ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ.ІВАНА ФРАНКА

На правах рукопису

КОЦЮБА МАРІЯ ВАСИЛІВНА

ЗАСТОСУВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРО- ТА МАГНІТОСТАТИКИ

Спеціальність 01.05.02 - математичне моделювання і обчислювальні методи в наукових дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафе
техніки Державного універс

Науковий керівник
доктор технічних наук, професор
ФІЛЬЦ РОМАН ВОЛОДИМИРОВИЧ

Офіційні опоненти:
1. Доктор фізико-математичних наук, професор
ПОПОВ БОГДАН ОЛЕКСАНДРОВИЧ
2. Кандидат фізико-математичних наук, доцент
МУХА ІГОР СТЕПАНОВИЧ

Провідна установа - Інститут електродинаміки
НАН України, м.Київ

Захист відбудеться "26" грудня 1996 р. о 15^{30} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 04.04.05 у Львівському державному університеті ім.Івана Франка за адресою: 290602, м.Львів, вул.Університетська, 1, ЛДУ, ауд. 261.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Львівського державного університету за адресою: м.Львів, вул.Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "25" листопада 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Б.А.Остудін

1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Створення нових видів електротехнічного обладнання та вдосконалення електротехнічних пристроїв відомих видів щодо підвищення їх техніко-економічних показників здійснюється з використанням сучасних автоматизованих систем проектування на підставі розрахунків фізичних полів із урахуванням реальної складної геометрії граничних і контактних поверхонь, нелінійності й анізотропії середовищ. Незважаючи на значні успіхи останніх десятиріч у галузі розрахунку статичних електричних і магнітних, а також електромагнітних полів, проблема вдосконалення методів розрахунку полів залишається невичерпаною, і розвиток чисельних методів розв'язування крайових задач електро- та магнітостатики, спрямований на підвищення ефективності й (чи) розширення можливостей цих методів, є актуальним.

Дисертаційну роботу виконано згідно з Координаційним планом НАН України науково-дослідних робіт з комплексної проблеми "Наукові основи електроенергетики" на 1991-1995 рр., п.1.9.2.6.1.1.

Метою дисертації є розвиток методів колокації та скінченних різниць стосовно до крайових задач електро- та магнітостатики, спрямований на:

- усунення на теоретичному рівні причин, які гальмують застосування цих методів;
- розроблення машинно-орієнтованих алгоритмів розв'язування типових математичних задач, що є складовими частинами алгоритмів розрахунку електро- та магнітостатичних полів, і оброблення результатів розрахунку;
- створення для алгоритмів розв'язування згаданих типових математичних задач відповідного математичного забезпечення.

Методи досліджень. Для виведеня співвідношень використовувались аналітичні методи вищої алгебри та математичного аналізу, а для розв'язування систем алгебраїчних рівнянь і перевірки працездатності алгоритмів - чисельні методи й математичний експеримент.

Автор захищає комплекс отриманих на підставі теорії інваріантного наближення функцій теоретичних результатів у галузі чисельних методів розв'язування крайових задач електро- й магнітостатики, який охоплює:

- загальний алгоритм обчислення для диференційних операторів рівнянь Маквелла інаваріантних відносно групи лінійних перетворень декартової системи координат різницевих і дискретних аналогів заданих порядків похибки апроксимації на невироджених комплектах вузлів довільної конфігурації;

- загальні алгоритми формування на підставі методу колокації та скінченних різниць інваріантних відносно групи лінійних перетворень декартової системи координат дискретних аналогів диференційних крайових задач першого, другого й третього родів для областей довільної конфігурації, заповнених безгістерезисними й, у загальному, нелінійними неоднорідними анізотропними середовищами;

- загальні алгоритми розв'язування отримуваних дискретних аналогів диференційних крайових задач.

Наукову новизну дисертаційної роботи становить:

- застосування до розв'язування диференційних крайових задач електро- та магнітостатики методом колокації та методом скінченних різниць теорії інваріантного наближення функцій, що дозволило створити дискретні моделі, які є однотипними як у випадку лінійних, так і нелінійних задач, незалежними від конфігурації граничних і контактних поверхонь, характеризуються заздалегідь заданим порядком похибки апроксимації, консервативністю, високою збіжністю та інваріантністю отримуваних результатів;

- обгрунтування обмежень на кількості граничних і внутрішніх вузлів та їх взаємне розташування в методі колокації;

- спосіб формування сітки в околі границь складної конфігурації в методі скінченних різниць

Достовірність результатів забезпечується строгістю постановки задачі та використаних математичних методів; співпадінням результатів, одержаних чисельними й аналітичними методами; отриманням результатів, які узагальнюють раніше відомі.

Практична цінність дисертаційної роботи полягає:

- у створенні загальної і, водночас, простої в практичній реалізації процедури формування для нелінійних крайових задач електро-та магнітостатики їх дискретних аналогів;

- у розробленні структури надійного й високоефективного загального алгоритму розв'язування дискретних нелінійних крайових задач електро- та магнітостатики;

- у розробленні пакету прикладних програм для розв'язування дискретних нелінійних крайових задач електро- та магнітостатики;

- в отриманні результатів математичного характеру, які мають безпосереднє відношення до крайових задач електродинаміки, теплопровідності, дифузії, пружності, аеро- та гідродинаміки тощо.

Розроблені алгоритми можуть застосовуватися під час проектування конкретних електротехнічних пристроїв, становити частину САПР.

Впровадження результатів роботи. Розроблене математичне забезпечення у вигляді комп'ютерних програм задепоновано в Республіканському Фонді алгоритмів та програм.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на науково-технічній конференції "Вдосконалення технологічних процесів виробництва, їх автоматизація та впровадження результатів" (Каунас, 1988 р.), науковому семінарі НАН України "Математичне моделювання процесів та оптимізація динамічних кіл і електричних систем із вентильними елементами" (Львів, 1993 р.), 1-й Міжнародній науково-технічній конференції "Математичне моделювання в електротехніці й електроенергетиці" (Львів, 1995 р.), а також на семінарах Державного університету "Львівська політехніка" та Львівського державного університету ім.Івана Франка.

Публікації. Основні наукові результати з теми дисертації опубліковано в 9 друкованих роботах автора.

Обсяг роботи. Робота викладена на 145 машинописних сторінках і містить 27 рисунків, 11 таблиць, 188 бібліографічних назв.

2. КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація складається з вступу, чотирьох розділів, висновків і додатків.

У вступі наведено аналіз відомих методів розв'язування крайових задач (КЗ) електро- та магнітостатики, мету дослідження й обгрунтування шляхів її досягнення.

Робота присвячена розвиткові методу колокації та методу скінченних різниць на підставі теорії інваріантного наближення функцій. Обмежене застосування цих методів до розв'язування крайових задач електро- та магнітостатики зумовлено, на наш погляд, такими основними причинами:

- наявністю для диференційних операторів (ДО), що входять у диференційні рівняння (ДР) електро- та магнітостатичних полів, не однієї різницевої формули певного порядку похибки апроксимації для конкретних типів комплектів вузлів, а деякої множини формул, і відсутністю рекомендацій щодо їх вибору;
- трудношами апроксимації ДО в граничних і приграничних вузлах для некоординатних границь;
- відсутністю загального методу формування для ДО рівнянь поля різницевих формул для комплектів вузлів, які є елементами нерегулярних сіток, і, як наслідок, неможливістю застосування таких сіток.

Водночас порівняння теоретичних засад методів скінченних різниць і методів скінченних елементів не дає підстав віддавати переваги останнім щодо точності зі заданою сіткою вузлів. Тому розвиток методу скінченних різниць у напрямі усунення чинників, які спричинились до сучасного порівняльного стану якостей цих двох груп методів, є з теоретичного погляду перспективним і з практичного - доцільним.

Досягнення цієї мети визначається вибором надійної наукової стратегії.

