ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

Краснянський Михайло Борисович

Усереднення різницевих рівнянь

01.01.02 — диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків — 1996

Дисертація є рукописом

Робота викона[на у Фізико-технічному інституті]
низьких темп[ератур НА[Н України]]

Науковий керівник:	доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кор. НАН України ХРУСЛОВ Євген Якович,
Офіційні опоненти:	доктор фіз.-мат. наук, професор ПАНКОВ Олександр Андрійович,
	доктор фіз.-мат. наук, професор ЧУДІНОВИЧ Ігор Юрійович,
Провідна організація:	Інститут прикладної математики і механіки НАН України, м.Донецьк

Захист дисертації відбудеться 20 грудня 1996р. о 15^15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.02.03 Харківського державного університету (310077, Харків, пл.Свободи, 4, ауд. 6-48).

З дисертацією можна ознайомитись у Центральній науковій бібліотеці ХДУ.

Автореферат розісланий 15.11. 1996 р.

Учений секретар
спеціалізованої
вченої ради Ермаков Єрмаков В.Г.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Різноманітні задачі механіки, фізики та хімії приводять до вивчення різницевих рівнянь, які є дискретними моделями процесів у сильнонеоднорідних середовищах. Такими рівняннями описуються також випадкові блукання частинок на гратах з швидкоосцілюючими ймовірностями переходу. Ці рівняння мають швидноосцілюючи награті коефіцієнти, тому практично неможливо одержати розв'язки таких рівнянь ні аналітичними ні чисельними методами. Але, якщо масштаб мікроструктури є значно меншим ніж характерний масштаб процесу, що вивчається, то можливо одержати усереднене описання такого процесу з допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними, коефіцієнти яких плавно змінюються у просторі. Вивід таких рівнянь є тісно зв'язаний з вивчанням асимптотичного поводження розв'язків різницевих рівнянь, коли період грат прямує до нуля. Аналогічне питання виникає в теорії усереднення рівнянь з частинними похідними з швидкоосцілюючими коефіцієнтами та крайових задач у сильноперфорованих областях. Значний вклад в цю теорію внесли В.О.Марченко, Є.Я.Хруслов, І.В.Скрипник, О.А.Олійник, Н.С.Бахвалов, В.В.Жиков, С.М.Козлов, О.А.Панков, Е. Де Джорджі, Ж.-Л.Ліонс, Л.Тартар, Ф.Мюра, Дж.Папаніколау, Дж. Даль Масо та інші.

Задачі усереднення для різницевих рівнянь з швидкоосцілюючими та випадковими коефіцієнтами вперше вивчались в роботах С.М.Козлова, який показав, що асимптотичне поводження розв'язків цих рівнянь описується параболічним або еліптичним рівнянням другого порядку. У подальшому ці питання вивчалися для лінійних рівнянь у роботах Р.Кухнемана, Р.Фігарі, Е.Орланді, Дж.Папаніколау, М.Вожеліуса та у роботах О.А.Панкова для квазілінійних рівнянь.

Слід відзначити, що у всіх згаданих роботах розглядалися різницеві рівняння, що задовольняють, так званим, умовам "рівномірної еліптичності та обмеженості". Ці умови для випадкових блукань, зокрема, означають, що ймовірності переходу до найближчих сусідів не вироджуються. Проте в багатьох, практично важливих випадках умови "рівномірної еліптичності та обмеженості" не виконуються. Наприклад, для різницевих рівнянь, що описують випадкові блукання на гратах, що мають вузли, перехід до яких заборонено, рівнянь, що описують розповсюдження сигналів на сітках з розривами (дефектами), умова рівномірної еліптичності не виконується. В цих випадках усереднені моделі є значно складнішими і їх вид істотньо залежить від геометрії множини дефектів. Такі моделі можуть бути багатокомпонентними, нелокальними, моделями з пам'яттю. Для крайових задач у сильно перфорованих областях такіж усереднені моделі були одержані в роботах Є.Я.Хруслова. Введені їм поняття сильно– та слабозв'язаних областей відіграють важливу роль у цих питаннях. У випадку різницевих рівнянь аналогічну роль грають поняття РС та КРС сіток (сіток, що задовольняють умовам p– та квазі p–продовження), що введені в дисертації.

Мета роботи полягає в побудові усереднених моделей для різницевих рівнянь у тому випадку, коли коефіцієнти різницевих рівнянь не задовольняють умовам рівномірної еліптичності та обмеженості.

Теоретична та практична цінність результатів полягає в тому, що вони можуть знайти застосування при дослідженні асимптотичного поводження розв'язків різницевих рівнянь з швидкоосцілюючими коефіцієнтами, випадкових блукань на гратах. Виведені в дисертації усереднені рівняння можуть бути застосовані у фізиці конденсованого стану.

