

**ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. Ю. ФЕДЬКОВИЧА**

на правах рукопису

Дрінь Ірина Ігорівна

**Задача Коші для параболічних рівнянь із зростаючими
коефіцієнтами в просторах узагальнених функцій
типу ультрарозподілів**

01.01.07 - диференціальні рівняння

**Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук**

Чернівці 1996

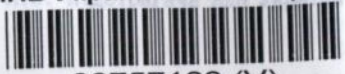
517.95

№ 36.239

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Чернівецькому державному університеті за адресою: 274012, Чернівці - 12, вул. Університетська, 28, математичний факультет

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00757183 (V)

Науковий керівник

- доктор фіз.-мат. наук, професор
Городицької Василь Васильович

Офіційні опоненти

- доктор фіз.-мат. наук, професор
Горбачук Мирослав Львович
- кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Лавренчук Володимир Петрович

Провідна організація - Національний університет ім. Тараса Шевченка

Захист в'їдоудеться "27" XII 1996 р. о 14 годині

на засіданні спеціалізованої вченої ради К 07.01.04 при Чернівецькому державному університеті за адресою: 274012, Чернівці - 12, вул. Університетська, 28, математичний факультет

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці ЧДУ за адресою: м. Чернівці, вул. Лесі Українки, 23

Автореферат розіслано "20" XI 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради

А.М. Садов'як

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми дослідження.

У теорії задачі Коші для лінійних параболических рівнянь на першій час одержані досить повні результати з питань коректної розв'язності, інтегрального зображення розв'язків та дослідження їх властивостей у випадку, коли початкові умови є звичайними функціями. Значно менше вивчено задачу Коші для рівнянь з різними особливостями, коли, наприклад, рівняння замість диференціальних операторів містять псевдодиференціальні оператори, у рівняннях наявні імпульсові збурення, вироджується тип рівняння і т.п., причому така задача має природну постановку з початковими умовами, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядку. Оскільки множини початкових значень розв'язків таких рівнянь збігаються з множинами початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки є елементами певних функціональних просторів, то розвинути теорію граничних значень для вказаних рівнянь відіграє важливу роль при постановці та дослідженні задачі Коші для цих рівнянь.

Теорія граничних значень у просторах L_p та спеціальних вагових L_p - просторах розв'язків лінійних рівномірно параболических за Петровським рівнянь і систем рівнянь з гладкими у шарі $\Omega_T = (0, T] \times R^k$ коефіцієнтами, а також $2b$ -параболических систем рівнянь та параболических рівнянь з оператором Бесселя розвинена в працях Й. Шаповальського, С.Д. Івасишена, В.П. Лауренчука, Т.В. Дутчак, Л.М. Андросової та ін. При цьому одержано важливі результати з питань зображення розв'язків у вигляді інтегралів Пуассона деяких функцій або узагальнених борельових мір, сукупності яких утворюють множини початкових значень цих розв'язків.

У той же час граничні властивості гладких в Ω_T розв'язків рівнянь параболического типу з не обмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ в різних просторах узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів тощо) досліджені у випадку модельних рівнянь М.Л. Горбачуком, П.І. Дудниковим, О.І. Кашпировським, В.В. Городецьким. При цьому отримані множини початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними по x в Ω функціями.

Тому можна вважати *актуальними* розвинути теорію задачі Коші для вказаних рівнянь (у клас таких рівнянь із зростаючими коефіціє-

ентами природно включити рівняння, що містять похідні по t вищих порядків або ж рівняння з оператором дробового диференціювання по часовій змінній) з початковими умовами, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядків.

Мета роботи. Метою дисертаційної роботи є:

1) знаходження загального вигляду всіх гладких у шарі $\Omega_T = ((0, T) \times (0, \infty))$ розв'язків рівнянь параболічного типу із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які містять оператор дробового диференціювання по часовій змінній або мають особливість при похідній по t ;

2) дослідження граничних властивостей розв'язків при наближенні до межі шару $\partial\Omega = \{0\} \times \mathbb{R}$ (або $\partial\Omega = \{0\} \times (0, \infty)$), тобто, встановлення існування у них, взагалі кажучи, узагальнених границь при $t \rightarrow +0$ і знаходження множин початкових значень;

3) доведення коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь з початковими умовами, які є узагальненими функціями, нескінченного порядку типу ультрарозподілів (типу S'); встановлення властивості локалізації розв'язків задачі Коші для вказаних рівнянь, яка полягає в тому, що якщо початкова умова - узагальнена функція f - на деякому інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ($(a, b) \subset (0, \infty)$) збігається з неперервною функцією g , то розв'язок $u(t, x)$ відповідної задачі Коші збігається при $t \rightarrow +0$ рівномірно на кожному відрізку $[c, d] \subset (a, b)$;

4) дослідження властивостей перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра та їхніх ядер.

