НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ЧУЙКО Олена Вікторівна

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ВИРОДЖЕНИМ ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У КРИТИЧНИХ ВИПАДКАХ

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук БОЙЧУК О.А.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук САМОЙЛЕНКО В.Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент БОРИСЕНКО С.Д.

Провідна установа: Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Захист відбудеться "24" грудня 1996 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої Ради Д 016.50.02. при Інституті математики НАН України за адресою: м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано "14" листопада 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради доктор фіз.- мат. наук, професор ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Математичний опис багатьох задач природознавства зводиться до крайових задач з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу, проте до цього часу суттєво використовувалась невиродженість імпульсного впливу [М.М.Крилов, М.М.Боголюбов, А.Халанай, Д.Векслер, А.М.Самойленко, М.О.Перестюк, О.А.Бойчук[1]].

Нами розглядається маловивчений випадок виродженого імпульсного збурення, для якого раніш були знайдені тільки умови існування розв'язків Р.Конті, С.Швабік.[2]

Мета дисертаційної роботи - знаходження необхідних і достатніх умов існування розв'язків лінійних і слабонелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, які задовольняють крайові умови, що задані лінійним або слабонелінійним векторним функціоналом і в фіксовані моменти часу мають вироджене імпульсне збурення, причому порядок диференціальної системи і кількість крайових умов в загальному випадку не співпадають.

Загальні методи вивчення. В дисертаційній роботі використані ефективні методи теорії збурень - метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре, розвинений в роботах І.Г.Малкіна і Ю.О.Рябова, асимптотичні методи нелінійної механіки, розроблені в працях М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського та А.М.Самойленка, апарат узагальнено-обернених матриць і проекторів Е.Мура і Р.Пенроуза, а також конструкції узагальнених операторів Гріна крайових задач з імпульсним впливом

---

[1] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.- Киев : Вища шк., 1987.- 287 с.

[2] Schwabik S. Differential Equations with Interface Conditions// Časopis pro pěstovani matematiky.-1980.-roc. 105.-p. 391-408.

А.М.Самойленка, М.О.Перестюка і О.А.Бойчука.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що

- вперше показано, що основні результати теорії крайових задач з імпульсною дією справджуються з відповідними уточненнями та доповненнями і у випадку виродженого імпульсного впливу;

- побудовано нормальну фундаментальну матрицю лінійної однорідної диференціальної системи з виродженим імпульсним впливом і доведено її існування та єдиність;

- побудовані нові конструкції узагальнених операторів Гріна задачі Коші та загальної лінійної неоднорідної крайової задачі, а також знайдені необхідні и достатні умови їх існування;

- запропоновані збіжні ітераційні алгоритми побудови розв'язків слабонелінійних крайових задач з виродженим імпульсним збуренням.

Теоретична і практична цінність. Робота носить теоретичний характер, узагальнює і поглиблює раніш відомі результати для крайових задач з імпульсним збуренням. Практична цінність роботи обумовлена тим, що питання існування та побудови розв'язків крайових задач з імпульсним збуренням займають важливе місце в якісній теорії диференціальних рівнянь, а також широким застосуванням в теорії коливань, в механіці та фізиці високих енергій.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на

- Конференції "Фрактальний аналіз в математиці, біології і медицині" (Слов'янськ, квітень 1991);

- II науково-технічному семінарі " Моделювання і дослідження стійкості фізичних процесів " (Київ, травень 1991);

- Конференції " Моделювання і дослідження стійкості процесів " (Київ, травень 1992); (Київ, травень 1994); (Київ, травень 1995);

- семінарі академіка НАН України А.М.Самойленка (Інститут математики, Київ, січень 1996).

Структура і об'єм роботи. Дисертація, об'єм якої 107 сторінок машинопису, складається з вступу, трьох розділів і списку літератури. Бібліографія налічує 107 найменувань. По темі дисертації опубліковано 7 робот [1 - 7]. З публікацій, виконаних у співавторстві, в автореферат і дисертацію включені результати, отримані автором самостійно.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ.