З теоретичної фізики відомо, що рівняння всіх фізичних полів, у тому числі, електро- та магнітостатичних, є тензорними. Тензорність рівнянь рівноцінна їх інваріантності під час перетворень системи координат (СК) і відбиває фундаментальну властивість рівнянь полів, оскільки вона є гарантією незалежності точного розв'язку КЗ від вибору СК, і, отже, гарантією об'єктивності цього розв'язку (оскільки вибір СК залежить від суб'єкта, що розв'язує задачу). При наближеному розв'язуванні КЗ можна орієнтуватися на вищу чи нижчу точність розв'язку (використовувати відповідну густоту сітки, застосовувати для апроксимації ДО різницеві формули вищого чи нижчого порядку похибки, закінчувати ітераційну процедуру розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (САР) на певному розряді мантиси числа тощо), проте недопустимо на будь-якому з етапів розв'язання втрачати тензорний характер рівнянь. Оскільки під час чисельного розв'язування КЗ зі складними конфігураціями границь використовуються майже без винятку декартові прямокутні системи координат (ДПСК), то логічною є вимога інваріантності розв'язку відносно групи лінійних перетворень ДПСК, а це можливо тільки тоді, коли він належить до класу функцій, інваріантних під час таких перетворень. Чисельні методи розв'язування КЗ грунтуються на наближенні розв'язку степеневими многочленами. Серед них інваріантними відносно групи лінійних перетворень ДПСК є тільки повні многочлени, зокрема, многочлени Тейлора. Саме тому в основу повзятого в даній роботі дослідження прийнято теорію інваріантного наближення функцій (ТІНФ) як математичний апарат, що грунтується на застосуванні многочленів Тейлора та забезпечує можливість інтерполювання, апроксимування, диференціювання й інтегрування функцій дискретного аргументу, який є вектором евклідового простору, з гарантією інваріантності результатів відносно групи лінійних перетворень ДПСК.

Для розв'язування нелінійних САР, отримуваних внаслідок алгебраїзації диференційних КЗ, прийнято метод Ньютона (в разі необхідності - з продовженням по параметру) як найшвидкозбіжніший і найнадійніший з відомих методів аналогічного призначення. Тут природно виникає необхідність опису властивостей нелінійних середовищ тензором їх диференційного питомого опору (чи тензором диференційної проникності), який однаково придатний для безгістерезисних середовищ усіх типів - лінійних чи нелінійних, ізотропних чи анізотропних.

У першому розділі викладено особливості ТІНФ, істотні з погляду її застосування до розв'язування диференційних КЗ електро- та магнітостатики і, зокрема, для алгебраїзації ДО, що входять у формулювання цих задач.

Многочлен Тейлора n-го степеня з m незалежними змінними при m=3 має вигляд

$$U=u_1+u_2x+u_3y+u_4z+u_5x^2/2!+\ldots+u_p x^{\alpha_x}y^{\alpha_y}z^{\alpha_z}/(\alpha_x!\alpha_y!\alpha_z!)+\ldots+u_P z^n/n!=$$
$$=\vec{T}[x,y,z]\cdot\vec{u}=\vec{T}\cdot\vec{u}, \tag{1}$$

де

$$\vec{T}=\vec{T}[x,y,z]=\|1\ x\ y\ z\ x^2/2!\ \ldots\ x^{\alpha_x}y^{\alpha_y}z^{\alpha_z}/(\alpha_x!\alpha_y!\alpha_z!)\ \ldots\ z^n/n!\|; \tag{2}$$

$$\vec{u}=\|u_1\ \ldots\ u_p\ \ldots\ u_P\|_* \tag{3}$$

- відповідно рядок Тейлора та стовпець похідних многочлена в початку координат. Отже, рядок Тейлора є сукупністю базисних многочленів Тейлора в лінійному просторі T_n многочленів Тейлора до n-го степеня включно, тобто є базисом цього простору. В основу формування рядка Тейлора для однозначності останнього прийнято лексикографічний порядок. Тут і надалі символ "*" означає транспонування.

Кількість членів многочлена (1) для 3-вимірного простору аргументу визначається за формулою

$$P=(3+n)!/(3!n!). \tag{4}$$

Якщо вважати, що $\bar{r}=\bar{i}\cdot x+\bar{j}\cdot y+\bar{k}\cdot z$, $\underset{\sim}{\bar{r}}=\underset{\sim}{\bar{i}}\cdot\underset{\sim}{x}+\underset{\sim}{\bar{j}}\cdot\underset{\sim}{y}+\underset{\sim}{\bar{k}}\cdot\underset{\sim}{z}$ - радіуси-вектори точки Q евклідового простору, визначені відповідно в ДПСК $Oxyz$ та $\underset{\sim}{Oxyz}$, $\bar{r}_0=\bar{i}\cdot x_0+\bar{j}\cdot y_0+\bar{k}\cdot z_0$ - радіус-вектор початку ДПСК $\underset{\sim}{Oxyz}$ у ДПСК $Oxyz$, то

$$\vec{r}=\vec{r}_0+W\cdot\underset{\sim}{\vec{r}} \tag{5}$$

де $\vec{r}=\|\,x\ y\ z\,\|_*$; $\underset{\sim}{\vec{r}}=\|\,\underset{\sim}{x}\ \underset{\sim}{y}\ \underset{\sim}{z}\,\|_*$; $\vec{r}_0=\|\,x_0\ y_0\ z_0\|_*$; W - матриця напрямних косинусів осей ДПСК $\underset{\sim}{Oxyz}$ у ДПСК $Oxyz$. Многочлен (1) має в ДПСК $\underset{\sim}{Oxyz}$ вигляд

$$U=\vec{T}[\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{z}]\cdot\underset{\sim}{\vec{u}}=\underset{\sim}{\vec{T}}\cdot\underset{\sim}{\vec{u}}, \tag{6}$$

де $\underset{\sim}{\vec{T}}$, $\underset{\sim}{\vec{u}}$ - відповідно, рядок Тейлора і стовпець похідних, обчислені в ДПСК $\underset{\sim}{Oxyz}$. Як бачимо, перехід до ДПСК $\underset{\sim}{Oxyz}$ в евклідовому просторі відповідає переходу до нового базису в лінійному просторі

T_n. Таким чином, рядок Тейлора та стовпець похідних перетворюються під час переходу від ДПСК *Oxyz* до ДПСК $\underset{\sim}{O}\underset{\sim}{x}\underset{\sim}{y}\underset{\sim}{z}$ за формулами

$$\vec{T}[\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z}] = \vec{T}[x, y, z] \cdot \Phi; \tag{7}$$

$$\underset{\sim}{\vec{u}} = \Phi^{-1}\vec{u}, \tag{8}$$

де Φ - матриця переходу до нового базису в лінійному просторі T_n, елементи якої визначаються параметрами перетворення (5). Виведення виразів елементів матриці Φ та її конкретний вигляд при n=3 наведено в додатках.

З порівняння (1) та (6) випливає, що многочлен Тейлора є інваріантним під час лінійних перетворень ДПСК, і ця інваріантність має два аспекти: вигляд многочлена в усіх ДПСК є однаковим, і його значення не залежить від того, в якій ДПСК його обчислено.

Нехай функція $U = U[x,y,z]$ задана таблично, тобто сукупністю її значень $U_1,\ldots,U_p$, що відповідають точкам $Q_1,\ldots,Q_p$ евклідового простору. Множину цих точок називатимемо комплектом, точки - вузлами, а значення функції в точках - вузловими значеннями таблично заданої функції (ТЗФ). Для такої ТЗФ можна визначити інтерполянту у вигляді многочлена Тейлора наступним способом. Застосувавши многочлен (1) почергово до кожного з вузлів, отримуємо лінійну САР

$$T \cdot \vec{u} = \vec{U}, \tag{9}$$

де

$$T = \begin{Vmatrix} 1 \; x_1 \; y_1 \; z_1 \; x_1^2/2! \; \ldots \; x_1^{\alpha_x} y_1^{\alpha_y} z_1^{\alpha_z}/(\alpha_x!\alpha_y!\alpha_z!) \; \ldots \; z_1^n/n! \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \; x_p \; y_p \; z_p \; x_p^2/2! \; \ldots \; x_p^{\alpha_x} y_p^{\alpha_y} z_p^{\alpha_z}/(\alpha_x!\alpha_y!\alpha_z!) \; \ldots \; z_p^n/n! \end{Vmatrix}; \; \vec{U} = \begin{Vmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_p \end{Vmatrix} \tag{10}$$

- відповідно, матриця Тейлора і вузловий стовпець ТЗФ. Комплект, вузли якого не належать одній поверхні n-го порядку, називатимемо невиродженим. Матриця Тейлора для такого комплекту є невиродженою, і тоді

$$\vec{U} = T^{-1}\vec{u}. \tag{11}$$

Підставивши (11) в (1), отримуємо вираз інтерполянти даної ТЗФ

$$U = \vec{T}[x,y,z] \; T^{-1}\vec{U}. \tag{12}$$

У дисертації на прикладах конкретних ТЗФ показано, що при інтерполяції неповними многочленами отримуємо для точки, що не збігається ні з одним із вузлів, різні інтерпольовані значення функції, в залежності від того, яка ДПСК вибрана для обчислень, тоді як при інтерполяції многочленом Тейлора результат є в усіх ДПСК однаковим.