Наукова новизна результатів дисертації полягає у:

- одержанні загального зображення всіх гладких розв'язків:

а) одного класу рівнянь параболічного типу із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які містять оператор дробового диференціювання по часовій змінній;

б) деяких нерівномірно параболічних за Петровським у шарі $\Omega_T = ((0, T) \times (0, \infty))$ рівнянь із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які мають особливість при похідній по t ;

- встановленні існування граничних значень гладких розв'язків таких рівнянь при $t \rightarrow +0$ у просторах узагальнених функцій типу ультрарозподілів;

- доведенні: а) коректної розв'язності задачі Коші для вказаних рівнянь з початковими умовами в просторах узагальнених функцій

типу S' , а також у деяких банахових просторах; б) властивості локалізації розв'язків задачі Коші у досить широких класах узагальнених функцій;

— дослідженні властивостей перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра та їхніх ядер (встановлено оцінки похідних ядер перетворень та існування граничних значень вказаних перетворень у просторах узагальнених функцій типу S' при прямуванні параметра сумування до нуля; для формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра, просумованих методами типу Гаусса-Вейерштрасса доведено аналог принципу локалізації Рімана для тригонометричних рядів).

При знаходженні загального вигляду гладких розв'язків вказаних рівнянь та встановленні коректної розв'язності задачі Коші для таких рівнянь у просторах узагальнених функцій використовується та розвивається методика досліджень М.Л. Горбачука і В.І. Горбачук з теорії граничних значень розв'язків абстрактних диференціально-операторних рівнянь першого порядку, а також методика досліджень Г.С. Шилова, І.М. Гельфанда, С.Д. Ейделмана з теорії параболічних рівнянь і систем рівнянь.

Наукова і практична цінність роботи. Робота носить теоретичний характер. Результати та методика дисертаційної роботи можуть знайти застосування і подальший розвиток у теорії задачі Коші для лінійних параболічних рівнянь при дослідженні властивостей розв'язків, у теорії узагальнених функцій, теорії самоспряжених операторів у гільбертовому просторі, теорії сумування формальних рядів лінійними регулярними методами.

На захист виносяться:

1. Теорема про загальний вигляд усіх нескінченно диференційованих по x розв'язків: а) одного класу рівнянь параболічного типу із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow +\infty$ коефіцієнтами, які містять оператор дробового диференціювання по часовій змінній; б) деяких нерівномірно параболічних за Петровським рівнянь із зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які мають особливість при похідній по t .

2. Теорема про існування граничних значень гладких розв'язків таких рівнянь при $t \rightarrow +0$ у просторах узагальнених функцій типу S' .

3. Теорема про а) коректну розв'язність задачі Коші для вказаних рівнянь з початковими даними у просторах узагальнених функцій;

цій типу S' , а також у деяких банахових просторах; б) властивість локалізації розв'язків задачі Коші у просторах узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

4. Теореми про властивості перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра та їхніх ядер.

Апробація роботи. Основні результати доповідались на: науковому семінарі Чернівецького відділу Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник - доктор фіз.-мат. наук, професор С.Д. Івасишєн, 1994 р.); науковому семінарі відділу рівнянь з частинними похідними Інституту математики НАН України (Київ, керівник - доктор фіз.-мат. наук, професор М.Л. Горбачук, 1996 р.); науковому семінарі математичного факультету Чернівецького державного університету ім. Ю. Федьковича (1996 р.); Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (м.Дрогобич, 1994 р.); Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (м.Чернівці, 1994 р.); Всеукраїнській конференції "Диференціальні-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 1996 р.).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 6 праць. З результатів спільних праць [1-3] автору дисертації належать теореми про: - загальний вигляд усіх гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які містять оператор дробового диференціювання по часовій змінній або мають особливість при похідній по t ; - існування граничних значень гладких розв'язків таких рівнянь при $t \rightarrow +0$ у просторах узагальнених функцій типу S' ; - коректну розв'язність задачі Коші для вказаних рівнянь з початковими умовами у просторах узагальнених функцій типу S' ;

- існування граничних значень у просторах типу S' перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра при прямуванні параметра сумування до нуля.