Методіка дослідження. У дисертації застосовані методи різницевих та диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії усереднення та варіаційні методи дослідження задач.

Положення дисертації, що виносяться до захисту:

1. Поняття РС та КРС сіток та питання збіжності і компактності послідовності функцій, що визначені на таких сітках, до функції визначеної у області неперервного змінення аргументу.

2. Асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь на гратах, що задовольняють умові РС.

3. Усереднена модель різницевих рівнянь на гратах з накопичувачами.

4. Асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь на гратах з слабкими зв'язками.

5. Усереднена модель випадкових блукань та потенціалу лінійних сіток на гратах, що задовольняють умові РС, на гратах з накопичувачами та гратах з слабкими зв'язками.

Всі перелічені результати одержані автором **особисто** та складають **наукову новизну** роботи.

Результати одержані в дисертації, та розвинені в ній методи усереднення можуть бути **практично застосовані** у фізиці конденсованого стану.

Достовірність результатів забезпечується вживанням нових методів дослідження. Одержані результати узагальнюють результати, що були одержані С.М.Козловим.

Всі наукові положення та висновки, приведені в дисертації є досить обгрунтовані та аргументовані. Вирахування є повні та математично коректні.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарах відділу математичного моделювання фізичних процесів ФТІНТ НАН Україні, на об'єднанному семінарі кафедри диференціальних рівнянь та кафедри математичної фізики Харківського держуніверситету, на математичному семінарі Університету Париж 7, на засіданні Харківського математичного товариства (1994 р.) та на міжнародній конференції "EurHomogenization" (Nice, 1995 р).

По матеріалам дисертації надруковано 5 праць.

Об'єм та структура дисертації. Дисертація складається із вступу і трьох глав. Загальний об'єм дисертації — 124 сторінки друкованого тексту. Список літератури складається з 78 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі окреслено предмет досліджень, обговорюється актуальність теми досліджень. Наведено історична справка відносно предмета досліджень. Зформульовано мета та задачі досліджень. Подається короткий зміст дисертаційної роботи.

У першій главі введено поняття сіток, що задовольняють умові РС. Побудовано усереднену модель для різницевих рівнянь на сітках, що задовольняють умові РС.

У §1.1 введено основні поняття, означення та зформульовано основні результати. Розглянемо сім'ю функцій $p_\varepsilon(x,y)$, $\varepsilon > 0$, що задовольняють умовам для $x, y \in \varepsilon Z^d$ ($\mathbb{Z}^d$ — множина d-мірних векторів з цілими координатами):

1) $p_\varepsilon(x,y) \geq 0$;

2) $p_\varepsilon(x,y) = p_\varepsilon(y,x)$;

3) $p_\varepsilon(x,y) = 0$, коли $| x - y | > C\varepsilon$, де стала C не залежить від ε;

4) $\sum_{y \in \varepsilon \mathbf{Z}^d} p_\varepsilon(x,y) \equiv 1.$

Для довільної підмножини Ω_ε сітки $\varepsilon\mathbf{Z}^d$, будемо називати множину $\partial\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon \mid \exists y \notin \Omega_\varepsilon \;\; p_\varepsilon(x,y) > 0\}$ межою Ω_ε, множину $\Omega_\varepsilon^0 = \Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$ — внутрішністю Ω_ε та множину $F_\varepsilon = \{x \in \Omega_\varepsilon \mid p_\varepsilon(x,y) = 0 \; x \neq y\}$ — множиною заборонених вузлів. Введемо позначення:

$$d_z u_\varepsilon(x) = \frac{u_\varepsilon(z) - u_\varepsilon(x)}{\varepsilon}.$$

$$d_t u_\varepsilon(t,x) = \frac{u_\varepsilon(t+\varepsilon^2, x) - u_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon^2}$$

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{y \in \Omega_\varepsilon} p_\varepsilon(y,x) d_y u_\varepsilon(x),$$

Нехай Q — область з гладкою межою в $\mathbf{R}^d (d \geq 2)$. Позначимо $Q_\varepsilon = Q \cap \varepsilon\mathbf{Z}^d, \Omega_\varepsilon = Q_\varepsilon \setminus F_\varepsilon$ і розглянемо задачу для функції, визначеної на Ω_ε:

$$d_t u_\varepsilon(t,x) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(t,x), \;\; x \in \Omega_\varepsilon^0, \;\; t \in \varepsilon^2 Z_+. \tag{1}$$

з крайовими та початковими умовами:

$$u_\varepsilon(0,x) = u_\varepsilon^0(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \qquad u_\varepsilon(t,x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon. \tag{2}$$

Тут $Z_+ = \{0,1,2,...\}$. Ми вивчаємо асимтотичне поводження розв'язку $u_\varepsilon(t,x)$ цієї задачі при $\varepsilon \to 0$.

