НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КАШПУР Олена Федорівна

ПОЛІНОМІАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ОПЕРАТОРІВ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

01.01.07 — обчислювальна математика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедр[illegible] методів математичної фізики факультету кібернетики Національного університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник : доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник В.В. Хлобистов.

Офіційні опоненти : член-кореспондент АН Республіки Бєларусь,
доктор фізико-математичних наук,
професор Л.О. Янович;
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник В.І. Біленко.

Провідна установа : Інститут кібернетики НАН України, м. Київ.

Захист відбудеться "19" грудня 1996 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.23 Національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, пр. Глушкова, 2, корп. 6, ф-т кібернетики, ауд. 40. (Тел. 266-12-58, Факс 266-12-48, E-mail vpsh@icchq.univ.kiev.ua)

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано "16" листопада 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради
канд. фіз.-мат. наук В.П. Шевченко

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Проблема апроксимації нелінійних операторів поліномами є дуже актуальною як в теоретичній, так і в прикладній математиці. Серед небагатьох публікацій в цій галузі виділимо такі результати: узагальнення теореми Вейєрштрасса на дійсний сепарабельний гільбертовий простір (П.Прентер); на банаховий простір (В.Істратеску); теорема Фреше про границю послідовності поліноміальних функціоналів інтегрального виду, визначених на просторі неперервних функцій, а також узагальнення її на банаховий простір (І.Даугавет). Важливість досліджень в цьому напрямку підтверджується багатьма задачами прикладного характеру. На практиці досить часто зустрічаються нелінійні системи, математичні моделі яких описуються операторними поліномами. Ці системи називають поліноміальними. Вони знаходять численні застосування в таких галузях, як хімія складних сполук, ідентифікація систем, динаміка популяцій, нейрологія, розпізнавання образів, теорія лазерів, динаміка урбанізації, тощо. Підвищений інтерес до поліноміальних систем обумовлений можливістю отримання наближених результатів на основі заміни нелінійної системи поліноміальною, математичний опис якої простіший в порівнянні з нелінійною (неполіноміальною). Крім того, багато відомих аналітичних методів ідентифікації, що застосовуються для лінійних систем, можуть бути використані для полілінійних і поліноміальних. Таким чином, в певному сенсі, теорія поліноміальних систем є зв'язком між лінійною та нелінійною теоріями.

Одним із найпоширеніших методів розв'язання задач поліноміальної апроксимації є поліноміальна інтерполяція. Вона посідає особливе місце в теорії поліноміальних наближень операторів, оскільки багато задач вимагають співпадіння оператора і апроксимуючого полінома на заданій множині елементів (вузлів). Так, наприклад, здебільшого інформація про досліджуваний об'єкт міститься в наборі пар "вхід-вихід" і по цій інформації необхідно побудувати математичну модель об'єкта. Розв'язання такої задачі на множині операторних поліномів заданого степеня природньо приводить до поліноміальної операторної інтерполяції. В цій галузі досліджень виділимо такі результати: побудова операторного інтерполянта з мінімальною нормою в гільбертовому просторі сумовних з квадратом функцій (У. Портер), побудова інтерполяційних операторних поліномів Лагранжа та Ерміта в банаховому просторі у випадку класичного співвідношення між кількістю вузлів та степенем поліному (П. Прентер), побудова інтерполяційного полінома типу Ньютона на функціональних просторах (Л.О.Янович, П.І.Соболевський), теореми про збіжність інтерполяційного поліноміального процесу в банаховому просторі для абстрактних функцій у випадку спеціально обраної послідовності вузлів (Х.Кьоніг), про рівномірну збіжність операторного процесу типу Ньютона в кулі банахового простору, а також побудова основ загальної теорії поліноміальної операторної інтерполяції в абстрактних гільбертових і векторних просторах (В.Л. Макаров, В.В. Хлобистов).

Ця дисертаційна робота присвячена подальшому розвитку і вдосконаленню деяких результатів В.Л. Макарова та В.В. Хлобистова, і одержанню нових результатів в цій галузі.