Частинна похідна рядка Тейлора за кожною з незалежних змінних - це рядок розміру P, в якому $P' = (3+n-1)!/(3!(n-1)!)$ елементів формуються з P' перших елементів рядка (2), а решта елементів - нулі, тому

$$\partial\vec{T}/\partial x = \vec{T}N_x;\ \partial\vec{T}/\partial y = \vec{T}N_y;\ \partial\vec{T}/\partial z = \vec{T}N_z, \quad (13)$$

де N_x, N_y, N_z - квадратні вироджені матриці розміру P рангу P', в яких P' елементів дорівнюють одиниці, а решта - нулеві.

Вирази похідних інтерполянти (12) з урахуванням (13) мають вигляд

$$\partial U/\partial x = \vec{T}N_x T^{-1}\vec{U};\ \partial U/\partial y = \vec{T}N_y T^{-1}\vec{U};\ \partial U/\partial z = \vec{T}N_z T^{-1}\vec{U}. \quad (14)$$

Градієнт інтерполянти ТЗФ визначається за формулою

$$\mathrm{grad}\,U = \nabla U = \nabla\vec{T}\,[x, y, z]\ T^{-1}\vec{U}, \quad (15)$$

де ∇ - ДО Гамільтона, який в ДПСК $Oxyz$ має вигляд

$$\nabla = \bar{i}\cdot\partial/\partial x + \bar{j}\cdot\partial/\partial y + \bar{k}\cdot\partial/\partial z. \quad (16)$$

З урахуванням (13)-(16)

$$\mathrm{grad}\,U = \bar{i}\cdot\vec{T}N_x T^{-1}\vec{U} + \bar{j}\cdot\vec{T}N_y T^{-1}\vec{U} + \bar{k}\cdot\vec{T}N_z T^{-1}\vec{U} = \vec{T}\bar{N}T^{-1}\vec{U}, \quad (17)$$

де

$$\bar{N} = \bar{i}\cdot N_x + \bar{j}\cdot N_y + \bar{k}\cdot N_z \quad (18)$$

- матриця Гамільтона.

Згідно з доведеною в роботі Теоремою 1 матриця Гамільтона є матрицею лінійного перетворення у лінійному просторі T_n многочленів Тейлора до n-го степеня включно і при зміні базису цього простору її елементи перетворюються як компоненти тензора з ко- та контраваріантною валентностями, рівними одиниці. Вказане лінійне перетворення є різницевим аналогом оператора Гамільтона у просторі T_n.

Похідна в напрямі одиничного вектора $\bar{n} = \bar{i}n_x + \bar{j}n_y + \bar{k}n_z$, лапласіан і похідна виду $\partial^{\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z}/\partial x^{\alpha_x}\partial y^{\alpha_y}\partial z^{\alpha_z}$ інтерполянти ТЗФ визначаються відповідно за формулами

$$\bar{n}\cdot\mathrm{grad}\,U = \bar{n}\cdot\nabla U = \vec{T}(\bar{n}\bar{N})T^{-1}\vec{U};\ \Delta U = \nabla^2 U = \vec{T}\bar{N}^2 T^{-1}\vec{U}; \quad (19)$$

$$\partial^{\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z}/\partial x^{\alpha_x}\partial y^{\alpha_y}\partial z^{\alpha_z}U = \vec{T}N_x^{\alpha_x}N_y^{\alpha_y}N_z^{\alpha_z}T^{-1}\vec{U}.$$

Для векторної функції $\bar{U} = \bar{U}\,[x, y, z]$, заданої таблично, інтерпольоване значення, дивергенція і ротор визначаються за формулами

$$\bar{U} = \vec{T}T^{-1}\vec{\bar{U}};\ \mathrm{div}\,\bar{U} = \nabla U = \vec{T}\bar{N}T^{-1}\vec{\bar{U}};\ \mathrm{rot}\,\bar{U} = \nabla\times\bar{U} = (\vec{T}\bar{N}T^{-1})\times\vec{\bar{U}}, \quad (20)$$

де $\vec{\bar{U}} = \|\ \bar{U}_1\ \ldots\ \bar{U}_P\|_*$ - стовпець вузлових значень ТЗФ.

Застосувавши формули (14), (15), (19), (20) до p-го вузла, маємо

$$(\partial U/\partial x)_p = \vec{R}_{xp}\vec{U};\ (\partial U/\partial y)_p = \vec{R}_{yp}\vec{U};\ (\partial U/\partial z)_p = \vec{R}_{zp}\vec{U};$$

$$(\partial^{\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z}/\partial x^{\alpha_x}\partial y^{\alpha_y}\partial z^{\alpha_z}U)_p = \vec{R}_{\alpha_x\alpha_y\alpha_z}\vec{U};$$

$$(\nabla U)_p = \vec{\vec{R}}_{\nabla p}\vec{U};\ (\bar{n}\nabla U)_p = \vec{R}_{\bar{n}\nabla p}\vec{U};\ (\nabla^2 U)_p = \vec{R}_{\nabla^2 p}\vec{U};$$

$$(\nabla \bar{U})_p = \vec{\vec{R}}_{\nabla p}\vec{\vec{U}};\ (\nabla\cdot\bar{U})_p = \vec{\vec{R}}_{\nabla p}\cdot\vec{\vec{U}}, \tag{21}$$

де

$$\vec{R}_{xp} = \vec{T}_p N_x T^{-1};\ \vec{R}_{yp} = \vec{T}_p N_y T^{-1};\ \vec{R}_{zp} = \vec{T}_p N_z T^{-1};\ \vec{R}_{\alpha_x\alpha_y\alpha_z} = \vec{T} N_x^{\alpha_x} N_y^{\alpha_y} N_z^{\alpha_z} T^{-1};$$

$$\vec{\vec{R}}_{\nabla p} = \vec{\vec{T}}_p \bar{N} T^{-1} = \bar{i}\cdot\vec{T}_p N_x T^{-1} + \bar{j}\cdot\vec{T}_p N_y T^{-1} + \bar{k}\cdot\vec{T}_p N_z T^{-1} = \bar{i}\cdot\vec{R}_{xp} + \bar{j}\cdot\vec{R}_{yp} + \bar{k}\cdot\vec{R}_{zp};$$

$$\vec{R}_{\bar{n}\nabla p} = \vec{T}_p(\bar{n}\bar{N})T^{-1} = n_x\vec{T}_p N_x T^{-1} + n_y\vec{T}_p N_y T^{-1} + n_z\vec{T}_p N_z T^{-1} = n_x\vec{R}_{xp} + n_y\vec{R}_{yp} + n_z\vec{R}_{zp};$$

$$\vec{R}_{\nabla^2 p} = \vec{T}_p \bar{N}^2 T^{-1} = \vec{T}_p N_x^2 T^{-1} + \vec{T}_p N_y^2 T^{-1} + \vec{T}_p N_z^2 T^{-1} = \vec{R}_{x^2 p} + \vec{R}_{y^2 p} + \vec{R}_{z^2 p}; \tag{22}$$

- матриці-рядки, які перетворюють матрицю-стовпець вузлових значень скалярної ТЗФ відповідно в значення частинних похідних $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, градієнта, похідної в напрямі $\bar{n}$, лапласіана та похідної виду $\partial^{\alpha_x+\alpha_y+\alpha_z}/\partial x^{\alpha_x}\partial y^{\alpha_y}\partial z^{\alpha_z}$ інтерполянти цієї ТЗФ у p-му вузлі комплекту чи матрицю-стовпець вузлових значень векторної ТЗФ у значення дивергенції та ротора інтерполянти цієї ТЗФ у p-му вузлі. За означенням, вони є різницевими аналогами відповідних ДО в p-му вузлі. Серед них особлива роль належить різницевому аналогові $\vec{\vec{R}}_{\nabla p}$ ДО Гамільтона, оскільки він, як і оператор ∇, є спільним для градієнта скалярної ТЗФ і дивергенції й ротора векторної ТЗФ.

Усі викладені співвідношення безпосередньо придатні для двовимірного евклідового простору, причому тут

$$P = (2+n)!/(2!n!) \tag{23}$$

Відомо, що ДО, які визначаються через оператор ∇, є інваріантними відносно групи лінійних перетворень ДПСК. Згідно з доведеною в роботі Теоремою 2 різницеві аналоги ДО (РАДО), які визначаються через матрицю $\bar{N}$, є також інваріантними.

