ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

СИЛЮГА

ЛЮДМИЛА ПЕТРІВНА

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ТА БЕЗТИПНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.01.02. - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1996

17.45

Нв.36.230

ЛННБ України ім.В.Стефаника

00757177 (Y)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Пташник Б.Й.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Каленюк П.І.,

кандидат фізико-математичних наук, доцент Іванчов М.І.

Провідна установа - Національний технічний університет України, м.Київ.

Захист відбудеться "26" грудня 1996р. о 15год.30хв. в ауд.377 на засіданні Спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті імені Івана Франка за адресою: 290001, м.Львів, вул.Університетська, 1.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського державного університету (м.Львів, вул.Драгоманова, 5)

Автореферат розіслано "16" листопада 1996р.

ЛНБ ім. В. Стефаника АН України

Вчений секретар спеціалізованої ради Я.В.Микитюк

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Актуальність теми і ступінь дослідженості тематики. Одним із важливих напрямків розвитку сучасної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними є дослідження некласичних задач, серед яких є задача з багатоточковими умовами за виділеною змінною, яка вперше була поставлена в 1963 р професором В.Я.Скоробогатьком. Для гіперболічних рівнянь задачі з локальними багатоточковими умовами за змінною t досліджені в роботах Б.Й.Пташника, В.І.Берника, Б.О.Салиги, В.С.Ільківа, В.В.Фіголя, П.І.Штабалюка, де було показано, що багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними, взагалі, не є коректними, а питання про їх розв'язність у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників. Для аналізу оцінок знизу малих знаменників були використані результати і методи метричної теорії чисел. розроблені білоруським академіком В.Г.Спринджуком та його учнями.

Встановленню класів існування та єдиності розв'язків локальних і нелокальних багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними присвячені роботи В.М.Борока, С.В.Гадецької, І.І.Антипка, М.А.Перельман, З.М.Нитребича. Задачі з дво- і триточковими умовами за просторовою змінною для параболічних рівнянь досліджувались в роботах І.О.Іонкіна, Є.І.Моісеєва, А.В.Картинніка, Н.І.Юрчука, Л.І.Каминіна, де були використані метод Фур'є, метод потенціалів, метод енергетичних нерівностей. Багатоточкові задачі для диференціально-операторних рівнянь вивчались С.Х.Нурметовим і Ю.М.Валіцьким. В роботах Л.І.Комарницької досліджувались умови існування та єдиності розв'язків багатоточкових задач для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Нелокальні багатоточкові задачі для псевдодиференціальних рівнянь та систем розглядали Б.Й.Пташник, В.С.Ільків, В.М.Поліщук, Б.О.Салига.

Мета дисертаційної роботи. Дослідження коректності задач з багатоточковими умовами за змінною t для лінійних параболічних та безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними. Конструктивна побудова розв'язків розглядуваних задач. Доведення теорем метричного характеру про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає розв'язність досліджуваних задач для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, складених із параметрів задачі.

Методика дослідження. В роботі використовуються результати і методи теорії звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними, функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є, лінійної алгебри та метричної теорії чисел.

Наукова новизна. Встановлені умови існування, єдиності та неперервної залежності від правих частин рівнянь і граничних умов розв'язків задач з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами періодичності(або умовами типу Діріхле) за просторовими координатами для лінійних параболічних та безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь довільного порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами. Розв'язність цих задач є нестійкою відносно параметрів задачі і пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків. Доведені нові метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників. Для більш точнішого, порівняно з метричним, опису класу некоректних задач використано поняття розмірності Хаусдорфа. Побудовані явні формули розв'язків розглядуваних задач у вигляді рядів за системами ортогональних функцій.

Всі отримані результати є новими.

Теоретична і практична цінність. Результати роботи є певним внеском у загальну теорію крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. Вони можуть знайти застосування при вивченні конкретних задач практики, а також служать джерелом нових задач метричної теорії діофантових наближень.

Основні положення дисертації, що виносяться на захист:

-встновлення умов існування та єдиності розв'язків задач з багатоточковими умовами за змінною t та умовами періодичності за змінними $x_1,\dots,x_p$ для безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами;

-дослідження класичної коректності багатоточкових задач для лінійних параболічних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами;

-доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при розв'язанні досліджуваних задач;

-побудова явних формул для розв'язків задач у вигляді рядів за системами ортогональних функцій.

Апробація наукових досліджень. Результати роботи доповідались на:

- Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994 р.);
- Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994 р.);
- семінарі молодих вчених Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, присвяченого пам'яті академіка Я.С.Підстригача (Львів, 1995 р.);
- третій, четвертій та п'ятій Міжнародних наукових конференціях ім. академіка М.Кравчука (Київ, 1994, 1995, 1996 р.р.);
- Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях", присвяченій 70-річчю від дня народження професора П.С.Казімірського (Львів, 1995 р.);

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (1995, 1996 р.р.);
- Міжнародній конференції "Нелінійні диференціальні рівняння" (Київ, 1995 р.);
- школі-семінарі "Нелінійні граничні задачі математичної фізики та їх застосування" (Чернівці, 1995 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-10].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 9 параграфів, об'єднаних у 3 розділи, та списку літератури, що включає 91 найменування. Загальний обсяг роботи 150 сторінок.

ВИКЛАД ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ПІДСУМКІВ, ЩО ВИПЛИВАЮТЬ З НАУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

У **вступі** дано короткий огляд літератури, пов'язаної з тематикою дисертації, викладено основні результати роботи; наведено допоміжні відомості теоретико-числового характеру, а також наступні позначення та функціональні простори, що використовуються в роботі: $\mathbb{R}^p$-p-вимірний дійсний евклідовий простір; $\mathbb{Z}^p$ ($\mathbb{Z}^p_+$)-множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими (цілими невід'ємними) координатами; $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$; $(t,x)=(t,x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^{p+1}$; $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$; $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$; $|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$; $\|k\|=\sqrt{(k,k)}$; $s=(s_0,s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}^{p+1}_+$; $|s|=s_0+s_1+\dots+s_p$; Ω^p-p-вимірний тор, який отримується шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x\in\mathbb{R}^p: 0\leqslant x_r\leqslant 2\pi,\ r=\overline{1,p}\}$; $D^p=[0,T]\times\Omega^p$; $C^{(q,r)}(D^p)$ - банахів простір функцій $u(t,x)$ з нормою

$$\|u(t,x)\|_{C^{(q,r)}(D^p)}=\sum_{\substack{s_0\leqslant q\\ |s|\leqslant r}}\max_{(t,x)\in D^p}\left|\frac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}\right|.$$