Мета роботи. Метою дисертації є дослідження таких задач поліноміальної інтерполяції нелінійних операторів в абстрактних гільбертових просторах :

1) обгрунтування більш простих, в порівнянні з раніше відомими, основних формульних співвідношень поліноміальної операторної інтерполяції: умов розв'язуваності інтерполяційної задачі, опис всієї множини інтерполянтів та її підмножини поліномів, що зберігають многочлени відповідного степеня;
2) розв'язання задачі побудови операторного полінома типу Ерміта з інтерполяційними умовами, що містять диференціали Гато вищих порядків у вузлах по довільних напрямках: знаходження умов розв'язуваності цієї задачі, опис всієї множини ермітових операторних поліномів і підмножини інтерполянтів, що зберігають поліноми відповідного степеня;
3) отримання оцінок точності інтерполяції поліноміальних операторів в метриці простору їх значень.

Наукова новизна. Для гільбертового простору одержані такі результати:

- отримано обгрунтування необхідних та достатніх умов існування інтерполяційного операторного полінома заданого степеня в термінах власних векторів з нульовим значенням матриці, для побудови якої використано вузли інтерполяції, та значень оператора в цих вузлах;

- конструктивно побудовано всю множину таких поліномів, а також підмножину інтерполянтів, що мають властивість збереження поліномів відповідного степеня;
- доведено теорему про необхідні та достатні умови існування операторного поліному типу Ерміта заданого степеня в гільбертовому просторі з інтерполяційними умовами, що містять диференціали Гато вищих порядків у вузлах по довільних напрямках;
- конструктивно описано всю множину ермітових поліномів, а також підмножину інтерполянтів, що зберігають многочлени відповідного степеня;
- доведено теореми про точність інтерполяції поліноміальних операторів в метриці простору їх значень.

Методи досліджень. В роботі використовуються теорія функціонального аналізу, методи обчислювальної математики, теорія матриць, функціональні ряди в теорії нелінійних систем.

Достовірність. Результати строго математично обгрунтовані, вони повністю узгоджуються з результатами, одержаними іншими авторами.

Практична цінність. Необхідні та достатні умови існування інтерполяційних операторних поліномів одержано в термінах лінійної алгебри, мають компактну форму запису і легко перевіряються на практиці для конкретних задач. За виконання цих умов наведено конструктивну побудову інтерполянтів для будь-яких співвідношень між їх степенем та кількістю вузлів. Отримано оцінку точності інтерполяції поліноміальних операторів, наведено теорему про збіжність інтерполяційного процесу в разі збільшення кількості вузлів в метриці простору значень операторів. Розглянуто застосування операторної інтерполяції для розв'язання задачі ідентифікації поліноміальних систем.

Основні положення, які виносяться на захист

1. Обгрунтування необхідних та достатніх умов існування інтерполяційного операторного полінома в термінах власних векторів з нульовим власним значенням матриці, для побудови якої використано вузли інтерполяції, та значень оператора в цих вузлах.
2. Конструктивна побудова всієї множини таких інтерполяційних операторних поліномів заданого степеня, а також всієї підмножини інтерполянтів, що зберігають поліноми відповідного степеня.
3. Теорема про розв'язуваність задачі побудови операторного полінома типу Ерміта в гільбертовому просторі з інтерполяційними умовами, що містять диференціали Гато вищих порядків у вузлах по довільних напрямках.
4. Конструктивна побудова всієї множини таких ермітових поліномів заданого степеня і підмножини інтерполянтів, які зберігають операторні поліноми відповідного степеня.
5. Оцінка точності та теорема про збіжність в разі збільшення кількості вузлів інтерполяційного процесу для поліноміальних операторів.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на семінарі "Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXVI)" (Київ, 1996); семінарі проф. В.Л. Макарова (Київ, 1996); семінарі чл.

кор. АН Республіки Бєларусь, проф. Л.О. Яновича (Мінськ, 1996); семінарі проф. В.К. Задираки (Київ, 1996).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 5 робіт автора.

Структура і об'єм роботи. Дисертація об'ємом 89 машинописних сторінок складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури, що містить 53 найменування.