Б.Б. Городецькому, з результатів вказаних спільних праць, належать твердження: 1) про вигляд ядра перетворення Гаусса-Вейерштрасса формального ряду Фур'є-Ерміта у випадку $\gamma=1$; 2) про оцінки похідних ядра перетворення Гаусса-Вейерштрасса формального ряду Фур'є-Лагерра у випадку $\gamma=1$.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, двох параграфів та списку цитованої літератури, що містить 28 найменувань. Повний об'єм роботи складає 103-машинописних сторінки.

Зміст дисертації

У вступі обґрунтовується актуальність теми дослідження, визначається мета дослідження, дається стислий огляд праць по темі дисертації, описується зміст дисертації та її основні результати.

Параграф перший присвячений: 1) зображенню загального вигляду всіх гладких у шарі $\Omega = (0, \infty) \cdot \mathbb{R}$ розв'язків одного класу рівнянь параболічного типу із нескінченно зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які містять оператор дробового диференціювання по часовій змінній; 2) коректній розв'язності задачі Коші для вказаних рівнянь з початковими даними, які є узагальненими функціями типу ультрарозподілів. Виділяється максимальний простір узагальнених початкових даних, які забезпечують існування єдиного гладкого в Ω розв'язку вказаної задачі.

Основним засобом досліджень є формальні ряди Фур'є-Ерміта. Це пов'язано з тим, що вказані рівняння зображаються у вигляді диференціально-операторних рівнянь вигляду

$$\mathfrak{D}_t^\beta u(t, x) + (-1)^{-[\beta]+1} \mathfrak{D}_t^{(\beta)} A^\alpha u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (1)$$

де $\beta \in [-3, 0)$, $\alpha > 0$ - фіксовані числа, $[\beta]$ - ціла, а $\{\beta\}$ - дробова частина числа β , \mathfrak{D}_t^β - оператор дробового диференціювання, який діє по змінній t у просторі D_+^1 (простір, який складається з усіх узагальнених функцій з $D^1(\mathbb{R})$, що збігаються з нулем на півосі $(-\infty, 0)$):

$\mathfrak{D}_t^\beta f = f * J_\beta$, $\forall f \in D_+^1$, де

$$J_\beta(t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \beta > 0, \\ J_{\beta+m}^{(m)}(t), & \beta < 0, m = -[\beta]. \end{cases}$$

θ - функція Хевісайда, A - невід'ємний самоспряжений оператор в $L_2(\mathbb{R})$ зі щільною областю визначення в $L_2(\mathbb{R})$ спектр якого є чисто дискретним. Оператор A будується так, що функції Ерміта h_k , $k \in \mathbb{Z}$, ортонормований базис в $L_2(\mathbb{R})$ - є його власними функціями, що відповідають власним значенням $\lambda_k = (2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, де $\nu > 0$ - фіксоване чис-

ло. При цьому позитивні та негативні простори, які будуються за оператором A та простір $L_2(\mathbb{R})$ вкладаються в простір формальних рядів Фур'є-Ерміта вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} C_k h_k$, що ототожнюються з лінійними неперервними функціоналами над простором

$$\Phi = \varliminf_{m \rightarrow \infty} \Phi_m, \quad \Phi_m = \{ \varphi \in L_2(\mathbb{R}) : \varphi = \sum_{k=0}^m b_k h_k, \quad b_k \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N} \}.$$

Перейдемо до короткого викладу результатів першого параграфу, який складається з шести пунктів. Пункти 1.1-1.3 носять допоміжний характер.

У пункті 1.1 наведено основні означення та твердження, що стосуються просторів основних та узагальнених елементів, побудованих за самоспряженим оператором з дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі.

У пункті 1.2 наведено основні поняття теорії формальних рядів Фур'є-Ерміта, розвиненої в працях М.Л. Горбачука і В.І. Горбачук; встановлено спеціальні оцінки для похідних функцій Ерміта.

У пункті 1.3 наведені основні означення та властивості просторів типу S та просторів ультрарозподілів типу S' .