Для формулювання основного результату потрібно ввести деякі означення. Для довільної сітки G_ε назвемо величину $\mu_\varepsilon(G_\varepsilon) = \sum_{x \in G_\varepsilon} \varepsilon^d$ мірою сітки G_ε

Означення 1.1. Будемо казати, що сітки Ω_ε є *асимптотично щільні у* Q, якщо існує стала C така, що для кожного шару B_h радіуса h існує $\varepsilon(h)$, що нерівність

$$\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon \bigcap B_h) \geq C h^d \mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon),$$

виконано для $\varepsilon \leq \varepsilon(h)$.

Якщо також існує стала C_1, що виконано нерівність

$$\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon \bigcap B_h) \leq C_1 h^d \mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon), \qquad \forall \varepsilon \leq \varepsilon(h)$$

тоді кажуть, що Ω_ε є *рівномірно асимптотично щілні у* Q.

Означення 1.2. Нехай Ω_ε — асимптотично щільні в Q і $\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \geq C > 0$. Нехай функції $u_\varepsilon(x)$ визначені на Ω_ε, та функція $u(x)$ визначена на Q. Будемо казати, що $u_\varepsilon(x)$ збігаються до $u(x)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$, при $\varepsilon \to 0$, якщо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \hat{u}_\varepsilon - u \|_{L_2(\hat{\Omega}_\varepsilon)} = 0,$$

де $\hat{\Omega}_\varepsilon = \cup_{x \in \Omega_\varepsilon} K_\varepsilon(x) \cap Q$, $K_\varepsilon(x)$ — куб із центром у точці x та ребрами довжиною ε, і $\hat{u}_\varepsilon(x)$ є кусково–стала інтерполяція функції $u_\varepsilon(x)$.

Для довільної сітки G_ε визначемо

$$d_{G_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sum_{x \in G_\varepsilon} \sum_{\substack{x + \varepsilon e_i \in G_\varepsilon \\ 1 \leq i \leq d}} | d_i u_\varepsilon(x) |^2 \varepsilon^d,$$

де $d_i = d_{x + \varepsilon e_i}$.

$$p_{G_\varepsilon}(u_\varepsilon) = \sum_{x, z \in G_\varepsilon} p_\varepsilon(x, z) \, | d_z u_\varepsilon(x) |^2 \, \varepsilon^d.$$

Ми будемо припускати, що функція $u_\varepsilon(x)$, визначена на Ω_ε, є стала, якщо $p_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon(x)) = 0$.

Означення 1.3. Сім'я сіток Ω_ε задовольняє *умові PC (умові p–продовження)*, якщо для усіх функцій $u_\varepsilon(x)$, визначених на Ω_ε, існує продовження $\hat{u}_\varepsilon(x)$ на Q_ε, що виконано нерівність: $d_{Q_\varepsilon}(\hat{u}_\varepsilon) \leq D \; p_{\Omega_\varepsilon}(u_\varepsilon)$, де стала D не залежить від $\varepsilon, u_\varepsilon(x)$.

Нехай l — довільний вектор в $\mathbf{R}^d$, $K_h(x)$ — куб з центром в точці x та ребром довжиною h. Розглянемо функціонал

$$G_l(z, \varepsilon, h) = \min \frac{1}{2h^d} \sum_{x \in \Omega_\varepsilon \bigcap K_h(z)} \Big\{ \sum_{y \in \Omega_\varepsilon \bigcap K_h(z)} p_\varepsilon(x, y) \, | d_y u_\varepsilon(x) |^2 +$$
$$+ h^{-\tau} | u_\varepsilon(x) - (x - z, l) |^2 \Big\} \, \varepsilon^d, \tag{3}$$

де мінімум береться по класу функцій $u_\varepsilon(x)$, що визначені на $\Omega_\varepsilon \cap K_h(z)$. Цей функціонал є квадратичним по l і може бути зображений у вигляді

$$G_l(y, \varepsilon, h) = \sum_{i, j = 1}^{d} a_{ij}(y, \varepsilon, h) l_i l_j. \tag{4}$$

Система величин $\{a_{ij}(y, \varepsilon, h)\}_{i, j = 1}^{d}$ формує тензор в $\mathbf{R}^d$, який ми вибираємо за локальну характеристику сіток Ω_ε. Основний результат першої глави полягає у наступному твердженні.