$A^{\beta}_{\delta}(\Omega^p)$, $\delta>0,\beta>0$ -простір функцій $\varphi(x)=\sum_{|k|\geqslant0}\varphi_k\exp(i(k,x))$ з нормою

$\|\varphi(x)\|_\delta^\beta = \sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k| \exp(\delta|k|^\beta)$, $C^n([0,T];A_\delta^\beta(\Omega^p))$ - простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ $\partial^j v(t,x)/\partial t^j \in A_\delta^\beta(\Omega^p)$, $j=\overline{0,n}$, і неперервна за t в нормі $A_\delta^\beta(\Omega^p)$; відповідні простори вектор-функцій позначено через $\overline{A}_\delta^\beta(\Omega^p)$ і $\overline{C}^n([0,T];\overline{A}_\delta^\beta(\Omega^p))$; $H_q(\Omega^p), q\in Z$, - гільбертовий простір 2π-періодичних за $x_1,\dots,x_p$ комплекснозначних функцій $v(x), x\in R^p$, з нормою $\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega^p)} = (2\pi)^p \sum_{|k|\geq 0} (1+\|k\|^2)^q |v_k|^2$; $H_q^n(D^p)$, $n\in Z_+, q\in Z$, - гільбертовий простір функцій $u(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ $\partial^j u(t,x)/\partial t^j \in H_{q-j}(\Omega^p)$, $j=\overline{0,n}$, і неперервна за t в нормі $H_{q-j}(\Omega^p)$, $\|u(t,x)\|_{C^n([0,T],H_q(\Omega^p))} = \sum_{j=0}^{n} \max_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{H_q(\Omega^p)}$; відповідні простори вектор-функцій позначено через $\overline{H}_q(\Omega^p)$ і $\overline{H}_q^n(D^p)$; Γ - простір тригонометричних поліномів $P(x) = \sum_{|k|\leq s} C_k(P) \exp((ik,x))$, $x\in R^p$, $s\in Z_+$, $C_k(P)\in C$, $k\in Z^p$; Γ' - простір усіх лінійних неперервних функціоналів над Γ (який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів); $C^n([0,T],\Gamma)$ $(C^n([0,T],\Gamma'))$ - простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного $t\in[0,T]$ $\partial^j u(t,x)/\partial t^j \in \Gamma(\Gamma')$, $j=\overline{0,n}$.

У першому розділі дисертації (§§ 1-5) досліджуються умови коректної розв'язності багатоточкових задач для безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Встановлено класичну розв'язність розглядуваних задач для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, складених із параметрів задачі. Крім цього, для розрізнення множин нульової міри Лебега використано поняття розмірності Хаусдорфа, за допомогою якого одержано більш тонкий, порівняно з метричним, опис класу некоректних задач.

В §1 на прикладі рівняння третього порядку розкрита природа багатоточкової задачі для безтипних рівнянь із частинними похідними та методика дослідження її коректності.

В області D^1 розглядається задача

$$a\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3}+b\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^2\partial x}+c\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t\partial x^2}+d\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}=0, \quad (1)$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x), \quad u(T/2,x)=\varphi_2(x), \quad u(T,x)=\varphi_3(x), \quad (2)$$

де $a,b,c,d\in\mathbb{C}$, $a\neq0$. Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$. Розв'язок задачі (1),(2) шукається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k(t)\exp(ikx). \quad (3)$$

Нехай $\lambda_q\equiv\lambda_q^{(1)}+i\lambda_q^{(2)}$, $\lambda_q^{(m)}\in\mathbb{R}$, $m=1,2$, $q=1,2,3$,-корені рівняння

$$a\lambda^3+b\lambda+c\lambda+d=0. \quad (4)$$

Для єдиності розв'язку задачі (1),(2) у просторі $C^3(D^1)$ необхідно і досить, щоб рівняння

$$kT(\lambda_r^{(2)}-\lambda_p^{(2)})-i(kT(\lambda_r^{(1)}-\lambda_p^{(1)})+4\pi l)=0,\ 3\geq p>r\geq1,$$

не мали розв'язків у цілих числах l і k, $k\neq0$ (теорема 1.1). На основі теореми 1.1 встановлені більш конкретні достатні, а також необхідні і достатні умови єдиності розв'язку розглядуваної задачі (наслідки 1.1-1.3).

Позначимо: $\mu=\max\limits_{1\leq p\leq3}|\lambda_p^{(2)}|$.

Теорема 1.2. Нехай $\lambda_p^{(2)}$, $p=1,2,3$, всі різні. Якщо $\varphi_j(x)\in A^1_{\delta_j}$, $j=1,2,3$, $\delta_j>(7-j)\mu T/2$, то для довільних T і $\lambda_p^{(1)}$, $p=1,2,3$, існує розв'язок задачі (1),(2) з простору $C^3(D^1)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$.

Теорема 1.3. Нехай $\lambda_1^{(2)}=\lambda_2^{(2)}=\lambda_3^{(2)}$ (або $\lambda_2^{(2)}=\lambda_3^{(2)}\neq\lambda_1^{(2)}$) і нехай $\varphi_j(x)\in A_{\delta_j}$, $j=1,2,3$, $\delta_j>(7-j)\mu T/2$. Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a_{pr}=(\lambda^{(1)}_p-\lambda^{(1)}_r)T/(4\pi)$, $r,p=1,2,3$, $r\neq p$) (або для майже всіх чисел $(\lambda_3^{(1)}-\lambda_2^{(1)})T/(4\pi)$) існує розв'язок задачі (1),(2) з простору $C^3(D^1)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$.

При виконанні умов теореми 1.3 розв'язок задачі (1),(2) із простору $C^3(D^1)$ існує для всіх чисел α_{pr}, $1\leqslant r,p\leqslant 3$, $r\neq p$, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує як завгодно малого наперед заданого числа $\sigma>0$ (наслідок 1.4).