Зміст роботи

У вступі обгрунтовується актуальність досліджень в галузі поліноміальної операторної інтерполяції, подано стислий огляд найбільш цікавих результатів розв'язання задач поліноміальної операторної інтерполяції. Проведено порівняльний аналіз цих результатів з результатами даної роботи. Розглянуто стислий зміст дисертації по розділах.

Перший розділ роботи "Поліноміальна інтерполяція операторів в абстрактних гільбертових просторах" містить такі результати : доведено теореми про необхідні та достатні умови існування операторного інтерполяційного полінома заданого степеня, що містять більш прості, в порівнянні з раніше відомими, формульні співвідношення (в термінах власних векторів з нульовим значенням матриці, для побудови якої використано систему вузлів, та значень оператора в цих вузлах); про конструктивний опис всієї множини таких інтерполянтів; виділення підмножини поліномів, що зберігають многочлени відповідного степеня.

Нехай **X** - гільбертовий, **Y** - векторний простори. Задано систему вузлів $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X$ і значення $F(x_i)$, $i=\overline{1,m}$ оператора $F:X \to Y$ в цих вузлах. Нехай Π_n множина операторних поліномів $P_n:X \to Y$ степеня n

$$\Pi_n = \left\{P_n(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \ldots + L_nx^n\right\}, \tag{1}$$

де $L_0 \in Y$, $L_px^p = L_p(x,x,\ldots,x)$, $L_p(v_1,v_2,\ldots,v_p):X^p \to Y$ p-лінійний симетричний неперервний оператор. Потрібно на множині Π_n побудувати такий поліном n-го степеня $P_n^I:X \to Y$, який би задовільняв інтерполяційні умови

$$P_n^I(x_i) = F(x_i),\ \ i=\overline{1,m},\ \ P_n^I(x) \in \Pi_n. \tag{2}$$

Позначимо $<\alpha,\beta>= \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i\beta_i$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m)$, $\alpha_i \in Y$, $\beta_i \in R_1$, $i=\overline{1,m}$; $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток в X, V^- -узагальнена обернена матриця розмірності $m \times m$ до матриці

$$V = \left\|\sum_{p=0}^n (x_i,x_r)^p\right\|_{i,r=1}^m,\ 0^0=1,\ \vec{F} = \{F(x_i)\}_{i=1}^m,\ \ \vec{Q}_n = \{Q_n(x_i)\}_{i=1}^m,$$

$\vec{I}(x) = \sum\limits_{p=0}^n \left\{(x_i,x)^p\right\}_{i=1}^m$. Основні результати цього розділу сформульовано у вигляді таких теорем.

Теорема1.1. *Для розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції (2) в гільбертовому просторі* X *необхідним та достатнім є виконання умови*

$$Z_V\vec{F} = \vec{0} \in Y^r,\ \ \ r = m - \mathrm{rg}V, \tag{3}$$

де $\mathbf{Z}_V$ *матриця, елементами рядків якої є координати лінійно незалежних власних векторів матриці* $\mathbf{V}$ *з нульовим власним значенням.*

Теорема1.2. *Нехай виконується умова (3). Тоді формула*

$$\mathbf{P}_n^I(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_n(\mathbf{x}) + \left\langle \vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathbf{Q}}_n, \mathbf{V}^{-}\vec{\mathbf{I}}(\mathbf{x}) \right\rangle, \tag{4}$$

коли $\mathbf{Q}_n$ *пробігає* Π_n, *описує в гільбертовому просторі* $\mathbf{X}$ *всю множину інтерполяційних для* $\mathbf{F}$ *у вузлах* $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{X}$ *операторних поліномів степеня* $\mathbf{n}$.

Далі, наведено опис множини інтерполяційних поліномів n-го степеня, які мають властивість збереження многочленів відповідного степеня.

Визначення. Поліном $\mathbf{P}_n(\mathbf{x};\mathbf{F}) \in \Pi_n$ як операторну функцію від $\mathbf{F}$ будемо називати с-поліномом, якщо він задовільняє умові

$$\mathbf{P}_n(\mathbf{x};\mathbf{F}) \equiv \mathbf{F}, \quad \forall \mathbf{F} \in \Pi_n, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

Позначимо через $\Pi_n^c(\mathbf{F})$ всю множину с-поліномів для $\mathbf{F}$.