Теорема 1.1. *Нехай Ω_ε задовольняють умові PC, є асимптотично щільні у Q та $\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) \geq C > 0$.*

Нехай початкові дані $u^0_\varepsilon(x)$ збігаються до $u^0(x)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$, та існують границі для деякого $\tau > 2$ та $y \in \bar{Q}$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}}\, a_{ij}(y, \varepsilon, h) = \lim_{h \to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0}\, a_{ij}(y, \varepsilon, h) = a_{ij}(y) \qquad (L1)$$

$$\lim_{h \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon \cap K_h(y))}{h^d} = b(y) \qquad (L2)$$

де граничні функції — неперевні.

Тоді коефіцієнти $a_{ij}(x)$ задовольняють умовам рівномірної еліптичності та $u_\varepsilon(t,x)$ збігаються в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$ рівномірно по $t \in [0,T] \cap \varepsilon^2 Z_+$ до функції $u(t,x)$, де $u(t,x)$ — розв'язок наступної задачі:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{b(x)} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right), \quad x \in Q, \quad t \in (0, \infty) \qquad (5)$$

$$u(0,x) = u^0(x), \quad x \in Q, \qquad u(t,x) = 0 \qquad x \in \partial Q,\ t > 0. \qquad (6)$$

Зворотньо, якщо для довільной фунції $u^0(x)$ та сім'ї початкових умов $u^0_\varepsilon(x)$, що збігаються до $u^0(x)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$, функції $u_\varepsilon(t,x)$ збігаються до розв'язку задачі (5),(6) в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$ рівномірно по t, тоді умови (L1,L2) виконано для усіх $\tau > 2$.

Доведення теореми наведено у §§ 1.2–1.3 на основі перетворення Лапласа та вивчення асимптотичного поводження розв'язків стаціонарної задачи при $\varepsilon \to 0$:

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x) - c_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x), \;\; x \in \Omega^0_\varepsilon$$
$$u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon,$$

дослідження якої проведено варіаційним методом у Теоремі 1.2. Деякі приклади у періодичній сітуації розглянуто у §1.4, де коефіцієнти усередненого рівняння виражено через розв'язки коміркових задач.

У §1.5 ці результати застосовано до вивчення асимптотичного поводження випадкових блукань на гратах з ймовірностями переходу $p_\varepsilon(x,y)$. Нехай $\xi_\varepsilon(t)$ — кусково–стала інтерполяція шляха випадкового блукання з початковим розподілом $u^0_\varepsilon(x)$, і $\xi(t)$ — дифузійний процес, що пордожуеться (5),(6). Припустимо, що $u^0_\varepsilon(x)$ збігаються к $u^0(x)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$, тоді ми маємо наступний результат.

Теорема 1.3. *Якщо виконано вимоги Теореми 1.1, то скінченномірні розподіли процесу $\xi_\varepsilon(t)$ збігаються до скінченномірних розподілів $\xi(t)$.*

Розглянемо куб K_ε, що вміщає точки $x = (x_1, .., x_d)$, де $x_j = k\varepsilon$, для $k = 0, .., 1/\varepsilon$ та $j = 1, .., d$. Система $\{K_\varepsilon, p_\varepsilon(x, y)\}$ формує лінійну сітку. У §1.7 вивчається асимптотичне поводження потенціалу $u_\varepsilon(x)$ лінійної сітки при $\varepsilon \to 0$, який задовольняє рівнянню:

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x) = 0, \qquad x \in K_\varepsilon \setminus \{x \mid x_1 = 1 \text{ або } x_1 = 0\}$$

$$u_\varepsilon(x) = 0,\ x_1 = 0, \qquad u_\varepsilon(x) = U,\ x_1 = 1$$

Основний результат полягає в наступному:

Теорема 1.5. *Нехай Ω_ε задовольняють умові PC та є асимптотично щільні у Q. Якщо виконана умова $(L1)$ Теореми 1.1, то $u_\varepsilon(x)$ збігаються в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$ до розв'язку проблеми*

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = 0 \quad x \in K,$$

$$u(x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad u(x) = U, \quad x_1 = 1,$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = 0 \quad x_i = 0, x_i = 1,\ i = 2, .., d.$$

Матриця $a_{ij}(x)$ називається матрицею ефективної провідністі.

Таким чином, основний висновок першої глави полягає у тому, що усереднена модель на сітках, що задовольняють умові PC, є простою скалярною моделлю.

У другій главі вивчається асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь, на сітках Ω_ε, що не задовольняють умові PC. А саме, на сітках, що мають вигляд:

$$\Omega_\varepsilon = T_\varepsilon \bigcup \Omega_{\varepsilon 0} \bigcup S_\varepsilon, \qquad T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} \Omega_\varepsilon^i \tag{7}$$

де сітки $\Omega_{\varepsilon 0}$ задовольняють умові PC, міра підмножини S_ε та діаметри Ω_ε^i прямують до нуля, а їх кількість до нескінченністі, коли $\varepsilon \to 0$. Ми будемо називати множини Ω_ε^i накопичувачами, і припустимо, що вони задовольняють умові PC у такому розумінні.