Як вже відзначалося, розглядувані у даному параграфі питання тісно пов'язані з сумуванням формальних рядів Фур'є-Ерміта методами типу Гаусса-Вейерштрасса. У пункті 1.4 вивчаються основні властивості перетворення

$$f_{t,\gamma}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)\gamma} C_k(f) h_k(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \gamma > 0,$$

формальних рядів Фур'є-Ерміта вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} C_k h_k$, кожен з яких ототожнюється з певною узагальненою функцією з простору $(S_w^w)'$, ($w=1/2$, якщо $\gamma \geq 1$; $w=1/(2\gamma)$, якщо $0 < \gamma < 1$). Тут $C_k = \langle f, h_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+$, - коефіцієнти Фур'є-Ерміта узагальненої функції f ($\langle f, \cdot \rangle$ - позначає дію функціоналу f на основну функцію), $(S_w^w)'$ - сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів над простором S_w^w , який відноситься до просторів типу S , введених І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим. Цей простір

складається з усіх функцій $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, що задовольняють умову

$$\exists \alpha, c, B > 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}: |f^{(m)}(x)| \leq c B^m m^{\alpha} \exp(-\alpha x^{1/w}).$$

Зокрема, у теоремі 1.1 стверджується, що для перетворення $J_{t,\gamma}$ правильним є зображення

$$J_{t,\gamma} = \langle J, K_{t,\gamma,x}(\cdot) \rangle, \quad t > 0, \quad \gamma > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $K_{t,\gamma,x}$ - ядро методу сумування. Встановлено оцінки похідних ядра

$K_{t,\gamma,x}$, з яких випливає, що $K_{t,\gamma,x} \in S_w^w$ при кожному $t > 0, \gamma > 0, x \in \mathbb{R}$.

Граничне значення перетворення $J_{t,\gamma}$ при $t \rightarrow +0$ існує у просторі $(S_w^w)'$, тобто $J_{t,\gamma} \rightarrow J, t \rightarrow +0$ у просторі $(S_w^w)'$. Дається також відповідь на питання про те, як повинно поводитись перетворення $J_{t,\gamma}$ при $t \rightarrow +0$, щоб його граничне значення належало до певних просторів, розміщених між $L_2(\mathbb{R})$ і $(S_w^w)'$.

Для класичних рядів Фур'є-Ерміта має місце аналог відомого принципу локалізації Рімана для тригонометричних рядів (про локальне посилення збіжності): якщо функції $(f, g) \in L_2(\mathbb{R})$ збігаються на інтервалі $(a, b) \in \mathbb{R}$, то на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset (a, b)$ різниця їх рядів Фур'є-Ерміта рівномірно збігається до нуля. У класі розподілів цей принцип вже не виконується. Якщо ж ряд Фур'є-Ерміта узагальненої функції просумувати методом типу Гаусса-Вейерштрасса, то як встановлено у п. 1.4, принцип локалізації має місце вже у досить широкому класі узагальнених функцій нескінченного порядку.

Вказані результати у п. 1.5 застосовуються для знаходження загального вигляду всіх нескінченно диференційованих по x розв'язків рівняння (1). Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію u , яка задовольняє умови:

- 1) $u(\cdot, x) \in D' \cap C^{-1[\beta]}(0, \infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$;
- 2) $u(t, \cdot) \in D(A^\alpha) \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$; $u(t, \cdot) = 0$ при $t < 0$;
- 3) u задовольняє рівняння (1).

Якщо $\beta \in [-3, -1)$, то припускаємо, що u задовольняє також наступну умову:

- 4) для довільного фіксованого проміжку $[\delta, +\infty) \subset (0, \infty)$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\sup_{t \in (\delta, +\infty)} \|D_t^{(\beta)} u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c.$$

Одним з основних результатів першого параграфу є наступне твердження:

Теорема 1.6. Функція u є розв'язком рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\theta(t) \exp(-t(2k+1)^{\nu\alpha/(-[\beta])})) * f_{-(\beta)}(t) C_k h_k(x) = \\ = \theta(t) f_{t, \nu\alpha/(-[\beta])}(x) * f_{-(\beta)}(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де $f = \sum_{k=0}^{\infty} C_k h_k \in (S_w^w)'$. При цьому $u(t, \cdot) \in S_w^w$ при кожному $t > 0$.

З теореми 1.6 випливає, що формулою (2) описуються при $t > 0$ всі нескінченно диференційовні по x розв'язки рівняння (1).

Наслідок 1.2. Граничне значення $\mathcal{D}_t^{(\beta)} u(t, \cdot)$ при $t \rightarrow +0$ існує в просторі $(S_w^w)'$, тобто

$$\mathcal{D}_t^{(\beta)} u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{(S_w^w)'} f = \sum_{k=0}^{\infty} C_k h_k.$$

Отже, $(S_w^w)'$ є у певному розумінні "максимальним" простором у якому існують граничні значення функції $\mathcal{D}_t^{(\beta)} u(t, \cdot)$ при $t \rightarrow +0$. Скориставшись зображенням функції у вигляді формальних рядів Фур'є-Ерміта, у п. 1.5 даються необхідні і достатні умови, при виконанні яких граничні значення $\mathcal{D}_t^{(\beta)} u(t, \cdot)$ при $t \rightarrow +0$ існують у вузьких (проміжних) просторах, розміщених між $L_2(\mathbb{R})$ і $(S_w^w)'$.

