Чернівецький державний університет
ім. Ю.Федьковича

На правах рукопису

Міхалевська Галина Іванівна

ЗАПРОВАДЖЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ (ФУР'Є, КАНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) НА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОМІЖКАХ

Спеціальність: 01.01.03 - математична фізика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Чернівці 1996

5151 Ав 36.238

Дисертацією є рукопис.

Роботу виконано на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук,
професор Ленюк Михайло Павлович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Гончаренко Валентин Михайлович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Конет Іван Михайлович

Провідна установа - Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я.С.Підстригача (м.Львів)

Захист відбудеться "27" грудня 1996 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 в Чернівецькому державному університеті ім.Ю.Федьковича за адресою: 274012, м.Чернівці, вул. Університетська, 28, математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича за адресою: 274012, м.Чернівці, вул. Л.Українки,23.

Автореферат розіслано "22" листопада 1996 року

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради А.М.Садов'як

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сучасний етап розвитку та вдосконалення виробництва пов'язаний з широким використанням композитних матеріалів в різного роду технологічних процесах, будівництві, радіотехніці та радіоелектроніці, зварювальному виробництві, атомній енергетиці та космічній техніці. При розрахунках на міцність та надійність конструкційних елементів машин та механізмів, нагріваючих пристроїв, будівель та споруд, а також серед багаточисленних технічних задач, що виникають при конструюванні машин та проектуванні інженерних споруд, виникає необхідність у вивченні температурних полів та викликаних ними пружних напружень в кусково-однорідних тілах, складених з декількох матеріалів, що мають різні фізико-механічні характеристики, в дослідженні напруженого стану та міцності елементів, працюючих на кручення, а також у вивченні коливального процесу під впливом масових сил. Виникає нагальна потреба математичного апарату для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з розривними (кусково-сталими) коефіцієнтами. При цьому повинна бути вказана логічна схема побудови точного аналітичного розв'язку в замкненій формі, зручній в інженерних розрахунках (за допомогою ПЕОМ).

Одним із ефективних методів розв'язання задач математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Класичні інтегральні перетворення Фур'є, Лапласа, Фур'є-Бесселя, Вебера, Ганкеля, Мелліна, Лежандра, Гільберта, Мелера-Фока, Канторовича-Лєбєдєва та ін. склали математичний апарат інтегральних перетворень, який вже давно став надійним інструментом в наукових дослідженнях та інженерних розрахунках суцільних середовищ. Для розв'язання задач математичної фізики неоднорідних (кусково-однорідних) середовищ інтегральні перетворення (так звані гібридні) знаходяться в стадії запровадження (розбудови).

Проблемі побудови відсутніх в математичній літературі інтегральних перетворень типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0,R)$, на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0,R)$ з однією й двома точками спряження, а також запровадженню інтегральних перетворень (Фур'є, Канторовича-Лєбєдєва) на двоскладових та трискладових інтервалах і присвячена дана дисертаційна робота.

Мета роботи. Метою роботи є:

а) побудова та математичне обгрунтування інтегральних перетворень типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$, на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$ з однією й двома точками спряження;

б) запровадження інтегральних перетворень (Фур'є, Канторовича-Лєбєдєва) на двоскладових та трискладових інтервалах при найбільш загальних припущеннях на структури операторів Фур'є, Бесселя та операторів спряження;

в) застосування одержаних гібридних інтегральних перетворень за розробленою логічною схемою до розв'язання задач математичної фізики неоднорідних структур на прикладах задач про структуру стаціонарних температурних полів в суцільних необмежених клиновидних циліндрично-кругових тілах, про осесиметричні коливання кусково-однорідних напівобмежених ортотропних циліндричних тіл, про коливання кусково-однорідної струни,а також задачі обчислення поліпараметричних невласних інтегралів.

Методика дослідження. Основним методом побудови гібридних інтегральних перетворень служить метод дельтаподібних послідовностей, в якості яких виступає ядро Коші. При цьому в процесі дослідження було використано елементи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, теорію розвинення за власними функціями самоспряжених операторів, операційний метод, основні положення теорії узагальнених функцій та теорію функцій комплексної змінної.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в наступному:

- запроваджено методом дельтаподібних послідовностей, в якості яких служить ядро Коші, інтегральні перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$,на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$ з однією й двома точками спряження;

- побудовано гібридні інтегральні перетворення Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва на декартовій осі та обмеженій справа декартовій півосі, Канторовича-Лєбєдєва - Фур'є на полярній осі $r \geq R_1 > 0$ та двоскладовому декартовому сегменті, Фур'є - Канторовича-Лєбєдева - Канторовича-Лєбєдева на декартовій осі та обмеженій справа декартовій півосі, Канторовича-Лєбєдева - Канторовича-Лєбєдева - Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$;

- доведено теореми про наявність основної тотожності інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора, яка дозволяє застосувати запроваджені гібридні інтегральні перетворення до розв'язання відповідних сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур;

