректных граничных задач для эллиптического уравнения.

Результаты 1 главы опубликованы в работах [10],[11],[15],[13].

В главе 2 рассматривается гиперболическое уравнение в круге с оператором (8), где $a,b,c \in \mathbb{R}$ и $b^2-4ac>0$. Характеризуются пространства, связанные с такой операцией, узучаются граничные свойства функций из ядра. Основные результаты содержат формулировки теорем 4.I, 4.2.

Обозначению $w \cdot \delta_{\partial\Omega}$, где $w \in \mathcal{D}'(\partial\Omega)$ можно придать смысл, если продолжить распределение w на некоторую окрестность $U \supset \partial\Omega$ и воспользоваться определением Микусинского-Хираты-Огавы произведения обобщенных функций. Под следами функции $u \in H^{\alpha}(K)$ в главе 2 понимается пара $(\tilde{\phi}, \tilde{\chi})$, из которых первая есть след функции u на ∂K, а вторая -след u'_{ν} на ∂K, а под следом функции u понимается $\lim\limits_{r\to 1-0} u\,\delta_{\partial K_r}$ в топологии $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Образ распределения $\tilde{\phi}$ при изоморфизме J^{-1} предложения 1.7, т.е. граничное значение функции u будем обозначать ϕ. Точно так же пусть $\chi = J^{-1}\tilde{\chi}$. Для краткости формулировок будем называть функции ϕ и χ также следами соответствующих функций u и u'_{ν}. Ниже используется обозначение: $H^{m-0}(\partial K) = \bigcap\limits_{l\geq 0} H^{m-l}(\partial K)$.

Теорема 4.1. Пусть $u \in H^m(K)$, $m \geqslant 0$ -решение уравнения $Lu=0$ с гиперболическим оператором (8). Тогда

1) Существует след $l\phi$ функции lu на ∂K, принадлежащий пространству $H^m(\partial K)$, если m - целое, и пространству $H^{m-0}(\partial K)$, если $m \in \mathbb{R}$.

2) Если $m > \frac{1}{3}$, то существует след $\phi \in L_1(\partial K) \cap H^{-1/2}(\partial K)$.

3) Если $m \geqslant \frac{1}{2}$, то $\phi \in H^{m-1/2}(\partial K)$.

4) Если $m > \frac{1}{3}$, то существует след $l\chi$ функции lu'_{ν} на ∂K, принадлежащий пространству $H^{-2}(\partial K)$.

5) Если $m \geqslant 1$, то $l\chi \in H^{m-1}(\partial K)$ при $m \in \mathbb{Z}$, $l\chi \in H^{m-1-0}(\partial K)$ при $m \in \mathbb{R}$.

6) Пусть функция $\tilde{u}$ получена из функции u продолжением нулем за границу ∂K. Тогда на $\mathbb{R}^2$ при $m > \frac{1}{3}$

$$-L\tilde{u} = (l\tilde{\phi})'_{\nu} + l\tilde{\chi} + l'_{\tau}\tilde{\phi}'_{\tau} + (-l+a+c)\tilde{\phi}, \qquad (4.1)$$

где $l = l(x)$ - символ оператора L: $l(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$.

7) Функции ϕ и χ при $m > \frac{1}{3}$ связаны соотношениями

$$\forall \xi \in \Lambda, \int\limits_{\partial K}[(-i)(x,\xi)l\phi - (l\chi + l'_{\tau}\phi'_{\tau} + \frac{1}{2}\,l''_{\tau\tau}\phi)]e^{-i(x,\xi)}\,d\tau_x = 0, \qquad (4.2)$$

где $\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid l(\xi)=0\}$, $d\tau_x$ - обычная мера на ∂K, $x=(\cos\tau;\sin\tau)$, а интегралы от членов с χ и ϕ'_{τ} следует понимать как действие распределений на ∂K на свои сомножители.

Теорема 4.2. Пусть для $m \geqslant \frac{3}{2}$ имеются две функции $\phi \in$

$\in H^m(\partial K)$ и $\chi \in H^{m-1}(\partial K)$, связанные соотношениями (4.2). Тогда существует единственное решение $u \in H^{m-\varepsilon(m)}(K)$ уравнения (0.1), граничное значение которого на ∂K существует и равно ϕ, а производная по нормали на ∂K существует и равна χ. Решение u непрерывно по норме пространства $H^{m-\delta}(K)$ зависит от функций $\phi \in H^m(\partial K)$ и $\chi \in H^{m-1}(\partial K)$, связанных соотношениями (4.2). Здесь $\varepsilon(m)=0$, если $m \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon(m)=+0$, если $m \in \mathbb{R}$, $\delta>0$. Результаты 2 главы опубликованы в работах [5], [6], [18].