Теорема1.3. *Нехай виконується умова (3). Тоді формула (4), коли* $\mathbf{Q}_n$ *пробігає* $\Pi_n^c(\mathbf{F})$, *описує в гільбертовому просторі* $\mathbf{X}$ *всю множину інтерполяційних для* $\mathbf{F}$ *у вузлах* $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{X}$ *операторних* с-*поліномів степеня* $\mathbf{n}$.

Проведено порівняльний аналіз двох методів поліноміальної операторної інтерполяції. Показано еквівалентність цих методів, а у випадку функціональних просторів - ефективність алгоритму реалізації ітераційного методу за кількістю арифметичних дій.

Другий розділ дисертації "Інтерполяційні формули типу Ерміта в гільбертовому просторі" присвячено побудові та дослідженню інтерполяційних операторних поліномів типу

Ерміта в гільбертовому просторі. В роботах В.Л.Макарова, В.В.Хлобистова побудовано поліном Ерміта з інтерполяційними умовами, які містять диференціали Гато вищих порядків у вузлах за напрямками, що повторюються. Так, k-й диференціал Гато містить всі (k-1) напрямків, що знаходяться в (k-1)-му диференціалі в тому ж вузлі, але це, власне, звужує галузь застосування такої операторної інтерполяції. У цьому розділі це обмеження знімається і напрямки диференціювання можуть бути вибрані довільними.

Нехай X - гільбертовий, Y - векторний простори. Задано оператор $F:X \to Y$ своїми значеннями у вузлах $x_i \in X$, $i=\overline{1,m}$ і диференціалами Гато до порядків k_i включно

$F(x_i)$, $F'(x_i)v_{i1}^{(1)}$, $F''(x_i)v_{i2}^{(2)}v_{i1}^{(2)},\ldots,F^{(k_i)}(x_i)v_{ik_i}^{(k_i)}v_{i,k_i-1}^{(k_i)}\ldots v_{i1}^{(k_i)}$, де

$v_{i1}^{(1)};v_{i2}^{(2)},v_{i1}^{(2)};\ldots;v_{ik_i}^{(k_i)},v_{i,k_i-1}^{(k_i)},\ldots,v_{i1}^{(k_i)}$ деякі напрямки (елементи простору X).

На множині Π_n операторних поліномів $P_n:X \to Y$ степеня n виду (1) потрібно побудувати поліном $P_n(x)$, який у випадку його існування задовільнятиме інтерполяційні умови Ерміта

$$
\begin{aligned}
&P_n(x_i)=F(x_i),\\
&P_n'(x_i)v_{i1}^{(1)}=F'(x_i)v_{i1}^{(1)},\\
&P_n''(x_i)v_{i2}^{(2)}v_{i1}^{(2)}=F''(x_i)v_{i2}^{(2)}v_{i1}^{(2)}, \qquad\qquad (8)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(k_i)}(x_i)v_{ik_i}^{(k_i)}v_{i,k_i-1}^{(k_i)}\ldots v_{i1}^{(k_i)}=F^{(k_i)}(x_i)v_{ik_i}^{(k_i)}v_{i,k_i-1}^{(k_i)}\ldots v_{i1}^{(k_i)},\ i=\overline{1,m},\ P_n\in\Pi_n.
\end{aligned}
$$

Поставимо задачу пошуку умови існування інтерполяційного полінома, і опису, в разі її виконання, всієї множини ермітових операторних поліномів, що відповідають співвідношенням (8), а також її підмножини інтерполянтів, які мають властивість збереження многочленів відповідного степеня. Ця задача повністю розв'язана. Спершу отримано формули ермітової інтерполяції, що містять вектори і матриці з елементами, які повторюються, а надалі, з урахуванням цього, проведено матричну модифікацію основних формульних співвідношень ермітової операторної інтерполяції, в результаті якої знижується розмірність матриць і векторів, що входять у ці формули. Доведено еквівалентність отриманих раніше умов розв'язуваності задачі ермітової інтерполяції та модифікованих.