Означення 2.1. Сітки Ω_ε^i задовольняють *умові PC по відношенню до* V_ε^i, $\Omega_\varepsilon^i \subset V_\varepsilon^i \subset Q_\varepsilon$, якщо для довільної функції $u_\varepsilon(x)$ на Ω_ε^i існує продовження $\hat{u}_\varepsilon(x)$ фукнції $u_\varepsilon(x)$ на V_ε^i таке, що виконана нерівність $d_{V_\varepsilon^i}(\hat{u}_\varepsilon) \le D p_{\Omega_\varepsilon^i}(u_\varepsilon)$, де стала D не залежить від $\varepsilon, u_\varepsilon(x), V_\varepsilon^i$.

Введено локальні характеристики сіток Ω_ε. Множини $\Omega_{\varepsilon 0}$ характеризуються тензором $a_{ij}(y,\varepsilon,h)$, який вводиться аналогічно (4). Для описання зв'язку між $\Omega_{\varepsilon 0}$ та накопичувачами розглянуто функціонал для $t \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}\varepsilon}$

$$W_t(y,\varepsilon,h) = \min_{u_\varepsilon} \frac{1}{2} \sum_{x,\, z \,\in\, \Omega_\varepsilon \bigcap K_h(y)} p_\varepsilon(x,z) \mid d_z u_\varepsilon(x) \mid^2 \varepsilon^d +$$

$$+ h^{-\gamma} \{ \sum_i \sum_{x \in \Omega_\varepsilon^i \bigcap K_h(y)} \mid u_\varepsilon(x) - t_i \mid^2 + \sum_{x \in \Omega_{\varepsilon 0} \bigcap K_h(y)} \mid u_\varepsilon(x) \mid^2 \} \, \varepsilon^d$$

де підсумування проведено для i таких, що $\Omega_\varepsilon^i \subset K_h(y)$, та мінімум береться по функціям на $\Omega_\varepsilon \cap K_h(y)$. Основний результат другої глави полягає у наступній теоремі.

Теорема 2.1. *Нехай Ω_ε має вид (7) та припустимо, що виконано такі умови:*

1)$\Omega_{\varepsilon 0}, T_\varepsilon$ є асимптотично щільні в $Q, \Omega_{\varepsilon 0}$ задовольняють умові PC, Ω_ε^i задовольняють умові PC по відношенню до кубів мінімального діаметру, що містять у собі Ω_ε^i. Діаметри кубів збігаються до нуля, а їх кількість до нескінченності, коли $\varepsilon \to 0$. $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_\varepsilon(S_\varepsilon) = 0$,

2) $u_\varepsilon^0(x)$ збігаються до $u_b^0(x)$ в $L_2(\Omega_{\varepsilon 0}, Q)$, $u_\varepsilon^0(x)$ збігаються до u_r^0 в $L_2(T_\varepsilon, Q)$, коли $\varepsilon \to 0$.

3) Існують наступні границі для кожного $y \in \bar{Q}$:
для деякого $\tau > 2$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} a_{ij}(y,\varepsilon,h) = \lim_{h \to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} a_{ij}(y,\varepsilon,h) = a_{ij}(y) \qquad (L1)$$

для деякого $\gamma > 2$ рівномірно по $t \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}\varepsilon}$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{W_t(y,\varepsilon,h)}{\sum_i \mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon^i) t_i^2} = \lim_{h \to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \frac{W_t(y,\varepsilon,h)}{\sum_i \mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon^i) t_i^2} = p(y) > p_0 > 0 \quad (L2)$$

та

$$\lim_{h \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\varepsilon(\Omega_{\varepsilon 0} \cap K_h(y))}{h^d} = b(y) \qquad (L3)$$

$$\lim_{h \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\varepsilon(T_\varepsilon \cap K_h(y))}{h^d} = r(y) \qquad (L4)$$

Припустимо, що граничні функції неперервні в $\bar{Q}$, та функції $p(x)$ є неперервно диференційована.

Тоді коефіцієнти $a_{ij}(y)$ задовольняють умові рівномірної еліптичності, $u_\varepsilon(t,x)$ збігаються до $u(t,x)$ в $L_2(\Omega_{\varepsilon 0}, Q)$, $u_\varepsilon(t,x)$ збігаються до $v(t,x)$ у $L_2(T_\varepsilon, Q)$ рівномірно по відношенню к t. Функції $u(t,x), v(t,x)$ є розв'язок задачі (8),(9)

$$b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_j}) - p(x)r(x)(u(t,x) - v(t,x)) \quad (8)$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = p(x)(u(t,x) - v(t,x)) \quad x \in Q, \quad t \in (0,\infty)$$

$$u(t,x) = 0, x \in \partial Q, \ t > 0$$

$$u(0,x) = u_b^0(x), \quad x \in Q; \qquad v(0,x) = u_r^0(x), \quad x \in Q; \quad (9)$$

для кожного T.