Якщо для конкретного комплекту матриця Тейлора є невиродженою, то існує єдина обернена до неї матриця, тому РАДО, обчислювані за формулами (22), є єдиними. Отже, якщо для даного ДО при конкретному комплекті пропонується в літературі декілька різних РАДО і один з них збігається з визначеним за відповідною з наведених вище формулою, то він є інваріантним, а всі інші - неінваріантними. Цей висновок дозволяє перевірити на інваріантність будь-який з відомих у літературі РАДО. Наведемо найважливіші результати такої перевірки.

Для ДО Лапласа в центральному вузлі комплекту, зображеного на рис.1, отримано різницевий аналог

$$(1/(8S^2)\ \|\ -(c_1^2+c_2^2+c_3^2)\quad (-c_1^2+c_2^2+c_3^2)\quad (-c_2^2+c_3^2+c_1^2)\quad (-c_3^2+c_1^2+c_2^2)$$
$$(-c_1^2+c_2^2+c_3^2)\quad (-c_2^2+c_3^2+c_1^2)\quad (-c_3^2+c_1^2+c_2^2)\quad 0\quad 0\quad 0\ \|, \tag{24}$$

де S - площа трикутника зі сторонами c_1, c_2, c_3. В літературі відомий тільки окремий випадок РАДО (24), що відповідає умові $c_1=c_2=c_3=c$.

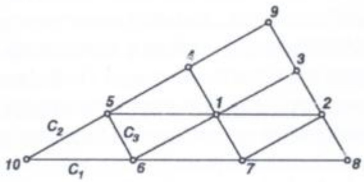

Рис.1

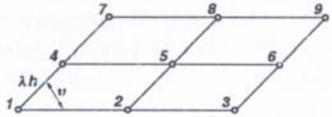

Рис.2

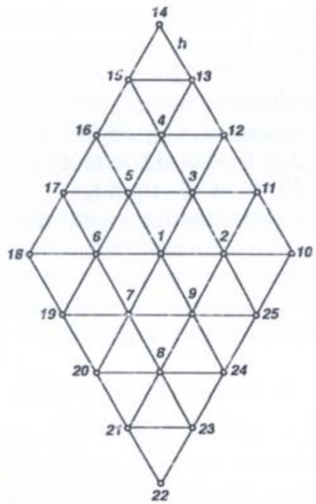

Рис.4

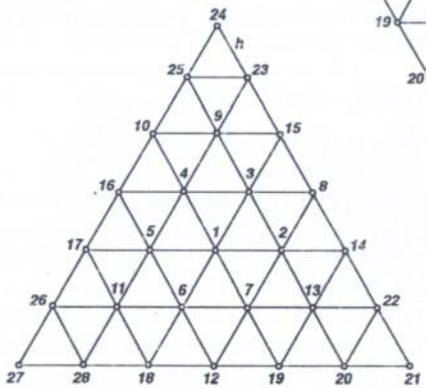

Рис.3

Тут комплект містить 10 вузлів і, отже, він відповідає третьому степеневі інтерполяційного многочлена ТЗФ, тому РАДО (24) має другий порядок похибки апроксимації. Відомий РАДО

$1/(2\lambda^2 h^2 \sin\vartheta)\| \ -\lambda\cos\vartheta \ \ 2 \ \ \lambda\cos\vartheta \ \ 2\lambda^2 \ -4(1+\lambda^2) \ \ 2\lambda^2 \ \ \lambda\cos\vartheta \ \ 2 \ -\lambda\cos\vartheta \ \|$ (25)

для комплекту, зображеного на рис.2, за даними [*] також має другий порядок похибки апроксимації. Аналіз показав, що для комплекту рис.2 за будь-якого розташування десятого вузла не існує інтерполяційного многочлена третього степеня, оскільки матриця Тейлора завжди буде виродженою. Таким чином, РАДО (25) є неінваріантним.

Для бігармонічного ДО ∇^4 інваріантний різницевий аналог у центральному вузлі комплекту, зображеного на рис.3, - це рядок

$16/(9h^4)\| 12 \ -3 \ -3 \ -3 \ -3 \ -3 \ -3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ldots 0 \|$ (26)

Він відповідає многочленові 6-го степеня (P=28) і, отже, має 2-й порядок похибки апроксимації. Він наведений у [*]. Але нами виявлено в [*] і [**] ще два РАДО ∇^4 на цьому ж комплекті, а саме

$16/(9h^4)\| 6 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ldots 0 \|$ (27)

$4\ /(9h^4)\| 42 \ -10 \ -10 \ -10 \ -10 \ -10 \ -10 \ \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ldots 0 \|$ (28)

З наведеного вище випливає, що вони є неінваріантними.

Для відомого з [*] РАДО ∇^4

$1/(9h^4)\ \| 320 \ \ 0 \ -120 \ \ 32 \ -120 \ \ 0 \ -120 \ \ 32 \ -120 \ \ 1 \ \ 8 \ \ 16 \ \ 0 \ -1 \ \ 0 \ \ 16 \ \ 8 \ \ 1 \ \ 8$
$16 \ \ 0 \ -1 \ \ 0 \ \ 16 \ \ 8 \ \|,$ (29)

що відповідає комплектові, зображеному на рис.4, доведено, що він, як і (25), є неінваріантним.

Застосувавши формули (21) до кожного з вузлів комплекту й об'єднавши значення однойменних похідних у відповідні вектори-стовпці, отримуємо формули

$$\overrightarrow{\partial U/\partial x} = \text{Д}_x\vec{U}; \quad \overrightarrow{\partial U/\partial y} = \text{Д}_y\vec{U}; \quad \overrightarrow{\partial U/\partial z} = \text{Д}_z\vec{U};$$
$$\overrightarrow{\nabla U} = \bar{\text{Д}}_\nabla\vec{U}; \ \overrightarrow{\bar{n}\nabla U} = \text{Д}_{n\nabla}\vec{U}; \ \overrightarrow{\nabla^2 U} = \text{Д}_{\nabla^2}\vec{U}; \ \overrightarrow{\nabla\vec{U}} = \bar{\text{Д}}_\nabla\vec{U}; \ \overrightarrow{\nabla\times\vec{U}} = \bar{\text{Д}}_{\nabla\times}\vec{\vec{U}}, \qquad (30)$$

де

$$\text{Д}_x = TN_xT^{-1}; \quad \text{Д}_y = TN_yT^{-1}; \quad \text{Д}_z = TN_zT^{-1};$$
$$\bar{\text{Д}}_\nabla = T\bar{N}T^{-1} = \bar{i}\text{Д}_x + \bar{j}\text{Д}_y + \bar{k}\text{Д}_z; \ \text{Д}_{\bar{n}\nabla} = T\bar{n}\bar{N}T^{-1} = n_x\text{Д}_x + n_y\text{Д}_y + n_z\text{Д}_z;$$
$$\text{Д}_{\nabla^2} = T\bar{N}^2T^{-1} = TN_x^2T^{-1} + TN_y^2T^{-1} + TN_z^2T^{-1} = \text{Д}_{x^2} + \text{Д}_{y^2} + \text{Д}_{z^2} \qquad (31)$$

- квадратні матриці розміру P, рядки яких - це відповідні РАДО у вузлах комплекту. Ці матриці є операторами, що перетворюють стовпець вузлових значень ТЗФ у стовпці вузлових значень відповідних похідних цієї ТЗФ, і за означенням вони є дискретними аналогами відповідних диференційних операторів (ДАДО).

---

* Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1978.

** Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. - Киев: Вища школа, 1979.

РАДО використовуються для алгебраїзації ДР у методі скінченних різниць, а ДАДО - для їх алгебраїзації в методі колокації.

У **другому розділі** викладено алгоритми розв'язування крайових задач електро- та магнітостатики методом колокації на підставі ТІНФ.

У методі колокації розв'язок КЗ шукають для кожної зі змінних стану поля у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних базисних функцій, а її коефіцієнти визначають із системи рівнянь, яка складається з двох підсистем: першу отримують у результаті підставлення розв'язку задачі в рівняння поля стосовно до вибраних внутрішніх вузлів колокації, а другу - застосуванням цього ж виразу до граничних вузлів.

Нами не виявлено в літературі алгоритмів розв'язування методом колокації КЗ електро- та магнітостатики з урахуванням неоднорідності, нелінійності й анізотропії середовищ, а також рекомендацій щодо умов, які повинні задовільняти системи базисних функцій (крім їх лінійної незалежності), кількості внутрішніх і граничних вузлів колокації та взаємне розташування вузлів. Усі ці питання однозначно й вичерпно розв'язуються на підставі ТІНФ.