- сформульовано та доведено теореми про інтегральне зображення кусково-неперервних, абсолютно сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації через ядра гібридних інтегральних перетворень;

- за розробленою логічною схемою запроваджені гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Канторовича-Лєбєдева) застосовано для обчислення поліпараметричних невласних інтегралів та розв'язання задач математичної фізики неоднорідних структур:

а) задачі про структуру стаціонарних температурних полів в суцільних необмежених клиновидних циліндрично-кругових тілах;

б) задачі про осесиметричні коливання кусково-однорідних напівобмежених ортотропних тіл;

в) задачі про структуру хвиль, що виникають при коливанні кусково-однорідної струни в результаті дії на кожній ділянці струни збурених сил.

<u>**На захист виносяться такі положення:**</u>

1. Побудова методом дельтаподібних послідовностей, в ролі яких служить ядро Коші,інтегральних перетворень типу Канторовича-Лєбєдева на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$, на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$ з однією й двома точками спряження.

2. Побудова методом дельтаподібних послідовностей, в ролі яких служить ядро Коші, гібридних інтегральних перетворень Фур'є - Канторовича-Лєбєдева на декартовій осі та обмеженій справа декартовій півосі з однією точкою спряження, Канторовича-Лєбєдева - Фур'є на полярній осі $r \geq R_1 > 0$ з однією точкою спряження та двоскладовому декартовому сегменті, Фур'є - Канторовича-Лєбєдева -

Канторовича-Лебедева на декартовій осі та обмеженій справа декартовій півосі з двома точками спряження, Канторовича-Лебедева - Канторовича-Лебедева - Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження.

3. Теореми про інтегральні зображення кусково-неперервних, абсолютно сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації.

4. Теореми про наявність основної тотожності інтегрального перетворення гібридних диференціальних операторів.

5. Логічна схема застосування запроваджених інтегральних перетворень для розв'язування відповідних сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур:

а) задача про структуру стаціонарних температурних полів в суцільних необмежених клиновидних циліндрично-кругових тілах;

б) задача про осесиметричні коливання кусково-однорідних напівобмежених ортотропних циліндричних тіл;

в) задача про коливання кусково-однорідної струни.

6. Обчислення поліпараметричної сім'ї невласних інтегралів, підінтегральна функція яких виражена через гіперболічні функції та функції Бесселя, методом гібридного інтегрального перетворення типу Канторовича-Лебедева на полярній осі з двома точками спряження.

<u>**Теоретична і практична цінність.**</u> Результати роботи вносять вклад у загальну теорію інтегральних перетворень; служать джерелом нових досліджень: побудови інтегральних перетворень типу Канторовича-Лебедева на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0,R)$ з n точками спряження; запровадження гібридних інтегральних перетворень (Канторовича-Лебедева, Лежандра), (Канторовича-Лебедева, Бесселя) на двоскладових та трискладових інтервалах та ін. Одержані в дисертації гібридні інтегральні перетворення поряд із задачами теплопровідності та кручення циліндричних та клиновидних циліндрично-кругових об'єктів можуть бути застосовані для розв'язання аналогічних задач теорії пружності, гідромеханіки, електростатики і т.д. Зокрема, вони можуть бути використані в технічних додатках для розрахунку циліндричних стержнів на міцність при їх крученні та

вплив степеня неоднорідності на напружений стан при конструюванні основних блоків машин, технологічних установок та будівельних конструкцій.

Апробація работи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались:

- на наукових семінарах кафедр вищої математики і прикладної механіки Технологічного університету Поділля (м.Хмельницький) (1991-1995рр.);

- на науковому семінарі з теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича (1992-1995рр.);

- на науково-практичній конференції "Наукові основи сучасних прогресивних технологій" (м.Хмельницький, ТУП, 1994р.);

- на науково-практичній конференції "Технологічний університет в системі реформування освітньої і наукової діяльності Подільського регіону" (м.Хмельницький, ТУП, 1995р.);

- на науковому семінарі кафедри математичної фізики Київського університету (1996р.);

- на міжвузівському об'єднаному семінарі "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Київ, 1996р.);

- на науковому семінарі "Сучасні проблеми математики" (Чернівці, 1996р.).

Публікації.По матеріалах дисертації опубліковано 12 робіт. З них сумісно з науковим керівником 3. Науковому керівникові належить постановка задач та обговорення одержаних результатів.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновку і списку цитованої літератури. Повний обсяг складає 152 сторінки машинопису. Бібліографічний список містить 85 назв.

Зміст та основні результати роботи.

У вступі до дисертації обгрунтовано актуальність теми, зроблено короткий огляд літератури за тематикою дисертації, викладено основні результати по розділах.

У першому розділі методом дельтаподібних послідовностей, в ролі яких виступає ядро Коші, побудовано інтегральні перетворення типу Канторовича-Лебєдєва на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0, R)$, на полярній осі та сегменті $(0, R)$ з однією й двома точками спряження.