У §2.2–§2.4 наведено доведення Теореми 2.1. Явні формули для коефіцієнтов усередненого рівняння одержано в §2.5 для деяких періодичних структур. Ці результати застосовано у §2.6 для вивчення асимптотичного поводження випадкових блукань, систем з неперервним часом та лінійних сітей.

Задача (8),(9) зводиться до

$$b(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}) + p(x)r(x)u(x,t) - p^2(x)r(x)\times$$

$$\times \int_0^t \exp(p(x)(\xi - t))u(x,\xi)d\xi = p(x)r(x)u_r^0(x)\exp(-p(x)t), \ x \in Q, \ t > 0$$

$$u(0,x) = u_b^0(x), \quad x \in Q;$$

Тому основний висновок другої глави полягає у тому, що усереднена модель на сітках з накопичувачами є моделлю з пам'яттю. Зауважимо, шо ефективна провідність сіток з накопичувачами є така ж сама, що і ефективна провідність сіток $\Omega_{\varepsilon 0}$.

Третя глава присвячена вивченню асимптотичного поводження різницевих рівнянь, на сітках з слабкими зв'язками. А саме, припустимо, що Ω_ε мають вигляд

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_{\varepsilon 0} \bigcup \Omega_{\varepsilon 1} \bigcup S_\varepsilon, \tag{9}$$

Функції $p_\varepsilon(x,y)$ задовольняють умовам 1),2),4) та умові
$3')p_\varepsilon(x,y) = 0$, коли $| x - y | > C_\varepsilon$, де $C_\varepsilon \to 0$, коли $\varepsilon \to 0$.

Припустимо також, що виконані умови:

$$I \qquad \mu(\Omega_{\varepsilon 0}) \geq C > 0, \ \mu(S_\varepsilon) = o(\mu(\Omega_{\varepsilon 1})) \quad \varepsilon \to 0$$

$$II. \qquad \sup_{x \in \Omega_{\varepsilon k} \bigcup S_\varepsilon} \sum_{y \in Z^d} p_\varepsilon(x, x+\varepsilon y) \mid y \mid^2 \leq \frac{C}{\mu(\Omega_{\varepsilon k})}$$

Розглядається задача

$$d_t u_\varepsilon(t,x) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(t,x), \ \ x \in \Omega_\varepsilon, \ \ t \in \varepsilon^2 Z_+ \tag{10}$$

$$u_\varepsilon(0,x) = u^0_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

Вивчається асимптотичне поводження розв'язків задачі (10) при $\varepsilon \to 0$. Щоби зформулювати основний результат, введемо означення

Означення 3.1. Нехай сітки Ω_ε задовольняють умовам рівномірної асимптотичної щільності. Функції $u_\varepsilon(x)$, що визначені на Ω_ε, збігаються до функції $u(x) \in L_2(Q)$ в $\hat{L}_2(\Omega_\varepsilon, Q)$, якщо існують функції $u_M(x) \in Lip(\bar{Q})$ такі, що

$$\lim_{M \to \infty} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \left\{ \frac{1}{\mu(\Omega_\varepsilon)} \parallel \hat{u}_\varepsilon - u_M \parallel_{L_2(\hat{\Omega}_\varepsilon)} + \parallel u - u_M \parallel_{L_2(Q)} \right\} = 0$$

де $\hat{u}_\varepsilon(x)$ є кусково–стала інтерполяція функції $u_\varepsilon(x)$.

Позначимо

$$[\![u_\varepsilon]\!]^2_{1, p_\varepsilon, G_\varepsilon} = p_{G_\varepsilon}(u_\varepsilon) + [\![u_\varepsilon(x)]\!]^2_{0, \varepsilon, G_\varepsilon},$$

де

$$[\![u_\varepsilon]\!]^2_{0, \varepsilon, G_\varepsilon} = \frac{1}{\mu(G_\varepsilon)} \sum_{x \in G_\varepsilon} | u_\varepsilon(x) |^2 \varepsilon^d$$

Означення 3.2. Сітки Ω_ε задовольняють *умові КРС (умові квазі р-продовження)*, якщо для довільної сім'ї функцій $u_\varepsilon(x)$, що визначені на

Ω_ε, для яких $|[u_\varepsilon]|_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \leq C$, виконана умова: для будь-якої сталої M існують сітки $S_\varepsilon^M \subset \Omega_\varepsilon$ такі, що для усіх $\varepsilon \leq \varepsilon(M)$

$$\frac{\mu_\varepsilon(S_\varepsilon^M)}{\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \leq \varphi(M),$$