Введемо позначення

$$\vec{F}_H = \left\{ F^{(i)}(x_j) v_{ji}^{(i)} v_{j,i-1}^{(i)} \dots v_{j1}^{(i)}, \quad i = \overline{0, k_j} \right\}_{j=1}^{m}, \tag{9}$$

$$\bar{Q}_{nH} = \left\{ Q_n^{(i)}(x_j) v_{ji}^{(i)} v_{j,i-1}^{(i)} \dots v_{j1}^{(i)}, \quad i = \overline{0, k_j} \right\}_{j=1}^{m}, \tag{10}$$

$$g(u, v) = \sum_{p=0}^{n} (u, v)^p, \quad \forall u, v \in X, \quad 0^0 = 1,$$

$$\vec{h}(x) = \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_i} g(x_j + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{jp}^{(i)}, x) \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_i = 0}, \quad i = \overline{0, k_j} \right\}_{j=1}^{m}, \tag{11}$$

$\sum_1^0 = 0$, матриця $T = \| T_{ts} \|_{t,s=1}^{m}$ розмірності $L \times L$, $L = \sum_{l=1}^{m} k_l + m$,,

$$
T_{ts} = \left\| \begin{matrix}
g(x_t, x_s) & \partial g(x_t, x_s + \beta_1 v_{s1}^{(1)})_0 & \cdots & \partial^{k_s} g(x_t, x_s + \sum_{p=1}^{k_s} \beta_p v_{sp}^{(k_s)})_0 \\
\partial g(x_t + \alpha_1 v_{t1}^{(1)}, x_s)_0 & \partial^2 g(x_t + \alpha_1 v_{t1}^{(1)}, x_s + \beta_1 v_{s1}^{(1)})_0 & \cdots & \partial^{k_s+1} g(x_t + \alpha_1 v_{t1}^{(1)}, x_s + \sum_{p=1}^{k_s} \beta_p v_{sp}^{(k_s)})_0 \\
\partial^2 g(x_t + \sum_{p=1}^{2} \alpha_p v_{tp}^{(2)}, x_s)_0 & \partial^3 g(x_t + \sum_{p=1}^{2} \alpha_p v_{tp}^{(2)}, x_s + \beta_1 v_{s1}^{(1)})_0 & \cdots & \partial^{k_s+2} g(x_t + \sum_{p=1}^{2} \alpha_p v_{tp}^{(2)}, x_s + \sum_{p=1}^{k_s} \beta_p v_{sp}^{(k_s)})_0 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\
\partial^{k_t} g(x_t + \sum_{p=1}^{k_t} \alpha_p v_{tp}^{(k_t)}, x_s)_0 & \partial^{k_t+1} g(x_t + \sum_{p=1}^{k_t} \alpha_p v_{tp}^{(k_t)}, x_s + \beta_1 v_{s1}^{(1)})_0 & \cdots & \partial^{k_t+k_s} g(x_t + \sum_{p=1}^{k_t} \alpha_p v_{tp}^{(k_t)}, x_s + \sum_{p=1}^{k_s} \beta_p v_{sp}^{(k_s)})_0
\end{matrix} \right\|, \tag{12}
$$

$$
\partial^{k_t+k_s} g(x_t + \sum_{p=1}^{k_t} \alpha_p V_{tp}^{(k_t)}, x_s + \sum_{p=1}^{k_s} \beta_p V_{sp}^{(k_s)})_0 =
$$

$$
= \frac{\partial^{k_t+k_s}}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_{k_t} \partial\beta_1 \ldots \partial\beta_{k_s}} g(x_t + \sum_{p=1}^{k_t} \alpha_p V_{tp}^{(k_t)}, x_s + \sum_{p=1}^{k_s} \beta_p V_{sp}^{(k_s)}) \Big|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k_t} = \beta_1 = \ldots = \beta_{k_s} = 0}
$$

Нехай Z_T матриця, елементами рядків якої є координати лінійно незалежних власних векторів матриці T з нульовим власним значенням, T^- - узагальнена обернена матриця до матриці T.