В усіх випадках умови спряження в точках стикування інтервалів мають вигляд:

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)v_k-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)v_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\ j,k=1,2, \qquad (1)$$

$$(\ \alpha_{ji}^{k}\geq 0,\ \beta_{ji}^{k}\geq 0,\ \alpha_{2i}^{k}\beta_{1i}^{k}-\alpha_{1i}^{k}\beta_{2i}^{k}=C_{ik}\neq 0,\ C_{1i}C_{2i}>0\ ).$$

Кожне інтегральне перетворення породжується інтегральним зображенням міри Дірака. Останнє можна одержати як границю в розумінні теорії узагальнених функцій дельтаподібних послідовностей. За дельтаподібну послідовність служить фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для відповідної сепаратної системи рівнянь теплопровідності B-параболічного типу другого порядку, породженої даним гібридним диференціальним оператором.

У кожному параграфі сформульовано теореми про інтегральне зображення кусково-неперервних, абсолютно сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації через ядра побудованих гібридних інтегральних перетворень та теореми про основну тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора (з метою застосування побудованих інтегральних перетворень для розв'язання відповідних задач математичної фізики неоднорідних середовищ).

Оскільки зміст параграфів першого та четвертого ідентичний, то наведемо основні результати першого параграфу. В §1.1 здійснено узагальнення класичного інтегрального перетворення Канторовича-Лебєдєва, породженого диференціальним оператором Бесселя $B_0 = r^2\frac{d^2}{dr^2}+r\frac{d}{dr}-\lambda^2 r^2$ на випадок полярної осі з одночасним

розширенням B_0 до $B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{d}{dr}-\lambda^2 r^2+\alpha^2,\ \ 2\alpha+1\geq 0$.

Пряме H_α й обернене H_α^{-1} інтегральні перетворення типу Канторовича-Лебєдєва на інтервалі $(0, \infty)$ мають структуру:

$$H_\alpha\left[f(r)\right]=\int_0^\infty f(r)K_{i\tau,\alpha}(\lambda r)r^{2\alpha-1}dr\equiv\tilde f(\tau), \tag{2}$$

$$H_\alpha^{-1}\left[\tilde f(\tau)\right]=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty \tilde f(\tau)\lambda^{2\alpha}\mathrm{sh}\pi\tau\, K_{i\tau,\alpha}(\lambda r)\tau d\tau\equiv f(r), \tag{3}$$

де $K_{i\tau,\alpha}(\lambda r)=(\lambda r)^{-\alpha}K_{i\tau}(\lambda r)$, $K_{i\tau}(\lambda r)$ -модифікована функція Беселя 2-го роду.

Визначимо функції: $\Omega_\alpha(\tau)=\tau\lambda^{2\alpha}\mathrm{sh}\pi\tau$; $V_\alpha=K_{i\tau,\alpha}(\lambda r)$.

Теорема 1.1.1. Якщо функція $g(r)=r^{\alpha-1/2}f(r)$ кусково-неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на $(0,\infty)$, то для $r\in(0,\infty)$ справедливе інтегральне зображення:

$$\frac{1}{2}\left[f(r+0)+f(r-0)\right]=\frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty V_\alpha(r,\lambda,\tau)\Omega_\alpha(\tau)\left(\int_0^\infty f(\rho)V_\alpha(\rho,\lambda,\tau)\rho^{2\alpha-1}d\rho\right)d\tau. \tag{4}$$

Теорема 1.1.2. Якщо функція $f(r)$ така, що $B_\alpha\left[f(r)\right]\in C_{(0;\infty)}$,

$$\lim_{r\to0}r^{2\alpha+1}\left(\frac{df}{dr}V_\alpha-f\frac{dV_\alpha}{dr}\right)=0,\quad \lim_{r\to\infty}r^{2\alpha+1}\left(\frac{df}{dr}V_\alpha-f\frac{dV_\alpha}{dr}\right)=0, \tag{5}$$

то справедлива основна тотожність інтегрального перетворення диференціального оператора B_α:

$$H_\alpha\left[B_\alpha\left[f(r)\right]\right]\equiv-\tau^2\tilde f(\tau). \tag{6}$$

Тотожність (6) одержується інтегруванням частинами під знаком інтегралу з використанням властивостей функцій $f(r)$, $V_\alpha(r,\tau)$ та рівностей (5).

Оскільки логічна схема побудови гібридних інтегральних перетворень типу Канторовича-Лебєдева на полярній осі $r\ge0$ та сегменті $(0,R)$ з однією й двома точками спряження (§1.2-§1.6) однакова, то коротко опишемо зміст §1.2.