де $\varphi(M)$ є монотонна функція, $\varphi(M) = o(\frac{1}{M^2})$, при $M \to \infty$, та функції $u_\varepsilon(x)$ задовольняють умові

$$| u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y) | \leq M \,| x - y | \quad x, y \in \Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon^M$$

$$| u_\varepsilon(x) | \leq M \quad x \in \Omega_\varepsilon \setminus S_\varepsilon^M$$

та

$$\lim_{M\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{1}{\mu_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \| u_\varepsilon \|^2_{0,\varepsilon,S_\varepsilon^M} = 0$$

Доведена лема про компактність функцій, що визначені на сітках, які задовольняють умові КРС.

Лемма 3.1. *Нехай Ω_ε задовольняють умові КРС та є рівномірно асимптотично щільні в Q, тоді сім'я $u_\varepsilon(x)$ така, що $[\![u_\varepsilon]\!]^2_{1,p_\varepsilon,\Omega_\varepsilon} \leq C$ є компактна відносно збіжності в $\hat{L}_2(\Omega_\varepsilon, Q)$.*

Для характеристики сіток $\Omega_{\varepsilon k}$, аналогічно (4), введено функції $a^k_{ij}(y, \varepsilon, h)$. Для характеристики зв'язку між $\Omega_{\varepsilon k}$, $k = 1, 2$ розглянемо величину:

$$c(y, \varepsilon, h) = \min_{u_\varepsilon} \frac{1}{2h^d} \sum_{x \in \Omega_\varepsilon \bigcap K_h(y)} \Big\{ \sum_{z \in \Omega_\varepsilon \bigcap K_h(y)} p_\varepsilon(x, z) \,| d_z u_\varepsilon(x) |^2 +$$

$$+ \frac{1}{g(h)} \sum_{k=0}^{1} | u_\varepsilon(x) - k |^2 \frac{\chi_{\Omega_{\varepsilon k}}(x)}{\mu(\Omega_{\varepsilon k})} \Big\} \,\varepsilon^d,$$

де $g(h) = \max(\sqrt{\varphi(\frac{1}{h})}h, h^\gamma)$. Мінімум береться на функціях, визначених на $\Omega_\varepsilon \cap K_h(y)$. Якщо для достатньо малих ε ми маємо, що $c(y, \varepsilon, h) = O(h^d)$, коли $h \to 0$, то сітки $\Omega_{\varepsilon k}$ є слабозв'язаними.

Основний результ третього розділу зформульвано у наступному твердженні.

Теорема 3.1. *Нехай Ω_ε мають вигляд (9), виконані умови I,II, сітки $\Omega_{\varepsilon k}$ задовольняють умові КРС та є рівномірно асимптотично щільні в Q. Припустимо, що*

1)$u_\varepsilon^0(x)$ збігаються в $L_2(\Omega_{\varepsilon k}, Q)$ до функцій $u_0^k(x)$, коли $\varepsilon \to 0$.

2) *Для кожного $y \in \bar{Q}$ існують границі:*

для деякого $\tau > 2$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} a_{ij}^k(y, \varepsilon, h) = \lim_{h \to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} a_{ij}^k(y, \varepsilon, h) = a_{ij}^k(y) \qquad (L1)$$

для деякого $\gamma > 2$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} c(y, \varepsilon, h) = \lim_{h \to 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} c(y, \varepsilon, h) = c(y) \qquad (L2)$$

та

$$\lim_{h \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\varepsilon(\Omega_{\varepsilon k} \cap K_h(y))}{h^d} = b^k(y), \quad k = 0, 1 \qquad (L3)$$

Припущено, що граничні функції — неперевні, то коефіцієнти $a_{ij}^k(x)$ задовольняють умовам рівномірної еліптичності.

Тоді 1) якщо $b_1(x) > b > 0$, то функції $u_\varepsilon(t, x)$ збігаються до $u^k(t, x)$ в $L_2(\Omega_{\varepsilon k}, Q)$ рівномірно по $t \in \varepsilon^2 \mathbf{Z}_+ \bigcap [0, T]$. Функції $u^i(x, t)$ є розв'язок задачі:

$$b^0(x) \frac{\partial u^0(t, x)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}^0(x) \frac{\partial u^0(t, x)}{\partial x_j}) + c(x)(u^1(t, x) - u^0(t, x))$$

$$b^1(x) \frac{\partial u^1(t, x)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}^1(x) \frac{\partial u^1(t, x)}{\partial x_j}) +$$

$$+ c(x)(u^0(t, x) - u^1(t, x)), \ x \in Q, \ t > 0$$

$$b^k(x) u^k(0, x) = b^k(x) u^k(x), \qquad x \in Q;$$

$$\frac{\partial u^i(t, x)}{\partial \nu^i} = 0, \qquad x \in \partial Q, \ t > 0$$

для кожного T.