Зауваження 1. Якщо параметр β набуває однієї із значень з множини $\{-1, -2, -3\}$, то $(\beta) = 0$, а $\mathcal{D}_t^{(\beta)} = \mathcal{D}_t^0 = E$ (E — одиничний оператор),

$\mathcal{D}_t^{\beta} u(t, \cdot) = \frac{\partial^p u(t, \cdot)}{\partial t^p}$, $p = -\beta$, $\alpha > 0$ — фіксоване число. Отже, відповідно маємо рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + A^{\alpha} u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u^2(t,x)}{\partial t^2} - A^\alpha u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u^3(t,x)}{\partial t^3} + A^\alpha u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Omega,$$

або

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} + (-1)^{p+1} A^\alpha u = 0, \quad (t,x) \in \Omega, \quad p \in \{1, 2, 3\}. \quad (3)$$

При $t > 0$ розв'язки цих рівнянь зображаються формулою

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t(2k+1)^\gamma) C_k h_k(x) =$$

$$\langle f, \mathcal{K}_{t,x,\gamma}(\cdot) \rangle = f_{t,\gamma}, \quad f \in (S_w^w)', \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

тобто при $t > 0$ між множиною гладких розв'язків рівняння (3) та сукупністю перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта узагальнених функцій з простору $(S_w^w)'$ існує взаємо однозначна відповідність.

Зауваження 2. Якщо $\nu=1$, то оператор A збігається з оператором,

породженим в $L_2(\mathbb{R})$ диференціальним виразом $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2$, тобто в

даному випадку A - гармонічний осцилятор, власними числами якого є числа $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Якщо $\alpha=m$, $m \in \mathbb{N}$, то, як відомо,

$$A^m u(t,x) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\right)^m u(t,x) = \sum_{0 \leq p+q \leq 2m} C_{p,q}^m x^p \frac{\partial^q u(t,x)}{\partial x^q},$$

де $C_{p,q}^m$ - сталі коефіцієнти, для яких справджуються оцінки

$$|C_{p,q}^m| \leq 10^m m^{m-(p+q)/2}.$$

У зв'язку з цим рівняння (1) будемо відносити до рівнянь параболічного типу із зростаючими коефіцієнтами.

Для рівнянь (3) наслідок 2 з теореми 1.6 формулюється так: граничне значення $u(t, \cdot)$ при $t \rightarrow +0$ існує у просторі $(S_w^w)'$,

тобто

$$u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{(S_w^w)'} f = \sum_{k=0}^{\infty} C_k h_k.$$

Пункт 1.6 першого параграфу присвячений питанням коректної розв'язності задачі Коші для рівняння (1) та властивості локалізації її розв'язків у просторах узагальнених функцій типу S' , а також у деяких банахових просторах.

Наслідок 2 з теореми 1.5 дозволяє ставити задачу Коші для рівняння (1) так. Для (1) задамо початкову умову

$$\mathfrak{D}_t^{\beta} u(t, \cdot) \Big|_{t=0} = f, \quad (4)$$

де $f \in (S_w^w)'$. Під розв'язком задачі Коші (1), (4) розумітимемо розв'язок рівняння (1), який задовольняє початкову умову (4) у тому сенсі, що $\mathfrak{D}_t^{(\beta)} u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} f$ у просторі $(S_w^w)'$.

Основний результат п. 1.6 складає наступне твердження.

Теорема 1.8. Задача Коші коректно розв'язна у просторі початкових даних $(S_w^w)'$. Її розв'язок зображається формулою (2); при цьому $u(t, \cdot) \in S_w^w$ при кожному $t > 0$.

Отже, $(S_w^w)'$ є максимальним простором початкових даних задачі Коші для рівняння (1), при яких відповідні розв'язки (1) є при $t > 0$ нескінченно диференційовними по x функціями.