Розглянемо гібридний диференціальний оператор $M_{(\alpha)}=a_1^2\theta(r)\theta(R_1-r)B_{\alpha_1}+a_2^2\theta(r-R_1)B_{\alpha_2}$, $(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$. Він породжує сепаратну систему рівнянь теплопровідності другого порядку

$$\left(\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\gamma_1^2}{a_1^2}-B_{\alpha_1}\right)v_1(t,r)=0,\ t>0,\ r\in(0,R_1),$$

$$\left(\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\gamma_2^2}{a_2^2}-B_{\alpha_2}\right)v_2(t,r)=0,\quad t>0,\quad r\in(R_1,\infty). \qquad (7)$$

Обмежений в області $D_1^+=\{(t,r):\ t>0,\ r\in I_1^+=(0,R_1)\cup(R_1,\infty)\}$ розв'язок системи (7) за початковими умовами

$$v_1(t,r)\Big|_{t=0}=g_1(r),\ r\in(0,R_1);\ v_2(t,r)\Big|_{t=0}=g_2(r),\ r\in(R_1,\infty) \qquad (8)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^1\right)v_1(t,r)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^1\right)v_2(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_1}=0,\ j=1,2. \qquad (9)$$

будується методом інтегрального перетворення Лапласа по часовій змінній t і має структуру

$$v_j(t,r)=\int_0^{R_1}H_{(\alpha);j1}(t,r,\rho)\overline{g}_1(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\int_{R_1}^{\infty}H_{(\alpha);j2}(t,r,\rho)\overline{g}_2(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho. \qquad (10)$$

Визначимо величини та функції:

$$\sigma_1=a_1^{-2},\quad \sigma_2=a_2^{-2}\frac{C_{21}}{C_{11}}R_1^{2(\alpha_1-\alpha_2)};$$

$$\Omega_{(\alpha)}(\tau)=\frac{2\tau\lambda_1^{2\alpha_1}}{\operatorname{sh}\overline{b}_1\pi}\left(\left[w_{(\alpha);1}(\tau)\right]^2+\left[w_{(\alpha);2}(\tau)\right]^2\right)^{-1}; \qquad (11)$$

$$\sigma(r)=\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}\theta(r)\theta(R_1-r)+\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}\theta(r-R_1);$$

$$V_{(\alpha)}(r,\tau)=V_{(\alpha);1}(r,\tau)\theta(r)\theta(R_1-r)+V_{(\alpha);2}(r,\tau)\theta(r-R_1).$$

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\tau)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної густини $\Omega_{(\alpha)}(\tau)$ дає можливість написати на множині I_1^+ інтегральне зображення міри Дірака

$$\frac{\delta(r-\rho)}{\sigma(\rho)}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}V_{(\alpha)}(r,\tau)V_{(\alpha)}(\rho,\tau)\Omega_{(\alpha)}(\tau)d\tau, \qquad (12)$$

яке породжує пряме $H_{(\alpha),1}$ й обернене $H_{(\alpha),1}^{-1}$ інтегральні перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r\geq 0$ з однією точкою спряження:

$$H_{(\alpha),1}[f(r)]=\int_0^{\infty}f(r)V_{(\alpha)}(r,\tau)\sigma(r)dr\equiv\tilde{f}(\tau), \qquad (13)$$

$$H_{(\alpha),1}^{-1}\left[\tilde{f}(\tau)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\,V_{(\alpha)}(r,\tau)\,\Omega_{(\alpha)}(\tau)d\tau\equiv f(r). \qquad (14)$$

Звідси внаслідок властивості дельтаподібної послідовності одержуємо твердження.

Теорема 1.2.1. Нехай функція $g(r)=f(r)\left[r^{\alpha_1-1/2}\theta(r)\theta(R_1-r)+\right.$ $\left.+r^{\alpha_2-1/2}\theta(r-R_1)\right]$ визначена, кусково-неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на $(0,\infty)$. Тоді для $r\in I_1^+$ справедливе інтегральне зображення:

$$\frac{1}{2}\left[f(r+0)+f(r-0)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha)}(r,\tau)\Omega_{(\alpha)}(\tau)\left(\int_0^\infty V(\rho,\tau)\sigma(\rho)f(\rho)d\rho\right)d\tau. \quad (15)$$

Означення. Функція $f(r)\in B_{(\alpha)}\left[I_1^+\right]$, якщо:

1) $M_{(\alpha)}\left[f(r)\right]\in C\left(I_1^+\right)$; 2) $f(r)$ задовольняє умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^1\right)f(r)-\left(\alpha_{j2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^1\right)f(r)\right]\Bigg|_{r=R_1}=0,\ \ j=1,2. \qquad (16)$$

Теорема 1.2.2. Якщо функція $f(r)\in B_{(\alpha)}\left[I_1^+\right]$ і задовольняє умови обмеженості

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{df}{dr}V_{(\alpha);1}(r,\tau)-f\frac{dV_{(\alpha);1}}{dr}\right)=0,\ \ \lim_{r\to\infty} r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{df}{dr}V_{(\alpha);2}(r,\tau)-f\frac{dV_{(\alpha);2}}{dr}\right)=0, \qquad (17)$$