В главе 3 проводится изучение первой, второй и третьей граничных задач для разных типов уравнений, позволяющие сделать их сравнительный анализ. В § 3.I на основании теорем 4.I, 4.2 гл.2 в круге К проводится изучение задачи Дирихле для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами

$$Lu = au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0, \qquad (1.1)$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \phi \qquad (1.2)$$

в соболевском пространстве $H^m(K)$, $m \geq \frac{3}{2}$, $\phi \in H^{m-1/2}(\partial K)$.

Пусть λ_1, λ_2 - корни уравнения $l(1,\lambda)=0$. Углом наклона бихарактеристики, отвечающей корню λ_1, назовем любое решение φ_1 уравнения $tg\,\varphi_1=-\lambda_1$. Аналогично определяем угол φ_2 через корень λ_2 и угол $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$.

Теорема 1.3. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ задача (1.1-2) имеет не более одного решения в любом пространстве $H^m(K)$, $m \geq 3/2$, тогда и только тогда, когда число φ_0/π иррационально. При выполнении условия $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$ в каждом таком пространстве $H^m(K)$ однородная задача (1.1-2) имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Теорема 1.8. Пусть число $\rho = \varphi_0/\pi$ таково, что для некоторого $k \geq 2$ выполнено неравенство

$$\exists\, C_1 > 0,\ \forall\, p/q \in \mathbb{Q},\ |\rho - p/q| > C_1 q^{-k}. \qquad (1.10)$$

и пусть $\phi \in H^{m+0}(\partial K), m \geqslant k + 3/2$. Тогда решение задачи (1.1-2) существует, единственно, принадлежит пространству $H^{m-k+1}(\partial K)$ и непрерывно зависит от $\phi \in H^{m+0}(\partial K)$.

Теорема 1.9. Для почти всех углов φ_0 для каждой функции $\phi \in H^{3+\varepsilon}(\partial K)$ существует и притом единственное решение $u \in H^2(K)$ задачи (1.1-2).

В § 3.2 изучаются вещественные эллиптические системы 2 х 2 второго порядка, которые можно записать в виде одного уравнения (1.1) с комплексными коэффициентами. Рассмотрен случай простых (комплексных) характеристик, имеющих угол наклона. Это соответствует тому, что корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения различны и не равны $\pm i$. Сопоставление результатов предыдущего и настоящего параграфа дает основание полагать, что эллиптическая система с вещественным углом между бихарактеристиками порождающего ее одного эллиптического уравнения по отношению к задаче Дирихле в круге имеет все свойства гиперболического уравнения, за исключением разве что несколько увеличенной гладкости решения. При этом уравнения с невещественным углом имеют привычные свойства эллиптической граничной задачи, даже если уравнение не правильно эллиптично. Доказаны теоремы, аналогичные вышеизложенным теоремам I.3, I.8, I, 9 уже для эллиптического уравнения.

В § 3.3 получено другое условие связи следов решения задачи Коши (условие из раздела 3 п.0.2 введения), имеющее вид некоторой проблемы моментов, свойства которой, как выясняется, и определяют свойства граничных задач. Изложение ведется для случая эллиптического уравнения, однако ни в получении условий, из которых возникает проблема моментов, ни при ее исследовании эллиптичность исходного уравнения не используется.

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Следствие 3.4. Для каждого решения $u \in H^m(\Omega), m \geq 2$ уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами выполняется равенство Жуковского

$$\int\limits_{\partial\Omega} \varkappa \, ds = 0, \qquad (3.13)$$

где $\varkappa = l(\nu)\chi - [l(\nu)]'_s/2k$ -производная по конормали, k-кривизна.