Встановлені також умови існування та єдиності розв'язку задачі (1),(2) у випадку, коли рівняння (4) має кратні λ-корені (теореми 1.4 - 1.6).

У §2 результати попереднього параграфу узагальнюються на випадок диференціального рівняння довільного порядку з багатьма незалежними змінними. В області D^p розглядається задача

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)\equiv\sum_{|s|\leqslant n} a_s\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}=0, \qquad (5)$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j=\overline{1,n};\quad 0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant T. \qquad (6)$$

$a_s\in\mathbb{C}$, $a_{(n,0,\ldots,0)}\neq 0$. Вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\ldots,x_p$ на функції $u(t,x)$ і $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$.

Розв'язок шукається у вигляді p-кратного ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geqslant 0}u_k(t)\exp((ik,x)). \qquad (7)$$

Припускається, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$ λ-корені рівняння $L(\lambda,ik)=0$ попарно різні і відмінні від нуля. Із вигляду рівняння (5) випливає, що $|\lambda_q(k)|<C_1|k|$, $q=\overline{1,n}$, $C_1=\mathrm{const}>0$, $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$.

Теорема 2.1. Для єдиності розв'язку задачі (5),(6) у просторі $C^n([0,T],\Gamma')$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p\qquad \Delta(k)\equiv\det\|\exp(\lambda_q(k)t_j)\|_{q,j=1}^{n}\neq 0. \qquad (8)$$

Якщо виконана умова (8) і функції $\varphi_j(x)\in\Gamma(\Gamma')$, $j=\overline{1,n}$, то існує розв'язок задачі (5),(6), який належить простору $C^n([0,T],\Gamma)$ ($C^n([0,T],\Gamma')$) і неперервно залежить від $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$ (теорема 2.2).

Теорема 2.3. Нехай існують додатні сталі ν, M_1 і $\alpha_1\in\mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ вірна оцінка

$$|\Delta(k)|>M_1|k|^{-\alpha_1-\varepsilon}\exp(-\nu|k|),\quad 0<\varepsilon<1, \qquad (9)$$

і нехай $\varphi_j(x)\in A^1_\delta$, $j=\overline{1,n}$, $\delta>\nu+nC_1T$. Тоді існує розв'язок задачі (5),(6) з простору $C^n(D^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$.

Зауваження 2.1. При виконанні умов теореми 2.3 розв'язок задачі (5),(6) належить простору $C^n([0,T];A^1_{\delta_1})$, де $\delta_1<\delta-(\nu+nC_1T)$.

Для метричного аналізу оцінки (9) використовується наступне твердження.

Лема 2.1. Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2\gamma}$) векторів $y=(y_1,\ldots,y_{2\gamma})$, утворених з дійсних і уявних частин коефіцієнтів a_s рівняння (5), при $|k|>K(y)$ виконується нерівність

$$\prod_{n\geqslant q>l\geqslant 1}|\lambda_q(k)-\lambda_l(k)|\geqslant|k|^{-(n-1)(p-n)/2-\varepsilon/2},\quad 0<\varepsilon<1,$$

де γ-число розв'язків нерівності $|s|\leqslant n$ в цілих невід'ємних числах $s_1,\ldots,s_p$.

Теорема 2.4. Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\bar{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in[0,T]^n$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2\gamma}$) векторів y нерівність (9) виконується для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо $\alpha_1=(n-1)n/2((n-1)(p-n)/2+p+1)$, $\nu=nC_1T$.

Далі в §2 досліджується задача (5),(6) у випадку, коли точки t_j, $j=\overline{1,n}$, задовольняють співвідношення

$$t_j=(j-1)t_0,\ j=\overline{1,n},\ t_0=T/(n-1). \tag{10}$$

Теорема 2.5. Для єдиності розв'язку задачі (5),(6),(10) у просторі $C^n(D^p)$ необхідно і досить, щоб рівняння

$$(\lambda_q(k)-\lambda_m(k))t_0-2\pi il=0,\ n\geqslant q>m\geqslant 1,$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$, l, $|k|\neq 0$.

Теорема 2.6. Нехай існують $M_2>0$ і $\alpha_2\in\mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{m=1\\ m\neq q}}^{n} |\exp(\lambda_q(k)t_0)-\exp(\lambda_m(k)t_0)|\geqslant M_2|k|^{-\alpha_2-\varepsilon}\exp(-C_1T|k|),\quad q=\overline{1,n}, \tag{11}$$

де $0<\varepsilon<1$. Якщо $\varphi_j(x)\in A_\delta^1$, $j=\overline{1,n}$, $\delta>3C_1T$, то існує розв'язок задачі (5),(6),(10) з простору $C^n(D^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$.

Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in Z^p$ нерівності (11) справджуються для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2\gamma}$) векторів y при $|k|>K(y)$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел t_0, якщо $\alpha_2=(n-1)((n-1)p/2-1)$ (теорема 2.7), звідки випливає однозначна розв'язність задачі (5),(6),(10) для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2\gamma+1}$) векторів $\tilde{y}=(y,t_0)$ (теорема 2.8).

Доведено також, що нерівності (11) при досить великому $\alpha_2\in\mathbb{N}$ справджуються для майже всіх векторів $y\in\mathbb{R}^{2\gamma}$ і для всіх значень t_0, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої є менша як завгодно малого наперед заданого числа $\sigma>0$ (теорема 2.9, зауваження 2.3).

В §3 в області D^p розглядається задача з умовами (6) для рівняння

$$Lu(t,x)\equiv\prod_{q=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{s=1}^{p}\lambda_{sq}\frac{\partial}{\partial x_s}-b_q\Big]u(t,x)=f(t,x), \tag{12}$$

де $\lambda_{sq}\equiv\lambda_{sq}^{(1)}+i\lambda_{sq}^{(2)}$, $b_q\equiv b_q^{(1)}+ib_q^{(2)}$, $b_q^{(j)},\lambda_{sq}^{(j)}\in\mathbb{R}$, $j=1,2$, $i=\sqrt{-1}$.

Теорема 3.1. Для єдиності розв'язку задачі (6),(12) у просторі $C^n([0,T],\Gamma')$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k\in Z^p\ \ \Delta(k)\equiv\det\|\exp(\gamma_q(k)t_j)\|_{q,j=1}^{n}\neq 0,$$

де $\gamma_q(k)=i\sum_{s=1}^{p}\lambda_{sq}+b_q$, $q=\overline{1,n}$.