то справедлива основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора $M_{(\alpha)}$:

$$H_{(\alpha),1}\left[M_{(\alpha)}\left[f(r)\right]\right]=-\tau^2\tilde{f}(\tau)-k_1^2\int_0^{R_1} f(r)\,V_{(\alpha);1}(r,\tau)\,\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr-$$

$$-k_2^2\int_{R_1}^\infty f(r)\,V_{(\alpha);2}(r,\tau)\,\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr. \qquad (18)$$

Доведення. Якщо визначити величини:

$\overset{-}{f}(R_1)=\lim\limits_{r\to R_1-0} f(r)$; $\overset{+}{f}(R_1)=\lim\limits_{r\to R_1+0} f(r)$; $a_{11}^1=\alpha_{11}^1\alpha_{22}^1-\alpha_{21}^1\alpha_{12}^1$;

$a_{12}^1=\alpha_{11}^1\beta_{22}^1-\alpha_{21}^1\beta_{12}^1$; $a_{21}^1=\beta_{11}^1\alpha_{22}^1-\beta_{21}^1\alpha_{12}^1$; $a_{22}^1=\beta_{11}^1\beta_{22}^1-\beta_{21}^1\beta_{12}^1$,

то з умов спряження (16) знаходимо співвідношення

$$\frac{d\bar{f}(R_1)}{dr}V_{(\alpha);1}(R_1,\tau)-\bar{f}(R_1)\frac{dV_{(\alpha);1}(R_1,\tau)}{dr}=$$

$$=\frac{C_{21}}{C_{11}}\left[\frac{d\overset{+}{f}(R_1)}{dr}V_{(\alpha);2}(R_1,\tau)-\overset{+}{f}(R_1)\frac{dV_{(\alpha);2}(R_1,\tau)}{dr}\right]. \qquad (19)$$

Інтегруючи в лівій частині рівності (18) частинами, одержуємо:

$$H_{(\alpha),1}\left[M_{(\alpha)}[f(r)]\right]=a_1^2\int_0^{R_1}B_{\alpha_1}[f(r)]V_{(\alpha);1}(r,\tau)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+a_2^2\int_{R_1}^{\infty}B_{\alpha_2}[f(r)]V_{(\alpha);2}(r,\tau)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr=$$

$$=a_1^2\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\left[\frac{df(r)}{dr}V_{(\alpha);1}(r,\tau)-f(r)\frac{dV_{(\alpha);1}(r,\tau)}{dr}\right]\Bigg|_0^{R_1}-$$

$$-\left(\tau^2+k_1^2\right)\int_0^{R_1}f(r)V_{(\alpha);1}(r,\tau)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+a_2^2\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}\left[\frac{df(r)}{dr}V_{(\alpha);2}(r,\tau)-f(r)\frac{dV_{(\alpha);2}(r,\tau)}{dr}\right]\Bigg|_{R_1}^{\infty}-$$

$$-\left(\tau^2+k_2^2\right)\int_{R_1}^{\infty}f(r)V_{(\alpha);2}(r,\tau)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr.$$

В силу структури σ_j $(j=1,2)$ і рівності (19) маємо, що

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\left[\frac{d\bar{f}}{dr}V_{(\alpha);1}(R_1,\tau)-\bar{f}\frac{dV_{(\alpha);1}(R_1,\tau)}{dr}\right]-$$

$$-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\left[\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_{(\alpha);2}(R_1,\tau)-\overset{+}{f}\frac{dV_{(\alpha);2}(R_1,\tau)}{dr}\right]=$$

$$=\left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{C_{21}}{C_{11}}-a_2^2\sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1}\right)\left[\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_{(\alpha);2}(R_1,\tau)-\overset{+}{f}\frac{dV_{(\alpha);2}(R_1,\tau)}{dr}\right]=$$

$$=\left(R_1^{2\alpha_1+1}\frac{C_{21}}{C_{11}}-\frac{C_{21}}{C_{11}}\frac{R_1^{2\alpha_1}}{R_1^{2\alpha_2}}R_1^{2\alpha_2+1} \right)\left[\frac{d\overset{+}{f}}{dr}V_{(\alpha);2}(R_1,\tau)-\overset{+}{f}\frac{dV_{(\alpha);2}(R_1,\tau)}{dr}\right]=0.$$

Позаінтегральні члени в точках $r=0$ та $r=\infty$ зникають в силу умов (17). Розділяючи суму $\left(\tau^2+k_j^2\right)$ на два доданки, приходимо до рівності (18).

Зауважимо, що запропонована методика дозволяє отримати гібридні інтегральні перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0,R)$ з будь-яким числом точок спряження.