У дисертації викладено алгоритми розв'язування методом колокації шести типових тривимірних КЗ першого роду, а саме задач розрахунку електричного, магнітного потенціального та магнітного вихрового полів за умови, що область розрахунку поля заповнена найпростішим - лінійним однорідним ізотропним - чи найскладнішим - нелінійним неоднорідним анізотропним середовищем.

Проілюструємо сутність пропонованого методу стосовно до найскладнішої з названих КЗ - розрахунку вихрового магнітного поля в області G з границею $Г$, заповненій нелінійним неоднорідним анізотропним середовищем, тобто на КЗ

$$\nabla\times\bar{H}[\bar{r}] = \bar{J}[\bar{r}] \ (\bar{r} \in G); \qquad (32) \qquad \bar{B}[\bar{r}] = \nabla\times\bar{A}[\bar{r}] \ (\bar{r} \in G, Г); \qquad (33)$$

$$\bar{H}[\bar{r}] = \bar{H}[\bar{B},\bar{r}] \ (\bar{r} \in G, Г) \qquad (34) \qquad \bar{A}[\bar{r}] = \bar{A}_{г}[\bar{r}] \ (\bar{r} \in Г), \qquad (35)$$

де $\bar{H}[\bar{r}]$, $\bar{B}[\bar{r}]$, $\bar{A}[\bar{r}]$ - залежності, відповідно, вектора напруженості магнітного поля, вектора магнітної індукції та вектора магнітного потенціалу від радіуса-вектора $\bar{r} = \bar{i}x+\bar{j}y+\bar{k}z$ точки області, які є невідомими функціями; $\bar{J}[\bar{r}]$ - задана залежність вектора густини струму від $\bar{r}$; $\bar{A}_{г}[\bar{r}]$ - задана залежність вектора магнітного потенціалу від $\bar{r}$.

Шукатимемо функції $\bar{H} = \bar{H}[\bar{r}]$, $\bar{B}=\bar{B}[\bar{r}]$, $\bar{A} = \bar{A}[\bar{r}]$ у класі многочленів Тейлора n-го степеня, тобто

$$\bar{H}\,[x,y,z] = \vec{T}\,[x,y,z]\vec{\bar{h}}; \ \bar{B}\,[x,y,z] = \vec{T}\,[x,y,z]\vec{\bar{b}}; \ \bar{A}\,[x,y,z] = \vec{T}\,[x,y,z]\vec{\bar{a}}, \qquad (36)$$

де

$$\vec{\bar{h}} = \|\bar{h}_1 \ \dots \ \bar{h}_p\|_*; \ \vec{\bar{b}} = \|\bar{b}_1 \ \dots \ \bar{b}_p\|_*; \ \vec{\bar{a}} = \|\bar{a}_1 \ \dots \ \bar{a}_p\|_* \qquad (37)$$

- стовпці похідних многочленів (36). Наклавши на границю $Г$ області $L_{г}$ граничних вузлів і на область G (без її границі) - $L_G = P-L_{г}$ вузлів, запишемо многочлени (36) у вигляді

$$\bar{H} = \vec{T}[x,y,z] \cdot T^{-1}\vec{\vec{H}};\ \bar{B} = \vec{T}[x,y,z] \cdot T^{-1}\vec{\vec{B}};\ \bar{A} = \vec{T}[x,y,z] \cdot T^{-1}\vec{\vec{A}}, \quad (38)$$

де

$$\vec{\vec{H}} = \|\bar{H}_1 \ \dots \ \bar{H}_P\|_*;\ \vec{\vec{B}} = \|\bar{B}_1 \ \dots \ \bar{B}_P\|_*;\ \vec{\vec{A}} = \|\bar{A}_1 \ \dots \ \bar{A}_P\|_* \quad (39)$$

- стовпці вузлових значень функцій $\bar{H}[\bar{r}]$, $\bar{B}[\bar{r}]$, $\bar{A}[\bar{r}]$.

Застосувавши ДР (32) почергово до кожного з L_G внутрішніх вузлів і ДР (33) - почергово до кожного з P вузлів, отримуємо з урахуванням (30) дискретні аналоги цих рівнянь

$$C_G \bar{Д}_\nabla \times \vec{\vec{H}} = \vec{\vec{J}}; \quad \vec{\vec{B}} = \bar{Д}_\nabla \times \vec{\vec{A}}, \quad (40)$$

де $C_G = \|I_G \ 0\|$ - матриця, що складається з одиничної матриці розміру L_G і нульової - розміру $L_G \times L_\Gamma$; $\vec{\vec{J}} = \|\bar{J}_1 \ \dots \ \bar{J}_{L_G}\|_*$ - вузловий стовпець густин струму.

Застосувавши залежність (34) почергово до кожного з P вузлів, отримуємо векторну функцію

$$\vec{\vec{H}} = \vec{\vec{H}}[\vec{\vec{B}}]. \quad (41)$$

Застосувавши граничну умову (35) до кожного з L_Γ граничних вузлів, отримуємо векторну функцію

$$C_\Gamma \vec{\vec{A}} = \vec{\vec{A}}_\Gamma, \quad (42)$$

де $C_\Gamma = \|0 \ I_\Gamma\|$ - матриця, що складається з нульової матриці розміру $L_\Gamma \times L_G$ й одиничної - розміру L_Γ.

САР (40)-(42) є дискретним аналогом диференційної КЗ (32)-(35).

Оскільки

$$\vec{\vec{H}} = \bar{i} \cdot \vec{H}_x + \bar{j} \cdot \vec{H}_y + \bar{k} \cdot \vec{H}_z;\ \vec{\vec{B}} = \bar{i} \cdot \vec{B}_x + \bar{j} \cdot \vec{B}_y + \bar{k} \cdot \vec{B}_z;\ \vec{\vec{A}} = \bar{i} \cdot \vec{A}_x + \bar{j} \cdot \vec{A}_y + \bar{k} \cdot \vec{A}_z, \quad (43)$$

де

$$\vec{H}_x = \|H_{x1} \ \dots \ H_{xP}\|_*;\ \vec{H}_y = \|H_{y1} \ \dots \ H_{yP}\|_*;\ \vec{H}_z = \|H_{z1} \ \dots \ H_{zP}\|_*;$$
$$\vec{B}_x = \|B_{x1} \ \dots \ B_{xP}\|_*;\ \vec{B}_y = \|B_{y1} \ \dots \ B_{yP}\|_*;\ \vec{B}_z = \|B_{z1} \ \dots \ B_{zP}\|_*;$$
$$\vec{A}_x = \|A_{x1} \ \dots \ A_{xP}\|_*;\ \vec{A}_y = \|A_{y1} \ \dots \ A_{yP}\|_*;\ \vec{A}_z = \|A_{z1} \ \dots \ A_{zP}\|_* \quad (44)$$

- стовпці проекцій векторів $\bar{H}$, $\bar{B}$, $\bar{A}$ на осі ДПСК $Oxyz$, то системі (40)-(42) відповідає САР

$$C_G(Д_y\vec{H}_z - Д_z\vec{H}_y) - \vec{J}_x = 0;\ C_G(Д_z\vec{H}_x - Д_x\vec{H}_z) - \vec{J}_y = 0;\ C_G(Д_x\vec{H}_y - Д_y\vec{H}_x) - \vec{J}_z = 0; \quad (45)$$

$$\vec{B}_x = Д_y\vec{A}_z - Д_z\vec{A}_y;\quad \vec{B}_y = Д_z\vec{A}_x - Д_x\vec{A}_z;\quad \vec{B}_z = Д_x\vec{A}_y - Д_y\vec{A}_x; \quad (46)$$

$$\vec{H}_x = \vec{H}_x[\vec{B}_x, \vec{B}_y, \vec{B}_z];\ \vec{H}_y = \vec{H}_y[\vec{B}_x, \vec{B}_y, \vec{B}_z];\ \vec{H}_z = \vec{H}_z[\vec{B}_x, \vec{B}_y, \vec{B}_z]; \quad (47)$$

$$\vec{A}_x = C_{G*}\vec{A}_{xG} + C_{\Gamma*}\vec{A}_{x\Gamma};\ \vec{A}_y = C_{G*}\vec{A}_{yG} + C_{\Gamma*}\vec{A}_{y\Gamma};\ \vec{A}_z = C_{G*}\vec{A}_{zG} + C_{\Gamma*}\vec{A}_{z\Gamma}; \quad (48)$$

де $\vec{A}_{jG}$, $\vec{A}_{j\Gamma}$ $(j = x,y,z)$ - стовпці проекцій вектора потенціалу відповідно у внутрішніх і граничних вузлах.