При виконанні умов теореми 3.1 розв'язок розглядуваної задачі існує і належить простору $C^n([0,T],\Gamma)$ ($C^n([0,T],\Gamma')$), якщо функції $\varphi_j(x)\in\Gamma(\Gamma')$, $j=\overline{1,n}$, $f(t,x)\in C([0,T],\Gamma)$ ($C([0,T],\Gamma')$) (теорема 3.2).

Теорема 3.3. Нехай існують додатні сталі d,M_1 і $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності

$$\prod_{\substack{r=1\\ r\neq l}}^{n} |\gamma_l(k)-\gamma_r(k)| \geq M_1 |k|^{-\alpha_1-\varepsilon}, \quad l=\overline{1,n}, \tag{13}$$

$$|\Delta(k)|>M_1 |k|^{-\alpha_2-\varepsilon}\exp(-d|k|), \tag{14}$$

де $0<\varepsilon<1$, і нехай $\varphi_j(x)\in A^1_\delta$, $j=\overline{1,n}$, $f(t,x)\in C([0,T],A^1_\delta)$, де $\delta>d+n\lambda T$, де $\lambda=\max\{|\lambda^{(2)}_{sq}|, q=\overline{1,n},\ s=\overline{1,p}\}$. Тоді існує розв'язок задачі (6),(12) з простору $C^n(D^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, і $f(t,x)$.

Якщо виконані умови теореми 3.3, то розв'язок задачі (6),(12) належить простору $C^n([0,T];A^1_{\delta_1})$, де $\delta_1<\delta-(d+n\lambda T)$ (зауваження 3.2).

Доведено, що для довільних фіксованих b_q, $q=\overline{1,n}$, і для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ нерівності (13) виконуються при $\alpha_1=(n-1)(np-2)/2$ для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2pn}$) векторів $\omega=\{(\lambda^{(1)}_{rq},\lambda^{(2)}_{rq}), r=\overline{1,p},\ q=\overline{1,n}\}$, а нерівність (14) виконується для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\bar{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in[0,T]^n$ і для майже всіх векторів ω, якщо $d=\lambda Tn$, $\alpha_2=(n-1)((n-1)n(p-1)/2+p+1)n/2$ (теореми 3.4, 3.5).

Окремо досліджується випадок рівновіддалених вузлів, тобто коли t_j, $j=\overline{1,n}$, задовольняють співвідношення (10). Встановлені ефективні умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі (6),(10),(12) (теореми 3.6, 3.8) і проведено метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку цієї задачі (лема 3.2).

У §4 досліджується двоточкова задача для безтипної системи рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$(E\,\partial^2/\partial t^2 - B\Delta)u(t,x)=f(t,x), \tag{15}$$

$$u(t_1,x)=\varphi_1(x), \quad u(t_2,x)=\varphi_2(x), \quad 0\leq t_1<t_2\leq T, \tag{16}$$

де $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\ldots+\partial^2/\partial x_p^2$; $u(t,x)=\mathrm{col}(u_1,u_2)$, $f(t,x)=\mathrm{col}(f_1,f_2)$,

$\varphi_1(x)=\mathrm{col}(\varphi_{11},\varphi_{12})$, $\varphi_2(x)=\mathrm{col}(\varphi_{21},\varphi_{22})$; $B=\|b_{rq}\|_{rq=1}^{2}$ – невироджена матриця розміру 2×2 зі сталими комплексними елементами і власними числами $\lambda_j=\lambda_j^{(1)}+i\lambda_j^{(2)}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $i=\sqrt{-1}$, $\lambda_j^{(m)}\in\mathbb{R}$, $j,m=1,2$. Розв'язок задачі шукається у вигляді векторного ряду (7).

Для єдиності розв'язку задачі (15),(16) у просторі $C^2(\bar{D}^p)$ необхідно і досить, щоб рівняння $\lambda_j(t_2-t_1)^2(k_1^2+\ldots+k_p^2)-\pi^2 l^2=0$, $j=1,2$, не мали розв'язків у цілих числах l, $k_1,\ldots,k_p$, $k\neq(0)$ (теорема 4.1).

Нехай $\alpha_j=\sqrt{|\lambda_j^{(1)}|}(t_2-t_1)/\pi$, $\beta_j=\sqrt{|\lambda_j|}\sin(\psi_j/2)(t_2-t_1)$, $\psi_j=\arg\lambda_j$, $j=1,2$, $\beta=\max(\beta_1,\beta_2)$.

Теорема 4.2. Нехай $\lambda_q^{(2)}\neq0$, $q=1,2$, і функції $\varphi_j(x)\in\bar{A}_\delta^1$, $j=1,2$, $f(t,x)\in\bar{C}([0,T],\bar{A}_\delta^1)$, $\delta>3\beta$. Тоді для довільних чисел $\lambda_q^{(1)}$ і t_j, $j,q=1,2$, існує розв'язок задачі (15),(16) з простору $\bar{C}^2(\bar{D}^p)$, який неперервно залежить від вектор-функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ та $f(t,x)$.

Теорема 4.3. Нехай $\lambda_1^{(2)}=0$ (або $\lambda_2^{(2)}=0$). Якщо $\varphi_j(x)\in\bar{A}_{\delta_1}^1$, $j=1,2$, $f(t,x)\in\bar{C}([0,T],\bar{A}_{\delta_1}^1)$, $\delta_1>3\beta_2$ (або $\varphi_j(x)\in\bar{A}_{\delta_2}^1$, $f(t,x)\in\bar{C}([0,T],\bar{A}_{\delta_2}^1)$, $\delta_2>3\beta_1$. Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел α_1 і для довільних λ_2 (або для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел α_2 і для довільних λ_1) існує розв'язок задачі (15), (16) з простору $\bar{C}^2(\bar{D}^p)$, який неперервно залежить від вектор-функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(t,x)$.

Теорема 4.4. Нехай $\lambda_l^{(2)}=0$, $l=\overline{1,2}$. Якщо $\varphi_j(x)\in H_\omega(\Omega^p)$, $j=\overline{1,2}$, і $f(t,x)\in\bar{C}([0,T],H_\omega(\bar{D}^p)$, $\omega=q+p+2$, $q\in\mathbb{Z}$, то для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел α_l, $l=\overline{1,2}$, існує розв'язок задачі (15),(16) з простору $H_q^2(\bar{D}^p)$, який неперервно залежить від вектор-функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ і $f(t,x)$.