Другий розділ присвячено побудові методом дельтаподібних послідовностей, в ролі яких виступає ядро Коші, гібридних інтегральних перетворень Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва на інтервалах

$$I_{11}=(-\infty,R_1)\cup(R_1,\infty) \text{ та } I_{21}=(-\infty,R_1)\cup(R_1,R_2)$$

і Канторовича-Лєбєдєва - Фур'є на інтервалах

$$I_{31}=(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty) \text{ та } I_{41}=(0,R_1)\cup(R_1,R_2).$$

Тут також в кожному параграфі сформульовані і доведені теореми про інтегральне зображення кусково-неперервних, абсолютно сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації і про наявність основної тотожності інтегрального перетворення диференціального оператора. Внаслідок ідентичності логічної схеми побудови вище перелічених гібридних інтегральних перетворень наведемо результати § 2.4.

<u>Теорема 2.4.1.</u> Якщо функція $g(r)=f(r)\left[\, r^{\alpha-1/2}\theta(r)\theta(R_1-r)+\right.$ $\left.+1\cdot\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\,\right]$ визначена, кусково-неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на $(0,R_2)$, то для $r\in I_{41}$ справджується інтегральне зображення

$$\frac{1}{2}\left[f(r+0)+f(r-0)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_\alpha(r,\tau)\Omega_\alpha(\tau)\left(\int_0^{R_2}V_\alpha(\rho,\tau)\sigma(\rho)f(\rho)d\rho\right)d\tau. \quad (20)$$

Доведення теореми проводиться методом дельтаподібної послідовності, в якості якої прийнято ядро Коші.

<u>Теорема 2.4.2.</u> Якщо функція $f(r)$ двічі неперервно-диференційовна

на множині I_{41}, задовольняє умови спряження (16) та крайові умови

$$\lim_{r\to+0}\left[\ r^{2\alpha+1}\left(\frac{d f(r)}{d r}V_{\alpha;1}(r,\tau)-f(r)\frac{dV_{\alpha;1}(r,\tau)}{d r}\right)\ \right]=0,$$

$$\left.\left(\alpha_{11}^2\frac{d}{d r}+\beta_{11}^2\right)f(r)\right|_{r=R_2}=f_2, \qquad (21)$$

то для гібридного диференціального оператора

$$M_\alpha=a_1^2\theta(r)\theta(R_1-r)B_\alpha+a_2^2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\frac{d^2}{d r^2}$$

справджується основна тотожність інтегрального перетворення:

$$H_{\alpha;1}\left[M_\alpha\left[f(r)\right]\right]=a_1^2\int_0^{R_1}B_\alpha[f(r)]\,V_{\alpha;1}(r,\tau)\,\sigma_1 r^{2\alpha-1}d\,r+$$

$$+a_2^2\int_{R_1}^{R_2}\frac{d^2}{dr^2}[f(r)]\,V_{\alpha;2}(r,\tau)\,\sigma_2 d\,r=-\tau^2\tilde{f}(\tau)+a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha+1}\left(\alpha_{11}^2\right)^{-1}V_{\alpha,2}(R_2,\tau)f_2-$$

$$-\,k_1^2\int_0^{R_1}f(r)V_{\alpha;1}(r,\tau)\sigma_1r^{2\alpha-1}d\,r-k_2^2\int_{R_1}^{R_2}f(r)V_{\alpha;2}(r,\tau)\sigma_2 d\,r. \qquad (22)$$

Тотожність (22) одержується інтегруванням частинами з використанням властивостей функцій $f(r)$, $V_{\alpha,1}(r,\tau)$, $V_{\alpha,2}(r,\tau)$ й структури величин σ_1, σ_2.

Запровадження гібридних інтегральних перетворень типу (Фур'є, Канторовича-Лєбєдєва) на трискладових інтервалах здійснено в третьому розділі. Тут побудовано інтегральні перетворення Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва - Канторовича-Лєбєдєва на інтервалі

$$I_{12}=(-\infty,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty);$$

Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва - Канторовича-Лєбєдєва на інтервалі $I_{22}=(-\infty,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,R_3)$ та Канторовича-Лєбєдєва - Канторовича-Лєбєдєва - Фур'є на інтервалі

$$I_{32}=(R_0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty);\quad 0<R_0<R_1<R_2<R_3<\infty.$$

При цьому одержано теореми про інтегральне зображення кусково-неперервних, абсолютно-сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації, сформульовано й доведено теореми про наявність основної тотожності інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора.

Для прикладу наведемо теореми з §3.2.