Рассмотрим следующую проблему моментов:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \alpha(s)(X(s)\cdot\tilde{a}^j)ds = \mu^j_N, \ j = 1,2. \qquad (3.14)$$

Обозначим через M^j_l подпространство в $H^l(\partial\Omega), l \in \mathbb{R}$, состоящее из функций $\alpha(s)$ таких, что для всех $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \alpha(x)(x\cdot\tilde{a}^j)^N ds = 0, \ j = 1,2. \qquad (3.15)$$

Будем говорить, что векторы $\tilde{a}^1 \in \mathbb{C}^2$ и $\tilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ имеют H^k-H^l- свойство на $\partial\Omega$, $k \geq l$, если для каждой функции $\alpha \in H^k(\partial\Omega)$ существуют единственные функции $\alpha^1 \in M^1_l$, $\alpha^2 \in M^2_l$ такие, что $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + \mathrm{const}$.

Задача H^k - H^l состоит в нахождении условий на векторы $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$, необходимых и достаточных для H^k - H^l- свойства на кривой $\partial\Omega$.

Теорема 3.5. Пусть $m \geq p \geq 2$. Следующие три утверждения равносильны:

1. Векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2$ имеют $H^{m-3/2}$ - $H^{p-3/2}$ - свойство на $\partial\Omega$.

2. Задача Дирихле $u\Big|_{\partial\Omega} = \phi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ для уравнения (1.1) имеет единственное решение $u \in H^p(\partial\Omega)$.

3. Задача Неймана $u'_{\nu_*}\Big|_{\partial\Omega} = \varkappa \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ со свойством (3.13) имеет единственное с точностью до аддитивной постоянной решение $u \in H^p(\partial\Omega)$.

Аналогичная связь между этими задачами в вопросе о единственности устанавливается теоремой 3.6.

Теорема 3.7. Векторы $\tilde{a}^1$ и $\tilde{a}^2$ имеют H^{l+k-1} - H^l - свойство на окружности для любого l, если число $\varphi_o = \operatorname{arctg} \sqrt{b^2 - 4ac}\,/(a+c)$ удовлетворяет неравенству (1.10).

Заметим, что при невещественном φ_o имеется $H^k - H^k$ -свойство, означающее разложение $H^k(\partial K) = M_k^1 \oplus M_k^2$ в прямую сумму.

Теорема 3.8. Однородная проблема моментов (3.15) на ∂K имеет счетное число линейно независимых нетривиальных решений в каждом пространстве $H^k(\partial K)$, $k \in \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда число φ_o вещественно и π-рационально, для любого другого φ_o нетривиальных решений нет в каждом пространстве $H^k(\partial K)$, $k \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.9. Для любого $q > 2$ множество $\varphi_o \in \mathbb{R}$, для которых не выполняется неравенство (3.21), имеет лебегову меру нуль, т.е. почти все вещественные φ_o имеют $H^{l+1+\varepsilon} - H^l$-свойство с любым $\varepsilon>0$.

Изучая однородную проблему моментов (3.15) на ∂K, получим следующую сводку результатов по краевым задачам в круге К для эллиптического уравнения (1.1).

Рассмотрим краевую задачу

$$B_1 u'_{\nu_*}(s) + B_2 u_\tau(s) = \varkappa(s) \in H^{m-3/2}(\partial K) \tag{3.22}$$

с произвольными комплексными постоянными B_1, B_2, не равными нулю одновременно.

Теорема 3.10. Пусть $m \geqslant p \geqslant 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Задача (1.1),(3.22) для эллиптического уравнения в круге с условием (3.13) имеет единственное решение $u \in H^p(K)/\{const\}$, где $p=m$, если φ_o невещественно; и $p = m-q$, если иррациональное φ_o/π удовлетворяет неравенству (1.10).

2. Однородная задача (1.1), (3.22) имеет счетное число линейно независимых решений в каждом пространстве $H^p(K)$, если число φ_o/π рационально.

3. Почти для каждого $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, для каждого $p \geq 2$, для каждой $\varkappa \in H^{l+1/2+\varepsilon}(\partial K)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ существует единственное непостоянное решение $u \in H^p(K)$ задачи (1.1),(3.22).

Рассмотрена также третья краевая задача.

В § 3.4 рассмотрена проблема моментов (3.15) для общего уравнения (1.1), из которой следуют свойства граничных задач для разных типов уравнений, которые сравниваются между собой.

Теорема 4.9 . Пусть $m \geq p \geq k \geq m_1$, где m_1 и ниже q берутся из теоремы 4.7. Пусть имеется три набора предложений:

$I_{m,p}$ Векторы $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2$ обладают $H^{m-3/2} - H^{p-3/2}$ свойством на $\partial\Omega$.