У §5 розглядаються безтипні системи диференціальних рівнянь високих порядків. У пункті 5.1 в області D^p досліджується задача з умовами вигляду (6) для системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{|s|=n} B_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{s_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^{s_p} u(t,x)=0, \qquad (17)$$

де $u(t,x)=\mathrm{col}(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x))$, $\varphi_j(x)=\mathrm{col}(\varphi_{j1}(x),\ldots,\varphi_{jm}(x))$; $B_s=\|b^s_{rq}\|^m_{r,q=1}$ -квадратні матриці розміру m зі сталими комплексними елементами, $B_{(n,0,\ldots,0)}$-одинична матриця. Припускається, що λ-корені характеристичного рівняння $\det\left[\sum_{|s|=n} B_s\lambda^{s_0}\left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p}\right]=0$, які є рівномірно обмежені для всіх векторів $k\in Z^p\setminus\{(0)\}$, є різні і відмінні від нуля. Нехай $\lambda_p(k)\equiv\lambda^{(1)}_p(k)+i\lambda^{(2)}_p(k)$, $p=\overline{1,nm}$, $i=\sqrt{-1}$; $\mu=\max\limits_{1\leqslant q\leqslant nm}\left(\sup\limits_{k\in Z^p\setminus\{(0)\}}|\lambda^{(1)}_q(k)|\right)$.

Встановлені необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі (6),(17) у просторі $\bar{C}^n(\bar{D}^p)$ (теорема 5.1), а також доведено існування розв'язку задачі, якщо для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in Z^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k)|>M\exp(-\nu\|k\|T)\|k\|^{-\alpha-\varepsilon},\ 0<\varepsilon<1,\ \alpha\in N,\ M,\nu=\mathrm{const}>0,$$

і $\varphi_j(x)\in A^1_\delta$, $j=\overline{1,n}$, $\delta>(\nu+\mu)T$ (теорема 5.2).

У пункті 5.2 на прикладі задачі

$$(E\,\partial/\partial t^2-B\Delta)^2u(t,x)=0, \qquad (18)$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j=\overline{1,4}, \qquad (19)$$

$$t_j=(j-1)t_0,\ j=\overline{1,4},\ t_0=T/3, \qquad (20)$$

показано, як результати п.5.1 переносяться на випадок, коли відповідне характеристичне рівняння має кратні корені. В цій задачі $u(t,x)=\mathrm{col}(u_1,u_2)$, $\varphi_j(x)=\mathrm{col}(\varphi_{j1},\varphi_{j2})$, $j=\overline{1,4}$; оператор Δ, матриця B та її власні числа ті ж самі, що і в задачі (15),(16).

Теорема 5.3. *Для єдиності розв'язку задачі (18)-(20) у просторі $\bar{C}^4(\bar{D}^p)$ необхідно і досить, щоб жодне з рівнянь*

$$\lambda_l t_0^2(k_1^2+\ldots+k_p^2)-\pi^2m^2=0,\ l=1,2,$$

не мало розв'язків у цілих числах m, $k_1,\ldots,k_p$, $k\neq(0)$.

На основі теореми 5.3 встановлені більш конкретні достатні, а також необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі (18)-(20) (наслідки 5.1, 5.2).

Теорема 5.4. Нехай $\lambda_l^{(2)}\neq 0$, $l=1,2$, і $\varphi_j(x)\in \bar{A}_\delta^1$, $j=\overline{1,4}$, $\delta>2\bar{B}T$, де $\bar{B}=\max\limits_{l=1,2}\sqrt{|\lambda_l|}\sin(\varphi_l/2)$, $\varphi_l=\arg\lambda_l$. Тоді для довільних фіксованих чисел t_0 і $\lambda_l^{(1)}$, $l=1,2$, існує розв'язок задачі (18)-(20) з простору $C^4(D^p)$, який неперервно залежить від вектор-функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,4}$.

Досліджено також умови існування розв'язку задачі (18)-(20) у випадках, коли хоча б одне з $\lambda_l^{(2)}=0$, $l=1,2$ (теорема 5.5) і якщо система диференціальних рівнянь (18) є гіперболічна (теорема 5.6).

Другий розділ присвячений дослідженню питань класичної коректності задач з багатоточковими умовами за змінною t і періодичними умовами та умовами типу Діріхле за змінними $x_1,\ldots,x_p$ для безтипних рівнянь зі змінними коефіцієнтами.

У §6 результати, отримані в §3, переносяться на випадок, коли у рівнянні (12) коефіцієнти є достатньо гладкі комплекснозначні функції аргумента t.

Для єдиності розв'язку розглядуваної задачі в просторі $C^n(D^p)$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова (теорема 6.1)

$$\forall k\in Z^p \quad \Delta(k)\equiv \det\|f_{kq}(t_j)\|_{j,q=1}^n\neq 0,$$

де $f_{kq}(t)$, $q=\overline{1,n}$, - фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\prod_{q=1}^n\left[\frac{d}{dt}-i\sum_{s=1}^p\lambda_{sq}(t)k_s-b_q(t)\right]u_k(t)=0.$$

Особлива увага зосереджена на випадку, коли точки t_j, $j=\overline{1,n}$, задовольняють співвідношення (10) і

$$\lambda_{sq}(t)=\lambda_s(t)+a_{sq},\quad b_q(t)=\beta(t)+b_q,$$

де $a_{sq}\equiv a_{sq}^{(1)}+ia_{sq}^{(2)}$, $b_q\equiv b_q^{(1)}+ib_q^{(2)}$, $a_{sq}^{(j)}$, $b_q^{(j)}\in R$, $j=1,2$, $\lambda_s(t)$, $\beta(t)$ - достатньо гладкі комплекснозначні функції аргумента t.

Доведені метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників (леми 6.1-6.3), з яких випливає класична розв'язність досліджуваної задачі для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^{2pn}$) векторів $\omega=(a_{sq}^{(1)}, a_{sq}^{(2)}, s=\overline{1,p}, n\geq q\geq 1)$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $2\pi/t_0$.