В першому розділі розглядається задача про знаходження умов існування розв'язків критичної лінійної крайової задачі

$$dz/dt = A(t)z + f(t), \quad t \in [a, b], \ t \neq \tau_i, \qquad (1)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha, \qquad (2)$$

з виродженим ($\operatorname{rank}(I_n + S_i) \leqslant n$) імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i, \quad i = 1, \dots, p, \qquad (3)$$

де $f(t)$ - неперервна (або кусково - неперервна, з розривами першого роду) n - вимірна вектор-функція, a_i, c - сталі вектор - стовпці: a_i, $c \in \mathbb{R}^n$, ℓ - лінійний обмежений векторний функціонал:

$$\ell : C^1 \left\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\} \to \mathbb{R}^m.$$

Як відомо, нормальна ($X(a) = I_n$) фундаментальна матриця однорідної системи (1), (3) стає виродженою за умови виродження хоча б однієї з матриць $I_n + S_i$, $i = 1, \dots, p$, що унеможливлює використання раніш відомих конструкцій оператора Гріна задачі (1) - (3).

Умову існування і конструкцію розв'язків задачі Коші для однорідної системи (1), (3) визначає наступна лема.

Л Е М А 1.1. Розв'язок задачі Коші $z(a) = c$ для однорідної

($f(t) = 0$, $a_i = 0$) системи (1),(3) з виродженим $\rho_i = \operatorname{rank}(I_n + S_i) \leqslant n$ імпульсним впливом єдиний; його можна подати у вигляді $z(t, c) = X(t)c$ за допомогою нормальної фундаментальної матриці однорідної системи (1),(3):

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t),\ t \in [a, \tau_1[,\ Y_0 = I_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0(t)Y_i,\ i = 2, \dots, p-1,\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \\ Y_i = X_0^{-1}(\tau_i)(I_n + S_i)X_0(\tau_i)Y_{i-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_p(t) = X_0(t)Y_p, \\ t \in [\tau_p, b]. \end{cases} \qquad (4)$$

Умову існування і конструкцію розв'язків задачі Коші неоднорідної системи (1), (3) визначає наступна лема.

Л Е М А 1.2. Розв'язок задачі Коші $z(a) = c$ для неоднорідної системи (1), (3) з виродженим імпульсним впливом єдиний; його можна подати у вигляді $z(t, c) = X(t)c + K[f; a_i](t)$, де $X(t)$ - нормальна фундаментальна матриця (4) системи (1), (3), $K[f; a_i](t)$ - узагальнений оператор Гріна [8] задачі Коші для системи (1), (3):

$$K(f; a_i) = \begin{cases} X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)\,ds, & t \in [a, \tau_1[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_i[f; a_i](t), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_p[f; a_p](t), & t \in [\tau_p, b], \end{cases}$$

де $K_i[f; a_i](t) = X_0(t)\bar{\gamma}_i + X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)f(s)\,ds,$

$$\bar{\gamma}_i = X_0^{-1}(\tau_i)\left\{(I_n + S_i)X_0(\tau_i)\bar{\gamma}_{i-1} + S_i X_0(\tau_i)\int_a^{\tau_i} X_0^{-1}(s)f(s)\,ds + a_i\right\}.$$

Умову існування і конструкцію оператора Гріна крайової задачі (1) - (3) в критичному випадку, коли її однорідна частина має нетривіальні розв'язки, визначає

Т Е О Р Е М А 1. Критична ($\operatorname{rank} Q = n_1 \leqslant n$) крайова задача (1) - (3) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - \ell K[f; a_i](\cdot)\right\} = 0, \qquad (5)$$

і має r - параметричне сімейство розв'язків

$$z(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; a_i](t), \qquad (6)$$

де

$$G[f; a_i](t) = X(t)Q^+\left\{\alpha - \ell K[f; a_i](\cdot)\right\} + K[f; a_i](t) -$$

узагальнений оператор Гріна крайової задачі (1) - (3) з виродженим імпульсним впливом, $Q = \ell X(\cdot)$ - стала $m \times n$ - матриця, Q^+ - $n \times m$ - вимірна матриця, псевдообернена до Q за Муром-Пенроузом;*

*Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. К., 1990.

$P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$ – $m \times m$ – матриця-ортопроектор, $P_{Q^*_d}$ – $d \times m$ – матриця, складена з $d = m - n_1$ лінійно-незалежних рядків P_{Q^*}; $n \times r$ – вимірна матриця $X_r(t)$ складена з $r = n - n_1$ лінійно-незалежних розв'язків однорідної частини задачі (1) – (3).