$2_{m,k}$ Задача Дирихле $u\big|_{\partial\Omega} = \phi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ для уравнения (4.1) имеет единственное решение $u \in H^k(\Omega)$.

$3_{m,k}$ Задача Неймана $u'_{\nu_a}\big|_{\partial\Omega} = \phi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ для уравнения (4.1) со свойством (4.6) имеет единственное с точностью до адитивной постоянной решение $u \in H^k(\Omega)$.

Утверждается, что тогда $I_{m,p} \Rightarrow 2_{m,p-q}$; $1_{m,p} \Rightarrow 3_{m,p-q}$; $2_{m,k} \Rightarrow 1_{m,k}$; $3_{m,k} \Rightarrow 1_{m,k}$; $2_{m,p} \Rightarrow 3_{m,p-q}$; $3_{m,p} \Rightarrow 2_{m,p-q}$.

Здесь число q отражает влияние типа уравнения. В эллиптическом случае $m_1=2$, $q = 0$, в гиперболическом и смешанном случаях $m_1 = 3$, $q = 1 + \varepsilon(m)$.

В § 3.5 рассмотрена задача Дирихле (1.1),(1.2), $\phi=0$ с квадратными $n\times n$ комплексными матричными коэффициентами a, b, c удовлетворяющими условиям:
предпологается, что квадратичный пучок $L(1,\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2$ регулярен, т.е. $\sigma(1,\lambda) \neq 0$, корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ уравнения $\sigma(1,\lambda) = 0$ различны, из $2n$ собственных векторов найдутся n собственных векторов $e^1, e^2, \ldots, e^n$ пучка $L(1,\lambda)$, удовлетворяющих равенству $L(1,\lambda)e^j = 0$, различных и линейно независимых,ядро оператора $L(1,\lambda_j)$ одномерно для всех j, все корни $\lambda_j \neq \pm i$.

Обозначим через φ_j корни уравнения $tg\ \varphi_j = -\lambda_j$.

Получено условие на коэффициенты a,b,c, необходимое и достаточное для существования нетривиального решения задачи (1.1), (1.2), $\phi=0$ в пространстве вектор-функций $H^2(\Omega)$. Это условие имеет вид: $\forall m\in N$, $\Delta_m\neq 0$, где Δ_m-определитель явно построенной матрицы.

Большой набор систем с нарушенной единственностью задачи Дирихле дает следующее утверждение.

Теорема 5.3. Пусть среди углов φ_k, $k=1,2,\ldots,2n$ найдутся $n+1$ углов φ_j, например, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ такие, что все разности $\varphi_j-\varphi_1$ (а значит и все разности $\varphi_j-\varphi_i$, $i,j = 1,2,\ldots, n+1$) вещественны и π - рациональны. Тогда задача (1.1),(1.2),$\phi=0$ имеет счетный набор нетривиальных векторно-полиномиальных решений.

В частности, это так для системы с $\mu\in C$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ &-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \end{aligned}\right. \qquad (5.3)$$

частный вид которой при $\mu = \sqrt{2}$, $\mu=-2$ составляют известные примеры Бицадзе. Результаты 3 главы опубликованы в работах [3],[4], [8],[12],[14],[17].

В главе 4 изучаются вопросы единственности решения граничных задач, основанные на двойственности уравнение-область. При изучении неклассических граничных задач часто возникает ситуация, когда условия нетривиальной разрешимости однородных граничных задач записываются в виде счетного числа условий на коэффициенты уравнения или на область. Встает вопрос, насколько типична эта ситуация ? В главе 4 дается частичный ответ на этот вопрос.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная полуалгебраическая область, заданная неравенством $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | P(x) > 0\}$ с вещественным полиномом

P, не вырождающимся на границе $\partial\Omega$: $|\nabla P| \neq 0$ на $\partial\Omega$, откуда следует, что $\partial\Omega$ - гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим граничную задачу

$$L(D_x)u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \; u\,|_{\partial\Omega} = u'_\nu|_{\partial\Omega} = \ldots = u_\nu^{(\gamma-1)}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.1}$$

где L - полином с комплексными коэффициентами от производных $D_x=-i\nabla$, $u(x) \in \mathbb{C}$, $\nu = -\nabla P/|\nabla P|$ - вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Обозначим через m и l_o соответственно старший и младший порядки оператора L, p и p_o - старший и младший порядки полинома P, $p \geq 2$, $\gamma \leq m$. Будем здесь для простоты рассматривать классические решения задачи (1.1), т.е. $u \in C^m(\bar{\Omega})$.