САР (45)-(48) нелінійна, оскільки вона містить нелінійні рівняння

(47). Для її розв'язування застосуємо метод Ньютона. Лінійна САР, породжувана нелінійною САР (45)-(48) на m-й ітерації, - це

$$C_G(\text{Д}_y\overrightarrow{\Delta H_z}-\text{Д}_z\overrightarrow{\Delta H_y}) = -\vec{M}_{xG};\ C_G(\text{Д}_z\overrightarrow{\Delta H_x}-\text{Д}_x\overrightarrow{\Delta H_z}) = -\vec{M}_{yG};$$

$$C_G(\text{Д}_x\overrightarrow{\Delta H_y}-\text{Д}_y\overrightarrow{\Delta H_x}) = -\vec{M}_{zG}; \tag{49}$$

$$\overrightarrow{\Delta B_x} = \text{Д}_y\overrightarrow{\Delta A_z}-\text{Д}_z\overrightarrow{\Delta A_y};\ \overrightarrow{\Delta B_y} = \text{Д}_z\overrightarrow{\Delta A_x}-\text{Д}_x\overrightarrow{\Delta A_z};\ \overrightarrow{\Delta B_z} = \text{Д}_x\overrightarrow{\Delta A_y}-\text{Д}_y\overrightarrow{\Delta A_x}; \tag{50}$$

$$\overrightarrow{\Delta H_x} = \nu_{xx}\overrightarrow{\Delta B_x}+\nu_{xy}\overrightarrow{\Delta B_y}+\nu_{xz}\overrightarrow{\Delta B_z};\ \ \overrightarrow{\Delta H_y} = \nu_{yx}\overrightarrow{\Delta B_x}+\nu_{yy}\overrightarrow{\Delta B_y}+\nu_{yz}\overrightarrow{\Delta B_z};$$

$$\overrightarrow{\Delta H_z} = \nu_{zx}\overrightarrow{\Delta B_x}+\nu_{zy}\overrightarrow{\Delta B_y}+\nu_{zz}\overrightarrow{\Delta B_z}; \tag{51}$$

$$\overrightarrow{\Delta A_x} = C_{G*}\overrightarrow{\Delta A_{xG}};\ \overrightarrow{\Delta A_y} = C_{G*}\overrightarrow{\Delta A_{yG}};\ \overrightarrow{\Delta A_z} = C_{G*}\overrightarrow{\Delta A_{zG}}, \tag{52}$$

де $\overrightarrow{\Delta H_j}, \overrightarrow{\Delta B_j}, \overrightarrow{\Delta A_j}, \overrightarrow{\Delta A_{jG}}$ $(j=x,y,z)$ - поправки векторів $\vec{H}_j, \vec{B}_j, \vec{A}_j, \vec{A}_{jG}$ на m-й ітерації; $\vec{M}_{xG}, \vec{M}_{yG}, \vec{M}_{zG}$ - стовпці нев'язок рівнянь (45), обчислені за $(m$-$1)$-м наближенням кореня САР (45)-(48);

$$\nu_{jk} = \partial\vec{H}_j/\partial\vec{B}_k = \text{diag}[\partial H_{j1}/\partial B_{k1},\ldots,\partial H_{jP}/\partial B_{kP}] = \text{diag}[\nu_{jk1},\ldots,\nu_{jkP}]\ (j,k=x,y,z) \tag{53}$$

- матриці, діагональні елементи яких - це значення однойменних компонентів тензора диференційного питомого магнітного опору середовища

$$\nu = \frac{d\bar{H}}{d\bar{B}} = \begin{Vmatrix} \partial H_{xp}/\partial B_{xp} & \partial H_{xp}/\partial B_{yp} & \partial H_{xp}/\partial B_{zp} \\ \partial H_{yp}/\partial B_{xp} & \partial H_{yp}/\partial B_{yp} & \partial H_{yp}/\partial B_{zp} \\ \partial H_{zp}/\partial B_{xp} & \partial H_{zp}/\partial B_{yp} & \partial H_{zp}/\partial B_{zp} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \nu_{xxp} & \nu_{xyp} & \nu_{xzp} \\ \nu_{yxp} & \nu_{yyp} & \nu_{yzp} \\ \nu_{zxp} & \nu_{zyp} & \nu_{zzp} \end{Vmatrix}, \tag{54}$$

обчислені у вузлах комплекту за $(m$-$1)$-м наближенням кореня САР.

Рівняння (49) зводяться з урахуванням (50)-(52) до вигляду

$$F_{xx}\overrightarrow{\Delta A_{xG}}+F_{xy}\overrightarrow{\Delta A_{yG}}+F_{xz}\overrightarrow{\Delta A_{zG}} = M_{xG};\ \ F_{yx}\overrightarrow{\Delta A_{xG}}+F_{yy}\overrightarrow{\Delta A_{yG}}+F_{yz}\overrightarrow{\Delta A_{zG}} = M_{yG};$$

$$F_{zx}\overrightarrow{\Delta A_{xG}}+F_{zy}\overrightarrow{\Delta A_{yG}}+F_{zz}\overrightarrow{\Delta A_{zG}} = M_{zG}, \tag{55}$$

де

$$\begin{aligned}
F_{xx} &= C_G(-\text{Д}_y\nu_{zy}\text{Д}_z+\text{Д}_z\nu_{yy}\text{Д}_z+\text{Д}_y\nu_{zz}\text{Д}_y-\text{Д}_z\nu_{yz}\text{Д}_y)C_{G*};\\
F_{xy} &= C_G(\text{Д}_y\nu_{zx}\text{Д}_z-\text{Д}_z\nu_{yx}\text{Д}_z-\text{Д}_y\nu_{zz}\text{Д}_x+\text{Д}_z\nu_{yz}\text{Д}_x)C_{G*};\\
F_{xz} &= C_G(-\text{Д}_y\nu_{zx}\text{Д}_y+\text{Д}_z\nu_{yx}\text{Д}_y+\text{Д}_y\nu_{zy}\text{Д}_x-\text{Д}_z\nu_{yy}\text{Д}_x)C_{G*};\\
F_{yx} &= C_G(-\text{Д}_z\nu_{xy}\text{Д}_z+\text{Д}_x\nu_{zy}\text{Д}_z+\text{Д}_z\nu_{xz}\text{Д}_y-\text{Д}_x\nu_{zz}\text{Д}_y)C_{G*};\\
F_{yy} &= C_G(\text{Д}_z\nu_{xx}\text{Д}_z-\text{Д}_x\nu_{zx}\text{Д}_z+\text{Д}_z\nu_{xz}\text{Д}_x-\text{Д}_x\nu_{zz}\text{Д}_x)C_{G*};\\
F_{yz} &= C_G(-\text{Д}_z\nu_{xx}\text{Д}_y+\text{Д}_x\nu_{zx}\text{Д}_y+\text{Д}_z\nu_{xy}\text{Д}_x-\text{Д}_x\nu_{zy}\text{Д}_x)C_{G*};\\
F_{zx} &= C_G(-\text{Д}_x\nu_{yy}\text{Д}_z+\text{Д}_y\nu_{xy}\text{Д}_x+\text{Д}_x\nu_{yz}\text{Д}_y-\text{Д}_y\nu_{xz}\text{Д}_y)C_{G*};\\
F_{zy} &= C_G(\text{Д}_x\nu_{yx}\text{Д}_z-\text{Д}_y\nu_{xx}\text{Д}_z-\text{Д}_x\nu_{yz}\text{Д}_x+\text{Д}_y\nu_{xz}\text{Д}_x)C_{G*};\\
F_{zz} &= C_G(-\text{Д}_x\nu_{yx}\text{Д}_y+\text{Д}_x\nu_{yy}\text{Д}_x-\text{Д}_y\nu_{xy}\text{Д}_x+\text{Д}_y\nu_{xx}\text{Д}_y)C_{G*};
\end{aligned}$$

- квадратні матриці розміру L_G.

Нульове наближення кореня САР (45)-(48) можна прийняти рівним нулеві. Якщо при цьому виявиться, що ітераційна процедура не збігається за 5-6 ітерацій, то належить скористатись комбінацією методу Ньютона з продовженням по параметру. При відсутності нелінійності, неоднорідності чи анізотропії середовища алгоритм є окремим випадком описаного вище алгоритму.