Леми 1 і 2, а також теорема 1 є узагальненням відомих результатів для лінійних систем на випадок виродженого імпульсного впливу.

У другому розділі досліджується задача знаходження умов існування та побудови розв'язку $z(t, \varepsilon)$ слабонелінійної системи

$$dz / dt = A(t) z + f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \qquad (7)$$

з виродженим ($\operatorname{rank}(I_n + S_i) \leqslant n$) імпульсним впливом

$$\Delta z(\tau_i) = S_i z(\tau_i - 0) + a_i + \varepsilon J_i(z(\tau_i - 0), \varepsilon), \qquad (8)$$

який задовольняє крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \ m \geqslant n. \qquad (9)$$

Розв'язок шукаємо в класі функцій

$$z(\cdot, \varepsilon) \in C^1\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, z(t, \cdot) \in C[\varepsilon],$$

$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, які при $\varepsilon = 0$ перетворюються у розв'язок (6) породжуючої крайової задачі (1) – (3). Нелінійна n – вимірна вектор – функція $Z(z, t, \varepsilon)$ неперервно диференційовна по z в околі z_0 і неперервна по t та ε; $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ і $J_i(z(\tau_i - 0, \varepsilon), \varepsilon)$ – нелінійні векторні функціонали, що діють із простору $C\Big\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}$ у простори $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, неперервно диференційовні по z (у розумінні Фреше) в околі z_0 і неперервні по ε. Така крайова задача у випадку невиродженого імпульсного впливу раніш була досліджена О.А.Бойчуком.

Т Е О Р Е М А 2 (Необхідна умова). Якщо слабонелінійна крайова задача (7) - (9) з виродженим імпульсним впливом має розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1 \left\{ [a, b] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, який при $\varepsilon = 0$ обертається в породжуючий розв'язок $z_0(t, c_r)$ крайової задачі (1) - (3) з константою $c_r = c_r^* \in \mathbb{R}^r$. Тоді векторна стала c_r^* задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд:

$$F(c_r^*) = P_{Q_d^*} \Big\{ J(z_0(\cdot, c_r^*), 0) - \ell K [Z(z_0(s, c_r^*), s, 0);$$

$$J_i(z_0(\tau_i - 0), c_r^*)] (\cdot) \Big\} = 0.$$

Т Е О Р Е М А 3 (Достатня умова). Для будь-якого простого ($P_{B_0} = 0$, $P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0$) розв'язку $c_r \in \mathbb{R}^r$ рівняння для породжуючих амплітуд крайова задача (7) - (9) має єдиний розв'язок $z(t, \varepsilon)$, який визначається за допомогою збіжної на відрізку $[0, \varepsilon_*]$ ітераційної процедури [70], де $B_0 = dF(c_r^*) / dc_r$ - стала $d \times r$ - вимірна матриця, а P_{B_0}, $P_{B_0^*}$ - її ортопроектори.

Теореми 2 і 3 узагальнюють відомі результати для слабонелінійних крайових задач з невиродженим імпульсним впливом на випадок виродженого імпульсного збурення.

У третьому розділі досліджується задача про знаходження умов існування та побудову $T_1(\varepsilon)$ - періодичного розв'язку

$$z(\cdot, \varepsilon) \in C^1 \Big\{ [0, T_1(\varepsilon)] \setminus \{t_i(\varepsilon)\}_I \Big\},\ z(t, \cdot) \in C[\varepsilon],$$

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ t_i(0) = t_i^*,\ T_1(0) = T,\ i = 1, \ldots, p,$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$dz / dt = Az + f + \varepsilon Z(z, \varepsilon),\quad t \neq t_i(\varepsilon), \tag{10}$$