Що стосується рівнянь (3), то задача Коші в цьому випадку ставиться так:

$$u(t, \cdot) \Big|_{t=0} = f, \quad (5)$$

де $f \in (S_w^w)'$. При цьому теорема 1.8 стосовно задачі Коші (3), (5) переформулюється відповідним чином. Зазначимо ще, що розв'язок задачі Коші (6), (8) за умови $\nu a/p \geq 1$ володіє властивістю локалізації (властивістю локального посилення збіжності): якщо початкова узагальнена функція $f \in (S_w^{\beta})' \subset (S_w^w)'$, $\beta > \max(1, \nu)$, збігається на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ з неперервною функцією g , то $u(t, \cdot) \xrightarrow[t \rightarrow +0]{} g$ на $[c, d]$, де $[c, d] \subset (a, b)$.

Підкреслимо, що при $\beta > 0$ в основному просторі S_w^w є фінитні функ-

ції, тому можна говорити про рівність двох узагальнених функцій на деякому інтервалі $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Нехай тепер X - довільний банахів простір функцій, визначених на \mathbb{R} , такий, що $S_{1/2}^1 \subset S_w^w \subset X \subset (S_w^w)' \subset (S_{1/2}^1)' \subset \Phi'$, причому $S_{1/2}^1 = X$ і вказані вкладки є неперервними (наприклад, за X можна взяти простір $L_1(\mathbb{R})$), $B := \hat{A}^\alpha|_X$ - звуження оператора \hat{A}^α на X , де \hat{A}^α - оператор, який діє в просторі Φ' за правилом:

$$\Phi' \ni \sum_{k=0}^{\infty} C_k h_k(x) = r \rightarrow \hat{A}^\alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{\nu \alpha} C_k h_k \in \Phi',$$

де $\nu > 0$ - фіксований параметр. Із неперервності вкладень $X \subset (S_w^w)' \subset (S_{1/2}^1)' \subset \Phi'$ випливає, що B - замкнений в X оператор, область визначення $D(B)$ якого щільна в X і містить простір Φ .

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u^p}{\partial t^p} + (-1)^{p+1} B u = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} = \Omega, \quad (6)$$

де p набуває одне із значень $\{1, 2, 3\}$. Говоритимемо, що задача Коші для рівняння (6) розв'язна в просторі X , якщо для довільного $f \in X$ гладкий розв'язок u рівняння (6), що відповідає f , задовольняє граничне співвідношення $u(t, \cdot) \rightarrow f, t \rightarrow +0$, у просторі X .

У пункті 1.6 встановлено, що задача Коші (5), (6) розв'язна тоді і тільки тоді, коли оператор $-B^{1/p}$ є генератором півгрупи класу C_0 .

Перейдемо до викладу основних результатів другого параграфу, який складається з трьох пунктів. Параграф присвячений встановленню коректної розв'язності задачі Коші для деяких нерівномірно параболічних за Петровським у шарі $\Omega_T = (0, T] \times (0, \infty)$ рівнянь із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які можуть мати особливості при похідній по t , у випадку, коли початкові умови є узагальненими функціями нескінченного порядку.

У пункті 2.1 будуються простори основних та узагальнених елементів невід'ємного самоспряженого оператора з чисто дискретним спектром.

Нехай

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind} \Phi_m, \quad \Phi_m = \{ \varphi \in L_2((0, \infty)) \mid \varphi = \sum_{k=0}^m b_k l_k, b_k \in \mathbb{C} \},$$

де $l_k, k \in \mathbb{Z}_+$, - функції Лагерра, Φ' - простір лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Елементи Φ' називаються узагальненими функціями. Кожна узагальнена функція $f \in \Phi'$ ототожнюється з її рядом Фур'є-Лагерра $\sum_{k=0}^{\infty} C_k l_k$, де $C_k = \langle f, l_k \rangle, k \in \mathbb{Z}_+$ - коефіцієнти Фур'є-Лагерра узагальненої функції f . У просторі формальних рядів Фур'є-Лагерра побудуємо оператор \hat{A} , для якого визначається так:

$$\Phi' \ni f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n l_n \longrightarrow \hat{A}f = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) C_n l_n \in \Phi'.$$

Оператор \hat{A} є лінійним і неперервним.

Нехай A - звуження оператора \hat{A} на $H = L_2((0, \infty))$. Тоді, як встановлено в п. 2.1, A - невід'ємний самоспряжений оператор зі щільною в H областю визначення $D(A)$, причому $\Phi \subset D(A)$. Як наслідок дістаємо, що спектр оператора A чисто дискретний з єдиною граничною точкою у нескінченності. Функції Лагерра $\{l_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ є власними для оператора A , що відповідають власним значенням $\mu_n = 4n+1, n \in \mathbb{Z}_+$. Кожне власне значення μ_n є простим.