<u>Теорема 3.2.1.</u> Якщо функція $g(r)=f(r)\Big[\theta(R_1-r)+$

$+r^{\alpha_2-\frac{1}{2}}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+r^{\alpha_3-\frac{1}{2}}\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\Big]f(r)$ визначена, кусково-неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на $(-\infty,R_3)$, то для $r\in I_{22}$ справджується інтегральне зображення

$$\frac{1}{2}\big[f(r+0)+f(r-0)\big]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha)}(r,\tau)\Omega_{(\alpha)}(\tau)\left(\int_{-\infty}^{R_3}V_{(\alpha)}(\rho,\tau)\sigma(\rho)f(\rho)d\rho\right)d\tau.$$

<u>Теорема 3.2.2.</u> Якщо функція $f(r)$ двічі неперервно-диференційовна на множині I_{22}, задовольняє умови спряження (1) та крайові умови $\left.\dfrac{d^m f}{d r^m}\right|_{r=-\infty}=0,\quad m=0,1\ ;\ \left.\left(\alpha_{11}^3\dfrac{d}{dr}+\beta_{11}^3\right)f(r)\right|_{r=R_3}=f_3,$ то справджується основна тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора

$$M_{(\alpha)}=a_1^2\,\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2}+a_2^2\,\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\alpha_2}+a_3^2\,\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)B_{\alpha_3}:$$

$$H_{(\alpha);2}\big[M_{(\alpha)}[f(r)]\big]=a_1^2\int_{-\infty}^{R_1}\frac{d^2}{dr^2}[f(r)]\,V_{(\alpha);1}(r,\tau)\,\sigma_1 d\,r\,+$$

$$+\ a_2^2\int_{R_1}^{R_2}B_{\alpha_2}\,[f(r)]V_{(\alpha);2}(r,\tau)\,\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\,r\ +\ a_3^2\int_{R_2}^{R_3}B_{\alpha_3}\,[f(r)]\,V_{(\alpha);3}(r,\tau)\,\sigma_3\rho^{2\alpha_3-1}d\,r=$$

$$=-\tau^2\tilde{f}(\tau)+a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_3+1}\left(\alpha_{11}^3\right)^{-1}V_{(\alpha),3}(R_3,\tau)f_3-$$

$$-k_1^2\int_{-\infty}^{R_1}f(r)V_{(\alpha);1}(r,\tau)\sigma_1 d\,r-k_2^2\int_{R_1}^{R_2}f(r)V_{(\alpha);2}(r,\tau)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\,r-$$

$$-k_3^2\int_{R_2}^{R_3}f(r)V_{(\alpha);3}(r,\tau)\sigma_3\rho^{2\alpha_3-1}d\,r,\quad (\alpha)=(\alpha_2,\alpha_3).$$

Доведення теореми одержується методом інтегрування частинами з врахуванням властивостей функцій $f(r),V_{(\alpha);1}(r,\tau),V_{(\alpha);2}(r,\tau),$

$V_{(\alpha);3}(r,\tau)$ та структури множників σ_1, σ_2, σ_3.

У четвертому розділі розглянуто типові задачі математичного аналізу та математичної фізики неоднорідних середовищ, точний розв'язок яких може бути побудований методом запроваджених інтегральних перетворень:

- задача обчислення значень поліпараметричної сім'ї невласних інтегралів (§4.1, метод гібридного інтегрального перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq 0$ з двома точками спряження;

- задача про структуру стаціонарних температурних полів в суцільних необмежених клиновидних циліндрично-кругових тілах (§4.2, метод інтегрального перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на інтервалі $(0,R)$);

- задача про осесиметричні коливання кусково-однорідних напівобмежених, ортотропних циліндричних тіл (§4.3, метод гібридного інтегрального перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на інтервалі $(0,R_2)$ з однією точкою спряження);

- задача про коливання кусково-однорідної струни (§4.4, метод гібридного інтегрального перетворення Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва - Канторовича-Лєбєдєва на обмеженій справа декартовій півосі). Проведено чисельний аналіз по розрахункових формулах.

У висновках наведено основні результати дисертаційної роботи.

Основні результати та висновки роботи.

1. Методом дельтаподібних послідовностей, в ролі яких виступає ядро Коші, запроваджено інтегральні перетворення типу Канторовича-Лєбєдєва на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0,R)$, на полярній осі $r \geq 0$ та сегменті $(0,R)$ з однією й двома точками спряження.

2. Методом дельтаподібних послідовностей, в ролі яких виступає ядро Коші, побудовано гібридні інтегральні перетворення Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва на декартовій осі та обмеженій справа декартовій півосі з однією точкою спряження, Канторови-

ча-Лебедева - Фур'є на полярній осі $r \geq R_1 > 0$ з однією точкою спряження та двоскладовому декартовому сегменті, Фур'є - Канторовича-Лебедева - Канторовича-Лебедева на декартовій осі та обмеженій справа декартовій півосі з двома точками спряження, Канторовича-Лебедева - Канторовича-Лебедева - Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження.

3. Одержано теореми про інтегральні зображення кусково-неперервних, абсолютно сумовних (з точно визначеною ваговою функцією) функцій обмеженої варіації через ядра запроваджених гібридних інтегральних перетворень.