Основні результати другого розділу з врахуванням матричної модифікації сформульовані у вигляді таких теорем.

Теорема 2.5. *Необхідною та достатньою умовою існування операторного поліному типу Ерміта у гільбертовому просторі* X, *що задовільняє співвідношенням (8), є виконання рівності*

$$Z_T\vec{F}_H = \vec{0} \in Y^r, \quad r = L - rgT. \qquad (13)$$

Теорема 2.6. *Нехай виконується рівність (13). Тоді формула*

$$P_n^H(x) = Q_n(x) + \left\langle \vec{F}_H - \vec{Q}_{nH}, T^- \vec{h}(x) \right\rangle, \qquad (14)$$

коли Q_n *пробігає* Π_n, *описує в гільбертовому просторі* X *всю множину операторних поліномів типу Ерміта з інтерполяційними умовами (8).*

Теорема 2.7. *Нехай виконується рівність (13). Тоді формула (14), коли* Q_n *пробігає* $\Pi_n^c(F)$, *описує в гільбертовому просторі* X *всю множину операторних поліномів типу Ерміта, що мають властивість збереження операторних многочленів відповідного степеня.*

В третьому розділі "Оцінки точності інтерполяції поліноміальних операторів" розглянуто задачу інтерполяції поліноміальних операторів, отримано оцінку точності інтерполяції, доведено збіжність інтерполяційного процесу у випадку належності вузлів інтерполяції ортонормованому базису простора.

Нехай X - гільбертовий, Y - векторний простори, $\{x_i\}_{i=1}^m$ ортонормована система вузлів із X. Для поліноміального оператора $F_n = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \ldots + L_nx^n : X \to Y$, що заданий своїми значеннями $F_n(0)$, $F_n(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k})$, $\forall k \le n$, розглянуто інтерполянт

$$P_n^I(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}(x,x_{i_1})\ldots(x,x_{i_k})L_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}), \qquad (15)$$

з інтерполяційними умовами $P_n^I(x_i)=F_n(x_i)$, $i=\overline{1,m}$. Для його побудови (визначення k-лінійних форм $L_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, $k=\overline{1,n}$) на операторному рівні узагальнюється метод ортогональних моментів, який викорис зується в задачах ідентифікації поліноміальних регулярних функціональних систем з наступним застосуванням схем виділення однорідних функцій. За допомогою цього узагальнення знаходяться значення операторів $L_k(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$, $k=\overline{1,n}$ і, відповідно, визначається інтерполянт $P_n^I(x)$. Для інтерполяційного полінома $P_n^I(x)$ наведено оцінку точності інтерполяції. Нехай Y - лінійний нормований простір, $\|L_k\|$ - норма k-лінійного оператора,

$$\varepsilon_m(x)=\left\|x-\sum_{i=1}^{m}(x,x_i)x_i\right\|, \quad \|x\|=(x,x)^{1/2}.$$

Теорема 3.2. *Має місце оцінка*

$$\left\|F_n(x)-P_n^I(x)\right\|_Y \le \sum_{k=1}^{n}\|L_k\|\left[\left(\|x\|+\varepsilon_m(x)\right)^k-\|x\|^k\right]. \qquad (16)$$

При цьому, якщо $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *ортонормований базис в* X, *то інтерполяційний процес* $P_n^I(x)$, *що визначається формулою (15), поточково збігається до* $F_n(x)$ *коли* $m\to\infty$.

Розглянуто розв'язання задачі ідентифікації методом інтерполяції для регулярного операторного полінома n-го степеня в просторі $C[-\pi, \pi]$, оснащеного скалярним добутком. Для періодичних з періодом 2π функцій, k-та похідна яких має обмежену зміну, отримано оцінку швидкості збіжності інтерполяційного процесу в разі зростання кількості вузлів. Наведено результати обрахування похибки інтерполяції на прикладі функціонального регулярного полінома другого степеня.