Згідно з доведеною в роботі Теоремою 3 дво- чи тривимірна КЗ електро- чи магнітостатики має розв'язок методом колокації з застосуванням інваріантних апроксимацій (і він є єдиним), якщо:

- загальна кількість вузлів колокації дорівнює кількості коефіцієнтів дво- чи тривимірного многочлена Тейлора n-го степеня, тобто належить до множини, що визначається формулою (4) чи (23);
- кількість граничних вузлів належить до множини, що визначається формулою $L_г = (n+1)!$ чи $L_г = 2n+1$;
- сукупність усіх вузлів не належить до поверхні (чи лінії) n-го порядку, тобто комплект вузлів колокації є невиродженим;
- сукупність внутрішніх вузлів не належить до поверхні (чи лінії) (n-2)-го порядку, тобто комплект вузлів є невиродженим.

Розроблені алгоритми не накладають принципових обмежснь на рівень складності конфігурації границі області розрахунку поля, рівень нелінійності, неоднорідності чи анізотропії середовища, однак доцільна сфера їх застосування лежить у межах $n \leq 10$.

Якщо область розрахунку поля є кусково-однорідною, тобто складається з розділених контактними поверхнями (лініями) підобластей, у межах кожної з яких середовище є однорідним чи неперервно неоднорідним, то розроблені в дисертації алгоритми можуть бути безпосередньо застосованими до цих підобластей, причому тоді значення потенціалу на контактних поверхнях (лініях) підлягають обчисленню.

Працездатність розроблених алгоритмів перевірена та їх точність проілюстрована на відповідних тестових задачах, що мають аналітичний розв'язок.

У третьому розділі викладено алгоритми розв'язування крайових задач електро- та магнітостатики методом скінченних різниць на підставі ТІНФ.

У методі скінченних різниць не існує заздалегідь однозначного зв'язку між кількостями внутрішніх і граничних вузлів області та жорстких обмежень на взаємне розташування вузлів. Для випадків, коли всередині області використовується регулярна сітка, а граничні (контоктні) поверхні не є координатними площинами, запропоновано алгоритм розташування граничних (контактних) вузлів.

У дисертації викладено алгоритми розв'язування методом скінченних різниць шести типових тривимірних КЗ другого роду, а саме задач розрахунку електричного, магнітного потенціального та магнітного вихрового полів за умови, що область розрахунку поля заповнена лінійним однорідним ізотропним або нелінійним неоднорідним анізотропним середовищем.

Проілюструємо сутність пропонованого методу стосовно до розрахунку потенціального електричного поля в області G з границею $Г$, заповненій нелінійним неоднорідним анізотропним середовищем, тобто КЗ

$\nabla \bar{D}[\bar{r}] = \rho[\bar{r}]$; $(\bar{r} \in G)$ (57) $\bar{E}[\bar{r}] = -\nabla U[\bar{r}]$; $(\bar{r} \in G, \Gamma)$ (58)

$\bar{D}[\bar{r}] = \bar{D}[\bar{E}, \bar{r}]$; $(\bar{r} \in G, \Gamma)$ (59) $U[\bar{r}] = U_D[\bar{r}]$; $(\bar{r} \in \Gamma_D)$ (60)

$$\bar{n}[\bar{r}]\bar{E}[\bar{r}] = E_N[\bar{r}] \; (\bar{r} \in \Gamma_N), \tag{61}$$

де $\bar{D}[\bar{r}]$, $\bar{E}[\bar{r}]$, $U[\bar{r}]$ - невідомі залежності, відповідно, вектора електричного зміщення, вектора напруженості електричного поля та електричного потенціалу від радіуса-вектора $\bar{r}$ точки області; $\rho[\bar{r}]$ - задана залежність об'ємної густини електричного заряду від $\bar{r}$; $U_D[\bar{r}]$ - задана залежність потенціалу від $\bar{r}$ на частині Γ_D границі Γ; $E_N[\bar{r}]$ - задана залежність нормальної складової вектора напруженості від $\bar{r}$ на частині Γ_N границі Γ; $\bar{n}[\bar{r}]$ - одиничний вектор нормалі до границі як задана векторна функція радіуса-вектора $\bar{r}$ на частині Γ_N границі Γ.

Накладемо на область розрахунку поля сітку. Занумеруємо внутрішні вузли числами від 1 до L_G, граничні вузли, що належать до частини Γ_N границі Γ, - числами від L_G+1 до L_G+L_N, і граничні вузли, що належать до частини Γ_D границі Γ, - числами від L_G+L_N+1 до $L=L_G+L_N+L_D$. Така нумерація названа базовою. Поставимо у відповідність l-му ($l=\overline{1,L}$) вузлові єдиний P-вузловий комплект n-го порядку. Для вузлів кожного комплекту введемо подвійну нумерацію, в якій перша частина вказує номер базового вузла комплекту в базовій нумерації, а друга - локальний номер вузла в комплекті. Відповідність між подвійною та базовою нумераціями визначається за таблицею, яка складається за наступним правилом: l-й рядок таблиці ($l=\overline{1,L}$) містить послідовно базові номери вузлів комплекту з подвійними номерами $l1,...,lP$. Очевидно, що номер базового вузла l-го комплекту дорівнює в базовій нумерації числу l.

Вважатимемо, що крок сітки є достатньо малим для того, щоб у межах комплекту можна було представити залежності $U=U[x,y,z]$, $D_x=D_x[x,y,z]$, $D_y=D_y[x,y,z]$, $D_z=D_z[x,y,z]$, $E_x=E_x[x,y,z]$, $E_y=E_y[x,y,z]$, $E_z=E_z[x,y,z]$ многочленами Тейлора n-го степеня.

Алгебраїзувавши з урахуванням (21) рівняння (57) у кожному з внутрішніх вузлів, отримуємо систему L_G алгебраїчних рівнянь

$$\overline{\overline{R}}_{\nabla,l}\,\bar{D}_l = \rho_l; \qquad (l=\overline{1,L_G}) \tag{62}$$

де $\overline{\overline{R}}_{\nabla,l}$ - РАДО Гамільтона в базовому вузлі l-го комплекту; $\bar{D}_l$ - стовпець значень вектора $\bar{D}$ у вузлах l-го комплекту; ρ_l - значення ρ в l-му вузлі.

Алгебраїзувавши з урахуванням (21) рівняння (58) у кожному з вузлів, отримаємо систему L алгебраїчних рівнянь

$$\bar{E}_l = -\vec{\vec{R}}_{\nabla,l}\vec{U}_l; \qquad (l=\overline{1,L}) \tag{63}$$

де $\bar{E}_l$ - значення вектора $\bar{E}$ в l-му вузлі; $\vec{U}_l$ - стовпець значень U у вузлах l-го комплекту.

Застосувавши залежність (59) почергово до кожного вузла, отримуємо сукупність L векторних залежностей

$$\bar{D}_l = \bar{D}[\bar{E}_l]; \qquad (l = \overline{1,L}) \tag{64}$$

де $\bar{D}_l$ - значення вектора $\bar{D}$ в l-му вузлі.

Застосувавши граничну умову (60) до кожного з L_D граничних вузлів, маємо

$$U_l = U_{D,l}. \qquad (l = \overline{L_G+L_N+1,L}) \tag{65}$$

Застосувавши граничну умову (61) до кожного з L_N граничних вузлів, маємо

$$\bar{n}_l\bar{E}_l = E_{Nl}; \qquad (l = \overline{L_G+1,L_G+L_N}) \tag{66}$$

де $\bar{n}_l$, E_{Nl} - відомі значення вектора n і напруженості E_N в l-му граничному вузлі.