Теорема 1.1. 1) Если $2 \leq p < l_o/\gamma$, то задача (1.1) обязательно имеет полиномиальное решение.

2) Если $\dfrac{l_o}{\gamma} \leq p \leq \dfrac{l_o}{m-\gamma}$, то имеется не более чем счетное число алгебраических условий на коэффициенты полиномов L и P, невыполнение которых влечет только тривиальную разрешимость задачи (1.1) в пространстве $C^m(\bar{\Omega})$.

Пункт 2) в частности означает, что лебегова мера в пространстве коэффициентов пар полиномов (L,P) заданных степеней множества тех пар, для которых задача (1.1) имеет нетривиальное решение, равна нулю.

Теорема 1.3. Задача Дирихле для ультрагиперболического уравнения

$$u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_kx_k} - a^2(u_{x_{k+1}x_{k+1}}+\ldots+u_{x_nx_n}) = 0, \quad u|_{\partial\Omega}=0.$$

в шаре $\Omega = \{x \mid x^2-1 < 0\}$, $0 < k < n$, имеет нетривиальное решение в пространстве $C^2(\bar{\Omega})$ для тех и только для тех $a \in \mathbb{C}$, для которых найдется номер $M \in N$ такой, что

1) при $n=2$, $k=1$ $\quad U_M\left(\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right) = 0$,

2) при $n=3$, $k=1$ $\quad P_M\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right) = 0$,

3) при $n=3$, $k=2$ $\qquad P_м\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)=0,$

4) при $n\geq4$, $k=2$ $\qquad P_м^{(\frac{k}{2},\ \frac{n-k}{2})}\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)=0,$

где $U_м, P_м, P_м^{(\alpha,\beta)}$ -соответственно полиномы Чебышева 2-го рода, Лежандра, Якоби. При выполнении условия существует полиномиальное решение исходной задачи.Как следует из теории ортогональных полиномов, множество тех a, которые удовлетворяют любому из этих условий, есть счетное всюду плотное множество на вещественной оси. Результаты 4 главы опубликованы в работах [7],[9],[10],[16].

В пятой главе содержатся дополнительные результаты, связанные методами или содержанием с материалом предыдущих глав. На примере уравнения Лапласа в круге рассмотрены эквивариантные граничные задачи, получены утверждения о спектре соответствующего оператора. Указано пространство разрешимости уравнения Мизохаты с правой частью Грушина на торе, доказывается аналогичное утверждение для более общих уравнений с условием типа эллиптичности. Изучена гипоэллиптичность оператора с постоянными коэффициентами и однородным символом на двумерном торе. Изучается одна задача интегральной геометрии на сфере. Результаты 5 главы опубликованы в работах [1],[2],[9],[11].

Основные положения, вынесенные на защиту.

I). Определение ассоциированных следов функций из области определения максимального оператора и изучение их свойств, что позволяет,в частности, получить необходимое и достаточное условие связи ассоциированных следов решения однородного уравнения.

2). Построение и изучение пространств ассоциированных следов и связанных с ними операторов, что позволяет исследовать один класс общих граничных задач, а также пространства, связанные с дифференциальной операцией.

3). Исследование условия связи ассоциированных следов решения однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, записанного в виде одной проблемы моментов, что позволяет,в частности, получить связь между свойствами задач Дирихле и Неймана в общей области.

4). Исследование проблемы моментов в круге, что позволяет,в частности, сделать вывод о том,что тип дифференциального уравнения с двумя переменными незначительно влияет на свойства граничных задач,которые определяются свойствами упомянутой проблемы моментов.

5). Исследование вопросов единственности решения граничных задач типа Дирихле для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полуалгебраических областях с помощью двойственности уравнение - область, изучение типичности единственности решения граничных задач, изучение единственности решения задачи Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре.

Основные положения диссертации опубликованы в работах:

1. Бурский В.П. О гипоэллиптичности однородного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в пространстве периодических функций на плоскости. Сб."Граничные задачи для дифференциальных уравнений",Наукова думка,Киев,1980.С.39-41.