Основні результати роботи

1. Отримано обгрунтування необхідних та достатніх умов існування інтерполяційного операторного полінома в термінах власних векторів з нульовим значенням матриці, для побудови якої використано вузли інтерполяції, та значень оператора в цих вузлах.
2. Наведено опис всієї множини таких інтерполяційних операторних поліномів заданого степеня, а також підмножини інтерполянтів, що мають властивість збереження многочленів відповідного степеня.
3. Розв'язано задачу побудови операторного полінома типу Ерміта в гільбертовому просторі з інтерполяційними умовами, що містять диференціали Гато вищих порядків у вузлах по довільних напрямках. Отримано необхідні та достатні умови розв'язуваності цієї задачі.
4. Наведено опис всієї множини ермітових поліномів заданого степеня і підмножини інтерполянтів, які зберігають операторні поліноми відповідного степеня.
5. Для поліноміальних операторів в метриці простору їх значень наведено оцінку точності інтерполяції, доведено

теорему про збіжність інтерполяційного процесу в разі збільшення кількості вузлів.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах

1. Е.Ф. Лыценко (Кашпур), В.В. Хлобыстов. Сравнительный анализ двух методов полиномиального интерполирования в гильбертовом пространстве // Обчисл. та прикл. матем. Сб. наук. пр. - Київ, 1994, вип. 78. - с.49-54.
2. Е.Ф. Кашпур, В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов. К задаче эрмитовой интерполяции операторов в гильбертовом пространстве // Обчисл. та прикл. матем. Сб. наук. пр. - Київ, 1994, вип. 78. - с.38-48.
3. Е.Ф. Кашпур. Матричная модификация формул эрмитовой интерполяции операторов в гильбертовом пространстве // Обчисл. та прикл. матем. Сб. наук. пр. - Київ, 1994, вип. 78. - с.28-37.
4. Е.Ф. Кашпур, В.В. Хлобыстов. Интерполирование полиномиальных операторов в гильбертовом пространстве // Обчисл. та прикл. матем. Сб. наук. пр. - Київ, 1995, вип. 79. - с.85-91.
5. В.В. Хлобыстов, Е.Ф. Кашпур. К задаче интерполирования полиномиальных операторов // Кибернетика и системный анализ. - 1996, № 3 - с. 102-108.

Автором самостійно отримані такі результати :

- в [1] розглянуто два методи поліноміальної операторної інтерполяції, для функціонального простору показано ефективність алгоритму реалізації методу послідовних наближень за кількістю арифметичних дій;

- в [2] доведено теорему про існування операторного поліному типу Ерміта з інтерполяційними умовами, що містять диференціали Гато по довільних напрямках;
- в [4] доведено теорему про знаходження операторних форм;
- в [5] розглянуто розв'язання задачі ідентифікації поліноміальних систем методом інтерполяції.

Кашпур Е.Ф. Полиномиальная интерполяция операторов в гильбертовом пространстве. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07- вычислительная математика, Национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 1996.

В гильбертовом пространстве решены задачи полиномиального операторного интерполирования типа Лагранжа и Эрмита : найдены условия существования интерполяционных операторных полиномов; при выполнении этих условий коструктивно описано все множество интерполянтов; выделено подмножество интерполяционных полиномов, сохраняющих многочлены соответствующей степени. Получены оценки точности интерполяции полиномиальных операторов.

Kashpur E.F. The polynomial interpolation of operators in Hilbert space. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph. D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.07.- numerical mathematics. National University T. Shevchenko, Kiev, 1996.

The Lagrange and Hermit type polynomial operator interpolation problems in Hilbert space are solved : conditions of existing of interpolational operator polynoms; when conditions are satisfied the full set of such polynoms and subset of interpolants, which save corresponding degree polynoms are described. The interpolation accuracy estimations for polynomial operators are received.

Ключові слова: інтерполяція, гільбертовий простір, операторна форма, операторний поліном, нелінійний оператор, банаховий простір, узагальнена обернена матриця, ідентифікація, оцінки точності, збіжність процесу, інтерполяційний поліном, диференціали Гато, с-поліном.

Підп. до друку 05.11.96. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,9.
Тираж 110 пр. Зам. 202. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3