В §7 в області $D=[0,T]\times Q$, де $Q\subset\mathbb{R}^p$, $p\geq 2$ - обмежена область з досить гладкою границею ∂Q, розглядається задача

$$\sum_{q=0}^{n} b_q\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^{2(n-q)}(-L)^q u(t,x)=f(t,x), \qquad (21)$$

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x), \quad j=\overline{1,2n};\ 0\leq t_1<\ldots<t_{2n}\leq T,\ x\in Q, \qquad (22)$$

$$L^l u(t,x)\big|_{\partial Q}=0, \quad l=\overline{0,n-1}, \qquad (23)$$

де $b_q\in\mathbb{C}$, $q=\overline{0,n}$, $b_0\neq 0$, оператор $L\equiv\sum_{r,s=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{rs}(x)\frac{\partial}{\partial x_s})-a(x)$ - рівномірно еліптичний в області Q. Нехай $\{X_k(x)\}$ і $\Lambda=\{\lambda_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, - системи власних функцій і власних значень, відповідно, задачі $LX(x)+\lambda X(x)=0$, $X(x)|_{\partial Q}=0$. Розв'язок задачі (21)-(23) шукається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x).$$

Припускається, що корені $\gamma_j=\gamma_j^{(1)}+i\gamma_j^{(2)}$, $j=\overline{1,n}$, $\gamma_j^{(m)}\in\mathbb{R}$, $m=1,2$, $i=\sqrt{-1}$, рівняння $\sum_{q=0}^{n}b_q\gamma^{2(n-q)}=0$, є різні.

Теорема 7.1. Для єдиності розв'язку задачі (21)-(23) у просторі $C^{2n}(D)$ необхідно і досить, щоб $\forall\lambda_k\in\Lambda\ \ \Delta(\lambda_k)\neq 0$.

Теорема 7.2. Нехай існують додатні сталі d, M і $\alpha\in\mathbb{N}$, такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень λ_k виконується нерівність

$$|\Delta(\lambda_k)|>M\lambda_k^{-\alpha-\varepsilon}\exp(-d\sqrt{\lambda_k}),\ 0<\varepsilon<1, \qquad (24)$$

і $a_{rs}(x)\in C^{2n-1}(Q)$, $r,s=\overline{1,p}$, $b(x)\in C^{2n-2}(Q)$, $\varphi_j(x)\in A_\delta^{1/2}$, $j=\overline{1,2n}$, $f(t,x)\in C([0,T],A_\delta^{1/2})$, $\delta>d+n\gamma T$, де $\gamma=\max_{q=\overline{1,n}}|\gamma_q^{(1)}|$. Тоді існує розв'язок задачі з простору $C^{2n}(D)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,2n}$, і $f(t,x)$.

Доведено (теорема 7.3), що для майже всіх (відносно міри Лесега в $\mathbb{R}^{2n}$) векторів $\bar{t}=(t_1,\dots,t_{2n})\in[0,T]^{2n}$ оцінка (24) виконується при $\alpha=(2n^2-n)(n-2n^2+p+1)/2$, $d=2\gamma nT$ для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k\in\Lambda$.

У випадку виконання співвідношень (10) для єдиності розв'язку задачі (21)-(23) у просторі $C^{2n}(D)$ необхідно і досить, щоб рівняння $\sqrt{\lambda_k}(\gamma_r-\gamma_q)t_0=2\pi im$, $\sqrt{\lambda_k}(\gamma_r+\gamma_q)t_0=2\pi im$, $n\geq q>r\geq 1$, не мали розв'язків у цілих числах m і λ_k (теорема 7.4). Встановлено умови існування розв'язку задачі (10),(21)-(23) у просторі $C^{2n}(D)$ (теореми 7.5, 7.6).

Для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь довільного порядку вигляду (5), (12), (17) задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами досліджувались в роботах Б.И.Пташника та його учнів*), де встановлені умови коректності досліджуваних задач у шкалах просторів Соболєва. З усіх випадків гіперболічні рівняння виявились найпростішими в тому плані, що в оцінці зверху коефіцієнтів $u_k(t)$ ряду (7) фігурують многочлени, які залежать від $k_1,\dots,k_p$.

У **третьому розділі** встановлені умови існування та єдиності розв'язків багатоточкових задач для параболічних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами.

У §8 розглядається багатоточкова задача для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, параболічних за Г.Є.Шиловим. У пункті 8.1 на прикладі триточкової задачі для рівняння з двома незалежними змінними, показано, як параболічність видозмінює умови існування роз-

---

*) Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.-К.:Наук. думка. 1984.-264с.

в'язку задачі. В області D^1 досліджується задача з умовами (2) для рівняння

$$Lu(t,x)\equiv\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]^3 u(t,x)+\sum_{s=0}^{2}\sum_{\nu=0}^{q} a_{s\nu}\frac{\partial^{s+\nu}u(t,x)}{\partial t^s\partial x^\nu}=0,\ a_{s\nu}\in\mathbb{C}. \qquad (25)$$

Оператор L-параболічний за Г.Є.Шиловим, тобто λ-корені рівняння $L(\lambda,ik)=0$ задовольняють нерівність

$$\max_{1\leqslant s\leqslant 3} Re\lambda_s(k)\leqslant -C_1|k|^h+C_2,\ C_1>0,\ C_2>0,\ h>0.$$

Вигляд області D^1 накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$. Розв'язок задачі (2),(25) шукається у вигляді ряду (3).

Теорема 8.1. Для єдиності розв'язку задачі (2),(25) у просторі $C^n([0,T],\Gamma')$ необхідно і досить, щоб рівняння

$$T(\lambda_p^{(1)}(k)-\lambda_r^{(1)}(k))-i(T(\lambda_p^{(2)}(k)-\lambda_r^{(2)}(k))+4\pi m)=0,\ 3\geqslant p>r\geqslant 1,$$

не мали розв'язків у цілих числах m і k.

Із вигляду рівняння (25) випливає, що

$$|\lambda_l(k)|\leqslant C_3|k|^q,\ l=1,2,3,\ C_3>0,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Позначимо через $y=(y_1,\dots,y_\gamma)$ вектор, утворений з усіх коефіцієнтів $a_{s\nu}$ рівняння (25), де γ - число цих коефіцієнтів.