Клас Жевре $G_{(\beta)}(A) = \lim_{B \rightarrow \infty} \text{ind} G_{\beta, B}(A)$, де

$$G_{\beta, B}(A) := \left\{ \varphi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n) \mid \exists c, B > 0: \|\Delta^n \varphi\| \leq c B^n n^{\beta}, n \in \mathbb{Z}_+, \beta > 0 \right\}.$$

Теорема 2.1. При $\beta \geq 1$ правильною є топологічна рівність:

$$G_{(\beta)}(A) = S_{\beta/2, +}^{\beta, +}.$$

Тут символом $S_{\beta, +}^{\beta, +}, \beta \geq 1/2$, позначається сукупність функцій $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що відповідні функції $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) := \varphi(x^2), x \in \mathbb{R}$, є елементами простору $S_{\beta, +}^{\beta}$. Множину $S_{\beta, +}^{\beta, +}$ можна трактувати як сукуп-

ність усіх функцій $\varphi(x) = \varphi(\sqrt{x})$, $x \in [0, \infty)$, де φ - парна функція з простору S_{β}^{β} , звужена на піввісь $(0, \infty)$. Наприклад, функції Лагерра l_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, є елементами множини $S_{1/2, +}^{1/2, +}$, оскільки $l_n(x^2) = h_{2n}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, де h_{2n} - функції Ерміта, які належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Збіжність в $S_{\beta, +}^{\beta, +}$ означимо так: послідовність $(\varphi_\nu, \nu \geq 1) \subset S_{\beta, +}^{\beta, +}$

збігається в $S_{\beta, +}^{\beta, +}$ до функції $\varphi \in S_{\beta, +}^{\beta, +}$, якщо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{S_{\beta}^{\beta}} \varphi$, де $\varphi_\nu(x) := \varphi_\nu(x^2)$, $\varphi(x) = \varphi(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

У пункті 2.2 досліджуються властивості перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Лагерра та їхніх ядер, встановлюється принцип локалізації для таких рядів у просторах узагальнених функцій типу ультрарозподілів Жевре.

У пункті 2.3 одержані результати застосовуються до рівнянь вигляду

$$\alpha(t) \frac{\partial u}{\partial t} = P(t, A)u, \quad (t, x) \in \Omega_T, \quad (7)$$

де $P(t, A) = \sum_{k=1}^{2b} \alpha_k(t) A^k$, $\alpha_k \in C([0, T])$, $k = (1, \dots, 2b)$, $b \in \mathbb{N}$, α - неперервна

на додатна на $(0, T)$ функція така, що $\int_0^T \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \alpha$, а многочлен $P(t, \xi)$ (по змінній ξ) задовольняє умову:

$$\forall t \in (0, T) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \exists \delta_0, \delta_1, \delta_2 > 0 \quad (\delta_1 \geq \delta_2):$$

$$-\delta_0 - \delta_1 \xi^{2b} \leq P(t, \xi) \leq -\delta_2 \xi^{2b} + \delta_0.$$

Стосовно оператора A тут доводиться, що $A = B = \hat{B}|_{\Pi}$, де \hat{B} - оператор, який діє в Φ' за правилом:

$$\hat{B} : f \rightarrow \hat{B}f = -4xf'' - 2f' + xf' \in \Phi'.$$

Вказаний оператор визначений коректно, оскільки в просторі основних

функції T визначені і неперервні операції множення на незалежну змінну та диференціювання.

У зв'язку з цим рівняння (7) відносимо до рівнянь параболічного типу в шарі Ω_T із зростаючими коефіцієнтами.

Знайдено загальний вигляд розв'язків рівняння (7), при цьому множина початкових значень таких розв'язків збігається з $[S_{1/(4\beta),+}^{1/(4\beta),+}]'$. Це дозволяє встановити коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (10) з початковими даними у просторі узагальнених функцій $[S_{1/(4\beta),+}^{1/(4\beta),+}]'$, який є максимальним простором початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки рівняння (7) є нескінченно диференційовними по x функціями. Аналогічні результати мають місце для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t)Au = 0, \quad (t, x) \in \Omega_T,$$

та рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(t) \left[4x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(2x \frac{f_0'(x)}{f_0(x)} + 4x \frac{f_0'(x)}{f_0(x)} + 1 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \left[2 \frac{f_0'(x)}{f_0(x)} - x \right] u \right], \quad (t, x) \in \Pi, \end{aligned}$$

де f_0 - фіксована функція з простору $C^\infty((0, \infty))$, яка є мультиплікатором у просторі $S_{1/2,+}^{1/2,+} + \frac{1}{f_0} \in C^\infty((0, \infty))$. Ці рівняння є нерівномірно параболічними за Петровським у шарі Ω_T рівняннями, коефіцієнти яких зростають при $|x| \rightarrow \infty$.