2) Зворотньо, якщо $b_1(x) = 0$, то функції $u_\varepsilon(t, x)$ збігаються до функції $u(t, x)$ в $L_2(\Omega_\varepsilon, Q)$ рівномірно по t, де $u(t, x)$ є розв'язок задачі:

$$b^0(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}^0(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j}) - \int_Q R(x, y)(u(t, y) - u(t, x)) dy = 0$$

$$u(0, x) = u^0(x), \qquad x \in Q;$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \nu^0} = 0, \qquad x \in \partial Q, \ t > 0,$$

де $R(x, y) = c(x)G(x, y)c(y)$, *а функція* $G(x, y)$ *є функцією Гріна:*

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^1_{ij}(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial x_j}) + c(x)G(x,y) = \delta(x-y), \qquad x \in Q$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu^1_x} = 0, x \in \partial Q,$$

Доведення теореми 3.1 наведено у §§3.2 – –3.4. Приклади різноманітних реалізацій слабких зв'язків розглянуто в §3.5. Деякі використання цих результатів наведено у §3.6. Таким чином, усереднена модель на сітках з слабкими зв'язками є або векторна, або нелокальна.

Висновки

В дисертації продовжені досдідження, пов'язані з теорією усереднення різницевих рівнянь. Досліджено асимптотичне поводження різницевих рівнянь, коефіцієнти яких *не зодовольняють умовам "рівномірної еліптичності та обмеженості"*. Одержані такі результати:

1. Введені поняття РС та КРС сіток та вивчено питання збіжності і компактності послідовності функцій, що визначені на таких ситках до функції визначеної у області неперервного змінення аргументу.

2. Досліджено асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь на гратах, що задовольняють умові РС.

3. Досліджено асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь на гратах з накопичувачами.

4. Досліджено асимптотичне поводження розв'язків різницевих рівнянь на гратах з слабкими зв'язками.

5. Досліджено асимптотичне поводження випадкових блукань та потенціалу лінійних сіток на гратах, що задовольняють умові РС, на гратах з накопичувачами та гратах з слабкими зв'язками.

Публікації, надруковані за темою дисертації

1) Краснянский М.Б. Усреднение случайного блуждания на решетках с запретами.// Доповіді АН України, 1994. N 8, С.36-39.

2) Краснянский М.Б. Усреднение случайного блуждания на решетках с ловушками.// Доповіді АН України, 1994. N 9, С.15-19.

3) Краснянский М.Б. Усреднение случайного блуждания на решетках со слабыми связями.// Математическая физика, анализ,геометрия. 1995. т.2, N 1, С.51-67.

4) Краснянский М.Б. Усреднение случайного блуждания на решетках со слабыми связями.// Доповіді АН України, 1995. N 8, С.8-10.

5) Krasniansky M. Vector homogenized model for micrononhomogeneous finite-difference equations.// EurHomogenization. Abstracts. P.20.

Abstarct

Krasniansky M.B. Homogenization of finite–difference equations. Manuscript. The defence of the thesis of scientist degree of candidate of physics and mathematics sciences on speciality 01.01.02 – differential equations. The Kharkov State University. Kharkov. 1995.

The problem of homogenization of finite–difference equation is considered. The homogenized models for these equations are constructed. It is proved that they can be scalar, vector, nonlocal models or the model with memory. The examples in periodic case are considered. In periodic case the coefficients of homogenized equation are expressed either by the solution of certain cell problem or explicitly. The results of homogenization are applied to calculation of effective conductivity for linear networks and asymptotic behavior of random walks on lattices.

Аннотация

Краснянский М.Б. Усреднение разностных уравнений. Рукопись. Дисертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Харьковский Государственный Университет. Харьков. 1995.

Рассмотрена задача усреднения для разностных уравнений. Построены усредненные модели для разностных уравнений. Доказано, что усредненная модель может быть скалярной, векторной, нелокальной или моделью с памятью. Рассмотрены примеры для периодических ситуаций. Рассмотрены приложения полученных результатов к исследованию асимптотического поведения случайных блужданий на решетках и вычислению эффективной проводимости линейных сетей.

Ключові слова: різницеві рівняння, рівняння у частинних похідних, усереднення, асимптотика, варіаційні методи, випадкові блукання.

Відповідольний за випуск І.О.Андерс

Підписано до друку 11.11.1996 г. Фіз. друк. арк. 1

Обл.–друк. арк. 1 Замовлення N 23–96. Тираж 100 пр.

Надруковано у ФТІНТ НАН Україны, Харьків-164, пр. Леніна, 47.