4. Одержано теореми про наявність основної тотожності інтегрального перетворення гібридних диференціальних операторів, що дозволяє застосовувати запроваджені інтегральні перетворення для побудови в замкненій формі алгоритмічного характеру точних аналітичних розв'язків відповідних сингулярних задач математичної фізики неоднорідних структур.

5. Різновидність застосування запроваджених інтегральних перетворень (Фур'є, Канторовича-Лебедева) показано на типовій задачі математичного аналізу (обчислення поліпараметричних невласних інтегралів) та типових задачах математичної фізики неоднорідних середовищ:

а) задачі про структуру стаціонарних температурних полів в суцільних необмежених клиновидних циліндрично-кругових тілах;

б) задачі про осесиметричні коливання кусково-однорідних напівобмежених ортотропних циліндричних тіл;

в) задачі про структуру хвиль, що виникають при коливанні кусково-однорідної струни в результаті дії на кожній ділянці струни збурених сил.

Роботи автора за темою дисертації.

1. Міхалевська Г.І. Стаціонарна задача теплопровідності для клиновидного шару з порожниною. / /Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр. -Київ: Ін-т математики АН України, 1992.-Вип.1. -с.129-139.
2. Міхалевська Г.І . Гібридні інтегральні перетворення типу

Канторовича-Лєбєдєва на двошаровій полярній осі.//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб.научн.тр. -Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. -с.184-186.

3. Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Канторовича-Лєбєдєва на декартовій осі.//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр. -Київ:Ін-т математики НАН України,1995.-Вип.8. -с.137-144.
4. Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення Фур'є-Канторовича-Лєбєдєва на обмеженій справа декартовій півосі //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр.-Київ: Ін-т математики НАН України,1995. -Вип.9. -с.206-214.
5. Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення Канторовича-Лєбєдєва-Фур'є на полярній осі. //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук.пр. -Київ: Ін-т математики НАН України,1996.-Вип.12.-с.128-136.
6. Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення Канторовича-Лебєдєва-Фур'є на двоскладовому сегменті.//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук. пр.-Київ:Ін-т математики НАН України,1996.-В.13.-с.112-121.
7. Міхалевська Г.І. Коливання кусково-однорідної обмеженої справа струни.//Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їх застосування: Зб.наук.пр.-Київ:Ін-т математики НАН України,1996.-Ч.2. -с.69-72.
8. Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення Фур'є - Канторовича-Лєбєдєва - Канторовича-Лєбєдєва на обмеженій справа декартовій півосі.//Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук. пр.-Київ: Ін-т математики НАН України,1996.-с.140-151.
9. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Гібридні інтегральні перетворення Канторовича-Лєбєдєва. Київ, 1996.-64 с.(Препринт/НАН України, Ін-т математики; 96.16)
10. Ленюк М.П., Михалевская Г.И. Стационарная задача теплопроводности для клиновидного цилиндрического пространства с полостью. -Киев,1988.-28 с.-Деп.в УкрНИИНТИ, N 2053-Ук88.

11. Михалевская Г.И.,Ленюк М.П.Стационарные температурные поля в сплошных неограниченных, полуограниченных и ограниченных клиновидных цилиндрических телах. -Киев,1988.-33 с.-Деп. в УкрНИИНТИ, N1637-Ук88.
12. Михалевская Г.И. Стационарная задача теплопроводности для клиновидного цилиндрического пространства с полостью. -Киев,1989.-31 с.-Деп.в УкрНИИНТИ, N1398-Ук89.

Mikhalevska G.I. Introduction of integral transformation (Furie, Kantorovich-Lebedev) on piece-homogenuous intervals. Manuscript. The thesis to the obtaining of Master's degree of physics-mathematics sciences on speciality 01.01.03-mathematical physics;Chernivtsy State University named afte Y.Fedkovich, Chernivtsy, 1996.

The hybrid integral transformations (Furie, Kantorovich-Lebedev) are constructed by means of δ-image sequenses. These transformations are created by all kinds of combinations of the Furie and Bessel operators on Dekart's oxis and right-bounded Dekart's half-oxis and polar oxis with one and two conjugated points. Logical plan of using is described on typycal problems.

Михалевская Г.И. Введение интегральных преобразований (Фурье, Канторовича-Лебедева) на кусочно-однородных промежутках. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03-математическая физика. Черновицкий государственный университет им.Ю.Федьковича, Черновцы, 1996.

Методом дельтаобразных последовательностей построены гибридные интегральные преобразования (Фурье, Канторовича-Лебедева), порожденные возможным сочетанием операторов Фурье и Бесселя на декартовой оси, ограниченной справа декартовой полуоси и полярной оси с одной и двумя точками сопряжения. Логическая схема применения показана на типичных задачах.

Ключові слова: гібридний диференціальний оператор, інтегральні перетворення, метод дельтаподібних послідовностей, інтегральне зображення, спектральна функція, вагова функція, спектральна густина, основна тотожність.

ТУП, зам.№306, тир.100 , 1996 р.