Лема 8.1. Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів y при $|k|>K(y)$ виконуються нерівності

$$|\lambda_p(k)-\lambda_r(k)|\geqslant M|k|^{-(q+1+\varepsilon/2)},\ 0<\varepsilon<1,\ 3\geqslant p>r\geqslant 1,\ M=\mathrm{const}>0.$$

Лема 8.2. Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ при $|k|>K(T)$ справедливі нерівності

$$\left|\frac{T}{\pi}-\frac{2l}{\lambda_p^{(2)}(k)-\lambda_r^{(2)}(k)}\right|\geqslant|k|^{-1-\varepsilon/2},\ 0<\varepsilon<1,\ 3\geqslant p>r\geqslant 1,$$

$$l\in\mathbb{Z};\ \ \lambda_p^{(2)}(k)-\lambda_r^{(2)}(k)\neq 0.$$

Теорема 8.2. Нехай функції $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$, задовольняють умови:

1. $\varphi_j(x)\in A_\delta^q$, $\delta>C_3T$, якщо $h<q$;
2. $\varphi_j(x)\in A_{\delta_j}^q$, $\delta_j>(C_3-(5-j)C_1/2)T$, якщо $h=q$ і $C_3>(5-j)C_1/2$;

3. $\varphi_j(x)\in H_{\omega+2q+3}(\Omega)$, $\omega\in\mathbb{Z}$, якщо $h=q$ і $C_3=(5-j)C_1/2$;

4. $\varphi_j(x)\in H_r(\Omega)$ $(r\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, якщо $h=q$ і $C_3<(5-j)C_1/2$.

Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^T$) векторів y і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ існує розв'язок задачі (2),(25), з простору $C^{(3,q)}(D^1)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,2,3$.

У пункті 8.2 досліджується задача з умовами (6) в області D^p для рівняння

$$Lu(t,x)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u(t,x)+\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{|\nu|\leqslant q}a_{s\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^s\frac{\partial^{|\nu|}u(t,x)}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_p^{\nu_p}}=f(t,x),\qquad(26)$$

де $a_{s\nu}\in\mathbb{C}$; оператор L-параболічний за Г.Є.Шиловим, тобто λ-корені рівняння $L(\lambda,ik)=0$ задовольняють нерівність

$$\max_{1\leqslant s\leqslant n}Re\lambda_s(k)\leqslant -C_1|k|^h+C_2,\ C_1>0,\ C_2>0,\ h>0.$$

Теорема 8.3. Для єдиності розв'язку задачі (6),(26) у просторі $C^n([0,T],\Gamma')$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p\quad \Delta(k)\equiv\det\|\exp(\lambda_l(k)t_j)\|_{l,j=1}^n\neq 0.\qquad(27)$$

Теорема 8.4. Нехай виконуються умови (27). Якщо $\varphi_j(x)\in\Gamma(\Gamma')$, $j=\overline{1,n}$, $f(t,x)\in C([0,T],\Gamma)$ $(C([0,T],\Gamma'))$, то існує роз'язок задачі (6),(26), який належить простору $C^n([0,T],\Gamma)$ $(C^n([0,T],\Gamma'))$.

Теорема 8.5. Нехай існують додатні сталі d, M_1 і α_1, $\alpha_2\in\mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ винуються нерівності

$$\prod_{\substack{r=1\\ r\neq l}}^{n}|\lambda_l(k)-\lambda_r(k)|>M_1|k|^{-\alpha_1-\varepsilon},\quad l=\overline{1,n},\qquad(28)$$

$$|\Delta(k)|>M_1|k|^{-\alpha_2-\varepsilon}\exp(-d|k|^q),\qquad(29)$$

де $0<\varepsilon<1$, і нехай $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, і $f(t,x)$, задовольняють умови:

1. $\varphi_j(x)\in A_\delta^q$, $f(t,x)\in C^n([0,T],A_\delta^q)$, $\delta>d$, якщо $h<q$;

2. $\varphi_j(x)\in A_\delta^q$, $f(t,x)\in C^n([0,T],A_\delta^q)$, $\delta>d-nC_1T$, якщо $h=q$ і $d>nC_1T$;

3. $\varphi_j(x)\in H_{\omega+\alpha_1+qn+2}(\Omega^p)$, $f(t,x)\in C([0,T],H_{\omega+\alpha_1+\alpha_2+qn+2}(D^p))$, $\omega\in\mathbb{Z}$, якщо $h=q$ і $d=nC_1T$;

4. $\varphi_j(x)\in H_r(\Omega^p)$, $f(t,x)\in C([0,T],H_r(D^p))$, $r\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, якщо $h=q$ і $d<nC_1T$.

Тоді існує розв'язок задачі (6),(26) з простору $C^{(n,q)}(D^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, і $f(t,x)$.

Доведено, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ нерівності (28) виконуються для майже всіх векторів $y=(y_1,\ldots,y_{2\gamma})$, складених з дійсних і уявних частин коефіцієнтів рівняння (26), (γ-число цих коефіцієнтів) при $\alpha_1=(n-1)(p+q(n-3))/2$ (теорема 8.6); нерівність (29) виконується для майже всіх векторів $\bar{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in$ $\in[0,T]^n$ і для майже всіх векторів y при $\alpha_2=(n-1)((n-1)(p-q)/2+p+q)\times$ $\times n/2$, $d=C_3nT$ (теорема 8.7).

Проведено також дослідження коректності задачі (6),(26) у випадку, коли виконуються співвідношення (10) (теореми 8.8-8.11).

Параграф 9 присвячений дослідженню в області D^p задачі з умовами (6) для рівняння

$$L(u)\equiv\prod_{q=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{m,l=1}^{p}a_{mlq}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_l}-\sum_{s=1}^{p}b_{sq}(t)\frac{\partial}{\partial x_s}-c_q(t)\right]u(t,x)=0,\quad(30)$$

де $a_{mlq}(t)$, $b_{sq}(t)$, $c_q(t)$-достатньо гладкі комплекснозначні функції аргумента t. Припускається, що оператор L - рівномірно параболічний за І.Г.Петровським в області D^p, тобто для будь-якого дійсного вектора $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_p)$ і для довільного $t\in[0,T]$ виконуються нерівності

$$\sum_{m,l=1}^{p}\mathrm{Re}\,a_{mlq}(t)\nu_m\nu_l\geq\mu\sum_{m=1}^{p}\nu_m^2,\quad q=\overline{1,n},\quad \mu=\mathrm{const}>0.$$

Теорема 9.1. Для єдиності розв'язку задачі (6),(30) в просторі $C^n(D^p)$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p\quad \Delta(k)\equiv\det\|f_{kq}(t_j)\|_{j,q=1}^{n}\neq0,$$

де $f_{kq}(t)$, $q=\overline{1,n}$,-фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\prod_{q=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}-\sum_{m,l=1}^{p} a_{mlq}(t)k_m k_l - i\sum_{s=1}^{p} b_{sq}(t)k_s - c_q(t)\right]u_k(t)=0.$$

Позначимо: $a=\max_{\substack{1\leq m,l\leq p\\ 1\leq q\leq n}} \max_{t\in[0,T]} |\mathrm{Re}\,a_{mlq}(t)|$.