2. Бурский В.П. О разрешимости уравнения Гарабедяна-Грушина. Сб."Граничные задачи для дифференциальных уравнений",Наукова думка,Киев,1980.С.35-39.

3. Бурский В.П.Замечания о ядре дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в области//Мат. физика и нелинейн. механика, 1984, вып. 2 (36), с. 43-45.

4. Бурский В.П. О некоторых краевых задачах для уравнений

третьего и четвертого порядков с постоянными коэффициентами в круге//Сб."Матем.физика и нелинейная механика".1985.№4.С.76-81.

5. Бурский В.П. Гармонический анализ в краевых задачах для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР.Сер.А.- 1986.- №12.- С.7-10.

6. Бурский В.П.Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге // Изв. вузов. Математика.- 1987.- №2. - С.22-29.

7. Бурский В.П. Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения.-1988. -24, № 6.-С. 1038-1039.

8. Бурский В.П. Некоторые краевые задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка с однородным символом в круге // Сб."Матем.физика и нелинейная механика". 1988. №9. С.32-35.

9. Бурский В.П. Замечания о задаче Дирихле для ультрагиперболического уравнения в шаре и интегральной геометрии на сфере //Успехи математических наук. 1988. Т.43. №5. С.181-182.

10. Бурский В.П. Граничные свойства L_2-решений линейных дифференциальных уравнений и двойственность уравнение-область // Докл.АН СССР. 1989. Т.309. №5. С.1036-1039.

11. Бурский В.П. Об одной коммутативной диаграмме,следах решений и спектре оператора граничной задачи для уравнения Лапласа в круге// Сб."Нелинейные граничные задачи",№2(1990). -с.13-19.

12. Бурский В.П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Матем.заметки. 1990. Т.48, №3. С.32-36.

13. Бурский В.П. Об одной коммутативной диаграмме,связанной с дифференциальным оператором в области// Укр.матем. журнал. -1991,т.43,№ 12,с.1703-1709.

14. Бурский В.П. О решениях задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Укр. мат. журн.-1992.- 44,№ 10. - С.1307-1313.

15. Бурский В.П. О расширениях дифференциального оператора в области// Сб. Нелинейные граничные задачи,№5(1993),с.18-25.

16. Бурский В.П. О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей// Укр. мат. журнал.-1993.- 45,№ 7. - С.898-906.

17. Бурский В.П. О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов// Укр.матем.журнал.-1993.-т.45,№ 11.-С.1476-1483.

18. Бурский В.П.Теоремы о следах решения уравнения колебания струны в круге. - Киев, 1985.- 35 с.-(Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 85.23).

Бурский В.П. Некоторые методы и результаты исследования граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1996, рукопись.

Предлагается и апробируется несколько подходов к изучению граничных задач для общих уравнений, основанных на формуле Грина. Изучаются граничные свойства L_2-решений общих уравнений, что позволяет исследовать один класс общих граничных задач,а также пространства, связанные с дифференциальной операцией. Условия связи следов решения изучаются для уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в плоской области,исследуются граничные задачи в круге.Изучается типичность свойства единственности решения граничных задач. Результаты опубликованы в 18 научных работах.

Burskii V.P. A methods and results of investigation of boundary value problems for partial differential equations.

Thesis for Doctor degree in Physics and Mathematics. Speciality 01.01.02- differential equations.Institute of Applied Mathematics and Mechanics of Nat.Ac.Sci.of Ukraine.Donetsk.1996.Manuscript.

Several approaches to study of boundary value problems for general equations, which are based on the Greens'formule,are offered and applyed.The boundary properties of L_2-solutions of such equations are studied. This makes possible the study a class of general boundary value problems and the spaces, which are connected whith differetial operation. The conditions of the connection of traces of the solution are investigated for equation of second order whith constant coeffitions in the plane domain.The boundary value problems are studed in the disk.The typicalness of the property of uniqueness of the solution of boundary value problems is investigated.The results are contained in 18 published papers.

Ключові слова: диференціальний оператор, поширення оператора, гранична задача, граничні властивості розв'язку, задача Діріхле, некоректна задача, типовість властивості єдиності.

Подписано к печати 23.10.96г.Формат 84x60/16.
Объем 2.0 п.л. Заказ № 187. Тираж 100 экз.
Напечатано в типографии ПО "Чайка".