з виродженим ($\operatorname{rank}(I_n + S_i) \leqslant n$) імпульсним впливом

$$\Delta z(t_i(\varepsilon)) = S_i z(t_i(\varepsilon) - 0) + a_i +$$

$$+ \varepsilon J_i(z(t_i(\varepsilon) - 0), \varepsilon), \qquad (11)$$

який при $\varepsilon = 0$ обертається в T- періодичний розв'язок $z_0(\cdot) \in C^1\left\{[0, T] \setminus \{t_i^*\}_I\right\}$ породжуючої крайової задачі

$$d z_0 / d t = A z_0 + f, \quad t \neq t_i^*, \qquad (12)$$

$$\Delta z_0(t_i^*) = S_i z(t_i^* - 0) + a_i, \qquad (13)$$

де використані позначення: A - стала $n \times n$ - вимірна матриця, $J_i(z(t_i(\varepsilon) - 0), \varepsilon)$ - нелінійний по z векторний функціонал:

$$C^1\left\{[0, T_1(\varepsilon)] \setminus \{t_i(\varepsilon)\}_I\right\} \to \mathbb{R}^n, \quad S_{i+p} = S_i .$$

Нелінійна вектор - функція $Z(\cdot, \varepsilon) \in C^1[z]$, $Z(z, \cdot) \in C[\varepsilon]$ в околі породжуючого розв'язку. Нелінійний функціонал $J_i(z(t_i(\varepsilon) - 0), \varepsilon)$ неперервно-диференційовний по z (у розумінні Фреше) в околі породжуючого розв'язку задачі. Сталі вектор-стовпці a_i, $f \in \mathbb{R}^n$, $\Delta z(t_i(\varepsilon), \varepsilon) := z(t_i(\varepsilon) + 0, \varepsilon) - (z(t_i(\varepsilon) - 0, \varepsilon)$, $t_{i+p}(\varepsilon) = t_i(\varepsilon) + T_1(\varepsilon)$, $a_{i+p} = a_i$.

Автономні періодичні задачі, взагалі кажучи, нерозв'язні на відрізку фіксованої довжини. Але на відрізку, довжину якого шукають з умов їх існування, періодичні розв'язки можуть бути побудовані. Крім того, наявність імпульсного впливу позбавляє періодичну задачу (10) - (11) інваріантності її розв'язків відносно зсуву за часом.

В дисертації розглянуто як загальний випадок, коли інваріантність відсутня, так і частинний випадок збереження інваріантності, коли матриці A та $S_i = S$ комутують: $AS = SA$, $a_i = a$ і в спектрі матриці A наявні суто уявні власні числа. В останньому випадку показано, що T - періодичний розв'язок (8) породжуючої системи (12), (13) належним вибором початку відліку незалежної змінної t завжди може бути приведений до вигляду

$$z_0(t, c_{r-1}) = X_{r-1}(t)\, c_{r-1} + G[f; a](t), \qquad (14)$$

де $X_r(t)$ - $n \times r$ - вимірна матриця, складена з r лінійно - незалежних T- періодичних розв'язків системи (12), (13), $X_{r-1}(t)$- $n \times (r-1)$ - матриця, складена з перших ($r-1$) стовпців матриці $X_r(t)$, $G[f; a](t)$ - узагальнений оператор Гріна T - періодичної задачі (12), (13).

При розгляді нелінійних періодичних крайових задач (10) - (11) одержано необхідну умову існування їх розв'язків.

ТЕОРЕМА 4. Нехай автономна диференціальна система (10) з імпульсним впливом (11) має $T_1(\varepsilon)$ - періодичний розв'язок $z(\cdot, \varepsilon) \in C^1\Big\{[0, T_1(\varepsilon)] \setminus \{t_i(\varepsilon)\}_I\Big\}$, $z(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, який при $\varepsilon = 0$ обертається у породжуючий T - періодичний розв'язок $z_0(t, c^*_{r-1})$ з константою $c^*_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1}$. Тоді вектор $c^* = \operatorname{col}(c^*_{r-1}, \beta^*) \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд

$$F(c^*) = P_{Q_r^*} K\Big[f_0(s, c^*)\Big](T) = 0, \qquad (15)$$

де

$$f_0(\tau, c^*) = \left\{ \left\{ \beta^* \left[A z_0(s, c^*_{r-1}) + f \right] + Z(z_0(s, c^*_{r-1}), 0) \right\}; \right.$$

$$\left. \left\{ \beta^* \left[S_i z_0(t^*_i - 0, c^*_{r-1}) + a \right] + J(z_0(t^*_i - 0), c^*_{r-1}), 0) \right\} \right\}.$$

Вектор $c^*_{r-1} \in \mathbb{R}^{r-1}$ визначає амплітуду породжуючого розв'язку, якому може відповідати шуканий періодичний розв'язок системи (10)-(11). Константа β^* характеризує початкову поправку на період розв'язку.