Основні результати та висновки

1. Знайдено загальний вигляд усіх нескінченно диференційовних по x розв'язків: а) одного класу рівнянь параболічного типу із не обмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які містять оператор дробового диференціювання по часовій змінній; б) декількох нерівномірно параболічних за Петровським рівнянь із зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами, які мають особливість при похідній по t .

2. Досліджено граничні властивості гладких розв'язків таких рівнянь при $t \rightarrow +0$ у просторах узагальнених функцій типу S' .

3. Встановлено коректну розв'язність задач Коші для вказаних рівнянь з початковими даними у просторах узагальнених функцій типу S' , а також у деяких банахових просторах; досліджено якісні властивості розв'язків задач Коші, зокрема, властивість локалізації.

4. Досліджено властивості перетворень типу Гаусса-Вейерштрасса формальних рядів Фур'є-Ерміта, Фур'є-Лагерра та їхніх ядер.

Отже, в дисертації розвинена теорія задач Коші для деяких класів рівнянь параболічного типу із необмежено зростаючими при $|x| \rightarrow \infty$ коефіцієнтами та початковими умовами у просторах узагальнених функцій типу S' . Описано гладкі розв'язки таких рівнянь та множини їх початкових значень. Досліджено якісні властивості розв'язків, зокрема, властивість локалізації.

Основні положення дисертації опубліковано в працях:

1. Gorodetsky V.V., Yarmolyuk I.I. About the summation of the formal Fourier-Hermite series by the Abel-Poisson method // Доп. АН України. - 1994. - №6. - С.20-26.
2. Городецький В.В., Дрінь І.І. Формальні ряди Фур'є-Лагерра та узагальнені функції нескінченного порядку // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. - К.: Ін-т математики НАН України, 1995. - Вип. - С. 174-180.
3. Городецький В.В., Дрінь І.І. Про гладкі розв'язки параболічних рівнянь із зростаючими коефіцієнтами та множини їх початкових значень // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. - К.: Ін-т математики НАН України, 1996. - Вип. 12. - С.41-53.
4. Дрінь І.І. Формальні ряди Фур'є-Ерміта та деякі рівняння математичної фізики // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. - К.: Ін-т математики НАН України, 1995. - Вип.10. - С.238-243.
5. Дрінь І.І. Задача Коші для деяких рівнянь параболічного типу із зростаючими коефіцієнтами // Всеукраїнська конференція "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування": Тези доп. - Київ, 1996. - С.57.

6. Дрнть І.І. Про гладкі розв'язки деяких рівнянь параболічного типу із зростаючими коефіцієнтами //Наукова конференція "Нелінійні проблеми аналізу" (24-27 вересня 1996 р., м. Івано-Франківськ): Тези доп.- Івано-Франківськ, 1996.- С.30.

Drin I.I. The Cauchy problem for the parabolic equations with increasing coefficients in the spaces of generalized functions of the ultradistribution type. Manuscript. Dissertation to obtain the science-degree candidate of physical-mathematic sciences by the speciality 01.01.02 - differential equations. Chernivtsi State University named after Y. Fedkovych, Chernivtsi, 1996.

The correct solvability of Cauchy problem for the equations of the parabolic type with increasing coefficients and initial condition in the spaces of generalized functions of the ultradistribution type is proved. The smooth solutions of such equations and sets of its initial values are described.

Дринь І.І. Задача Коші для параболических уравнений с возрастающими коэффициентами в пространствах обобщенных функций типа ультрадистрибуции. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения. Черновицкий государственный университет им. Ю. Федьковича, Черновцы, 1996.

Устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для уравнений параболического типа с возрастающими коэффициентами и начальными условиями в пространствах обобщенных функций типа ультрадистрибуции, описывающие гладкие решения таких уравнений и множества их начальных значений.

Ключові слова:

Задача Коші, параболическі рівняння, узагальнені функції, ультрадистрибуції.

Drin I.I.

438129

AB 36.239

Подписано к печати 18.11.86. формат 60x84, днз, печ. л. 1,25
Усл. печ. л. 1,16. Уч. изд. л. 0,9. Зак. 570, тир. 100

ОУС, ул. Головна 249 - А