Теорема 9.2. Нехай існують додатні сталі M, d і $\alpha\in\mathbb{N}$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k)|>M|k|^{-\alpha-\varepsilon}\exp(-d|k|^2),\ 0<\varepsilon<1, \qquad (31)$$

і нехай функції $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, задовольняють умови:

1. $\varphi_j(x)\in A_\delta^2$, $\delta>d+(a-\mu)nT$, якщо $d>(\mu-a)nT$;
2. $\varphi_j(x)\in H_{q+\alpha+2n+1}(\Omega^p)$, $q\in\mathbb{Z}$, якщо $d=(\mu-a)nT$;
3. $\varphi_j(x)\in H_r(\Omega^p)$, $r\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, якщо $d<(\mu-a)nT$.

Тоді існує розв'язок задачі (6),(31) з простору $C^n(D^p)$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$.

Більш ефективні умови існування і єдиності розв'язку задачі (6),(31) одержано у випадку, якщо точки t_j, $j=\overline{1,n}$, задовольняють співвідношення (10), а функції $a_{mlq}(t)$, $b_{sq}(t)$, $c_q(t)$, $m,l,s=\overline{1,p}$, $q=\overline{1,n}$, мають вигляд

$$a_{mlq}(t)=\lambda_{ml}(t)+a_{mlq},\ b_{sq}(t)=\beta_s(t)+b_{sq},\ c_q(t)=\eta(t)+c_q,$$

де $\lambda_{ml}(t)$, $\beta_s(t)$, $\eta(t)$-достатньо гладкі комплекснозначні функції аргумента t; a_{mlq}, b_{sq}, c_q-комплексні числа (теореми 9.3-9.6).

ВИСНОВКИ.

В дисертаційній роботі встановлені умови існування та єдиності розв'язків задач з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами періодичності (або умовами типу Діріхле) за просторовими координатами для лінійних параболічних та безтипних диференціальних рівнянь і систем рівнянь довільного порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами. Доведені метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при дослідженні розглядуваних задач. Побудовані явні формули для розв'язків задач у вигляді рядів за системами ортогональних функцій.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Пташник Б.Й, Силюга Л.П. Багатоточкова задача для безтипних факторизованих диференціальних операторів // Укр. мат. журн.- 1996. - 48, № 1. - С. 66-79.
2. Пташник Б.Й, Силюга Л.П. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Доповіді НАН України. - 1996. - № 3. - С. 10-14.
3. Пташник Б.Й, Силюга Л.П. Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. трудов - К: Ин-т математики НАН Украины. 1995. - С. 218-220.
4. Пташник Богдан, Силюга Людмила. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь (Дрогобич, 25-27 січня 1994 р.): Тези доп. - К.: Ін-т математики АН України, 1994. - С. 132.
5. Силюга Людмила. Багатоточкова задача для параболічних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Третя Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 25-27 травня 1994 р.): Тези доп. - К.: Ін-т математики АН України, 1994. - С. 110.
6. Силюга Людмила. Багатоточкова задача для параболічних за Шиловим диференціальних рівнянь // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 10-15 жовтня 1994 р.): Тези доп. - Чернівці: Рута, 1994. - С. 132.

7. Силюга Людмила. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Четверта Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 11-13 травня 1995р.): Тези доп. - К.: Ін-т математики НАН України, 1995. - С. 131.

8. Силюга Людмила. Багатоточкова задача для безтипних диференціальних рівнянь зі змінними за x коефіцієнтами // Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях (Львів, 5-7 жовтня 1995р): Тези доп. - Львів: Держ. ун-т Львівська політехніка, 1995. - С. 51.

9. Силюга Людмила. Двоточкова задача для безтипної системи рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами // П'ята Міжнародна наукова конференція ім. академіка М.Кравчука (Київ, 13-15 травня 1996р.):Тези доп. - К.:Ін-т математики НАН України, 1996.-С.

10. Ptashnik Bohdan J., Ilkiv Volodymyr S., Syluha Ludmyla P. Multipoint problems for the typeless partial differential equations // International Conference Nonlinear differential equations Kiev, August 21-27, 1995. - P. 136.

Сылюга Л.П. Многоточечная задача для линейных параболических и бестипных дифференциальных уравнений и систем уравнений с частными производными. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Львовский государственный университет имени Ивана Франко, Львов, 1996.

В диссертации исследованы задачи с многоточечными условиями по временной переменной и условиями периодичности по пространственным координатам для параболических и бестипных дифференциальных

уравнений и систем уравнений произвольного порядка с постоянными и переменными коэффициентами. Установлены условия существования и единственности решений. Построены решения в виде рядов по системам ортогональных функций. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при исследовании рассматриваемых задач.

Syluha L.P. Multi- point problems for parabolic and the typeless differetial equations and systems of arbitrary order. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of Science (Ph. D) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.02. - Differential equations. L'viv Ivan Franko state university, L'viv, 1996.

The problems with multi-point time conditions and periodic conditions in space coordinates for parabolic and the typeless differential equations and systems of arbitrary order with constant and variable coefficients, are considered in the dissertation. The conditions of existence and uniqueness of solutions of the problems are established. The metric theorems on lower bounds of small denominators, which appear in the construction of the solutions of considered problems in the form of series of orthogonal functions, are proved.

Ключові слова: параболічні рівняння; безтипні рівняння; багатоточкові умови; функція Гріна; малі знаменники; міра Лебега; розмірність Хаусдорфа.

438060

Aв 36.230