Т е о р е м а 5 (Достатня умова). Для кожного кореня $c^*_r \in \mathbb{R}^r$ рівняння (15) для породжуючих амплітуд за умови $\det B_0 \neq 0$ система (10)- (11) має єдиний $T_1(\varepsilon)$ - періодичний розв'язок

$$z(\cdot, \varepsilon) \in C \left\{ [0, T_1(\varepsilon)] \setminus \{t_i(\varepsilon)\}_I \right\}, \; z(t, \cdot) \in C[\varepsilon],$$

який може бути знайдений за допомогою збіжної при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ ітераційної процедури, аналогічної до тієї, що побудована Ю.О. Рябовим та О.А. Бойчуком.

Ілюстрацією розробленої в роботі схеми аналізу автономних крайових задач з виродженим імпульсним збуренням є дослідження слабонелінійної періодичної задачі для систем типу Ван- дер- Поля, Дюффінга і Лотка - Вольтерра ("хижак-жертва"). Ці приклади демонструють особливості постановки автономної крайової задачі з виродженим імпульсним впливом, оскільки імпульсна періодична задача для рівняння типу Ван-дер-Поля на проміжку фіксованої довжини (з фіксованим періодом) не має розв'язків, крім тривіальних.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Чуйко С.М., Чуйко Е.В. Слабонелинейные автономные краевые задачи в критических случаях // Семинар ,, Фрактальные объекты в математике, физике и биологии",Славянск, 25-27 квіт. 1991 р.: Тез. доп. Київ, 1991.- С. 24-25.
2. Чуйко С.М., Чуйко Е.В. Нелинейные автономные краевые задачи в критических случаях // Школа-семинар,, Моделирование и исследование устойчивости физических процессов ",Київ, 28-30 трав. 1991р.: Тез. доп.- Київ, 1991.- С. 89.
3. Чуйко С.М., Чуйко Е.В. О решениях автономных краевых задач в критических случаях // Конф.,, Моделирование и исследование устойчивости процессов ", Київ, 26 - 28 трав. 1992 р.: Тез. доп. Ч. II.- Київ, 1992.- С. 65 - 66.
4. Чуйко Е.В. Автономные периодические задачи с импульсным воздействием в критических случаях // Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", Київ, 16-20 трав. 1994 р.: Тез. доп.- Київ, 1994.- С. 142 - 143.
5. Чуйко Е.В. Нелинейные краевые задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. конф. "Моделирование и исследование устойчивости систем", Київ, 15-19 трав. 1995 р.: Тез. доп.- Київ, 1995.- С.112.
6. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Периодические решения автономной системы с импульсным воздействием в критических случаях // Укр. мат. журн. - 1995.- 47, № 11. - С. 1478 - 1483.
7. Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М. Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн.-1996.- 47, № 5. - С. 588 - 594.

Чуйко Е.В. Краевые задачи с вырожденным импульсным воздействием в критических случаях.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01. 01. 02 - дифференциальные уравнения, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1990.

Защищается диссертация, посвященная изучению краевих задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденным импульсным воздействием. Найдены конструктивные условия существования решений, обобщенные операторы Грина линейной краевой задачи, а также сходящиеся итерационные процедуры для построения нелинейных краевых задач с вырожденным импульсным воздействием в критических случаях.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, імпульсний вплив, оператор Гріна, псевдообернені матриці, ітераційні процедури.

Chuiko E. Boundary Value Problems with Singular Impulsive Perturbations in Critical Cases.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02- differential equations. Inst. of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

This thesis is devoted to the investigation of boundary value problems for systems of ordinary differential equations with the singular impulsive perturbations. The constructive conditions of existence of solutions, generalized Green operators of linear boundary value problem with the singular impulsive perturbation and convergent iterative procedures for construct solutions of nonlinear boundary value problem were created and substantiated.

Підп. до друку 22.10.96. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 0,6.
Тираж 100 пр. Зам. 190. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3