Система (62)-(66) є дискретним аналогом диференційної КЗ (57)-(61). Представимо її з урахуванням (22) у проекціях на осі Ox, Oy, Oz.

$$\begin{aligned} &\vec{R}_{x1}\ \vec{D}_{x1} + \vec{R}_{y1}\ \vec{D}_{y1} + \vec{R}_{z1}\ \vec{D}_{z1} = \rho_1; \\ &\vdots \\ &\vec{R}_{xL_G}\ \vec{D}_{xL_G} + \vec{R}_{yL_G}\ \vec{D}_{yL_G} + \vec{R}_{zL_G}\ \vec{D}_{zL_G} = \rho_{L_G}. \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} &E_{x1} = -\vec{R}_{x1}\vec{U}_1; \quad &&E_{y1} = -\vec{R}_{y1}\vec{U}_1; \quad &&E_{z1} = -\vec{R}_{z1}\vec{U}_1; \\ &\vdots &&\vdots &&\vdots \\ &E_{xL} = -\vec{R}_{xL}\vec{U}_L; \quad &&E_{yL} = -\vec{R}_{yL}\vec{U}_L; \quad &&E_{zL} = -\vec{R}_{zL}\vec{U}_L. \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned} &D_{x1} = D_x[E_{x1}, E_{y1}, E_{z1}]; \quad &&D_{y1} = D_y[E_{x1}, E_{y1}, E_{z1}]; \quad &&D_{z1} = D_z[E_{x1}, E_{y1}, E_{z1}]; \\ &\vdots &&\vdots &&\vdots \\ &D_{xL} = D_x[E_{xL}, E_{yL}, E_{zL}]; \quad &&D_{yL} = D_y[E_{xL}, E_{yL}, E_{zL}]; \quad &&D_{zL} = D_z[E_{xL}, E_{yL}, E_{zL}]. \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} &n_{x,L_G+1}\ E_{x,L_G+1} + n_{y,L_G+1}\ E_{y,L_G+1} + n_{z,L_G+1}\ E_{z,L_G+1} = E_{N,L_G+1}; \\ &\vdots \\ &n_{x,L_G+L_N} E_{x,L_G+L_N} + n_{y,L_G+L_N} E_{y,L_G+L_N} + n_{z,L_G+L_N} E_{z,L_G+L_N} = E_{N,L_G+L_N}. \end{aligned} \tag{70}$$

Система (66)-(70) є дискретним аналогом диференційної КЗ (57)-(61), якщо б остання була сформульована в проекціях. Система складається з $7 \cdot L$ рівнянь і містить стільки ж невідомих: значення D_x, D_y, D_z, E_x, E_y, E_z, U в L вузлах.

Утворивши матриці

$$R_x = \mathrm{diag}(\vec{R}_{x1},\ldots,\vec{R}_{xL});\ R_y = \mathrm{diag}(\vec{R}_{y1},\ldots,\vec{R}_{yL});\ R_z = \mathrm{diag}(\vec{R}_{z1},\ldots,\vec{R}_{zL})$$

$$n_x = \mathrm{diag}(n_{x,L_G+1},\ldots,n_{x,L_G+L_N});\ n_y = \mathrm{diag}(n_{y,L_G+1},\ldots,n_{y,L_G+L_N});$$

$$n_z = \mathrm{diag}(n_{z,L_G+1},\ldots,n_{z,L_G+L_N})$$

та стовпці

$$\vec{D}_x=\|D_{x1}\ \dots\ D_{xL}\|_*;\ \vec{D}_y=\|D_{y1}\ \dots\ D_{yL}\|_*;\ \vec{D}_z=\|D_{z1}\ \dots\ D_{zL}\|_*;$$

$$\vec{E}_x=\|E_{x1}\ \dots\ E_{xL}\|_*;\ \vec{E}_y=\|E_{y1}\ \dots\ E_{yL}\|_*;\ \vec{E}_z=\|E_{z1}\ \dots\ E_{zL}\|_*;$$

$$\vec{U}=\|U_1\ \dots\ U_L\|_*;\ \vec{U}_D=\|U_{D,L_G+L_N+1}\ \dots\ U_{D,L}\|_*;\ \vec{U}_{Gr}=\|U_1\ \dots\ U_{L_G+L_N}\|_*;$$

$$\vec{\rho}=\|\rho_1\ \dots\ \rho_{L_G}\|_*;\ \vec{E}_N=\|E_{N,L_G+1}\ \dots\ E_{N,L_G+L_N}\|_*,$$

запишемо систему (66)-(70) у вигляді

$$C_G(R_xC\vec{D}_x+R_yC\vec{D}_y+R_zC\vec{D}_z)-\vec{\rho}=0; \quad (71)$$

$$\vec{E}_x=-R_xC\vec{U};\qquad \vec{E}_y=-R_yC\vec{U};\qquad \vec{E}_z=-R_zC\vec{U}; \quad (72)$$

$$\vec{D}_x=\vec{D}_x[\vec{E}_x,\vec{E}_y,\vec{E}_z];\ \vec{D}_y=\vec{D}_x[\vec{E}_x,\vec{E}_y,\vec{E}_z];\ \vec{D}_z=\vec{D}_x[\vec{E}_x,\vec{E}_y,\vec{E}_z]; \quad (73)$$

$$\vec{U}=C_D\vec{U}_D+C_{Gr}\vec{U}_{Gr}; \quad (74)$$

$$n_xC_N\vec{E}_x+n_yC_N\vec{E}_y+n_zC_N\vec{E}_z-\vec{E}_N=0, \quad (75)$$

де $C_G=(I_{L_G},0)$ - матриця, що складається з одиничної матриці розміру L_G та нульової - розміру $L_G{\times}(L_N+L_D)$; C - матриця відповідності між базовою та локальною нумераціями; $C_D=(0,I_{L_D})_*$ - матриця, що складається з нульової матриці розміру $(L_G+L_N){\times}L_D$ й одиничної - розміру L_D; $C_{Gr}=(I_{L_G+L_N},0)_*$ - матриця, що складається з одиничної матриці розміру L_G+L_N та нульової - розміру $L_D{\times}(L_G+L_N)$; $C_N=(0,I_{L_N},0)$ - матриця, що складається з нульової матриці розміру $L_N{\times}L_G$, одиничної - розміру L_N та нульової - розміру $L_N{\times}L_D$.

САР (71)-(75) нелінійна, оскільки вона містить нелінійні рівняння (73). Для її розв'язування застосуємо метод Ньютона. Лінійна САР, породжувана нелінійною САР (71)-(75) на m-й ітерації, має вигляд

$$C_G(R_xC\overrightarrow{\Delta D}_x+R_yC\overrightarrow{\Delta D}_y+R_zC\overrightarrow{\Delta D}_z)=-\vec{M}_G; \quad (76)$$

$$\overrightarrow{\Delta E}_x=-R_xC\overrightarrow{\Delta U};\qquad \overrightarrow{\Delta E}_y=-R_yC\overrightarrow{\Delta U};\qquad \overrightarrow{\Delta E}_z=-R_zC\overrightarrow{\Delta U}; \quad (77)$$

$$\overrightarrow{\Delta D}_x=\varepsilon_{xx}\overrightarrow{\Delta E}_x+\varepsilon_{xy}\overrightarrow{\Delta E}_y+\varepsilon_{xz}\overrightarrow{\Delta E}_z;\quad \overrightarrow{\Delta D}_y=\varepsilon_{yx}\overrightarrow{\Delta E}_x+\varepsilon_{yy}\overrightarrow{\Delta E}_y+\varepsilon_{yz}\overrightarrow{\Delta E}_z;$$

$$\overrightarrow{\Delta D}_z=\varepsilon_{zx}\overrightarrow{\Delta E}_x+\varepsilon_{zy}\overrightarrow{\Delta E}_y+\varepsilon_{zz}\overrightarrow{\Delta E}_z; \quad (78)$$

$$\overrightarrow{\Delta U}=C_{Gr}\overrightarrow{\Delta U}_{Gr}; \quad (79)$$

$$n_xC_N\overrightarrow{\Delta E}_x+n_yC_N\overrightarrow{\Delta E}_y+n_zC_N\overrightarrow{\Delta E}_z=-\vec{M}_N, \quad (80)$$

де $\overrightarrow{\Delta D}_j$, $\overrightarrow{\Delta E}_j$, $\overrightarrow{\Delta U}$, $\overrightarrow{\Delta U}_{Gr}$ $(j=x,y,z)$ - поправки векторів $\vec{D}_j$, $\vec{E}_j$, $\vec{U}$, $\vec{U}_{Gr}$ на m-й ітерації; $\vec{M}_G$, $\vec{M}_N$ - стовпці нев'язок рівнянь (71), (75), обчислені за $(m$-$1)$-м наближенням кореня САР (71)-(75);

$$\varepsilon_{jk}=\partial\vec{D}_j/\partial\vec{E}_k=\mathrm{diag}[\partial D_{j1}/\partial E_{k1},\dots,\partial D_{jL}/\partial E_{kL}]=\mathrm{diag}[\varepsilon_{jk1},\dots,\varepsilon_{jkL}]\ (j,k=x,y,z) \quad (81)$$

- матриці, діагональні елементи яких - це значення однойменних компонентів тензора диференційної діелектричної проникності середовища

$$\varepsilon=\frac{d\bar{D}}{d\bar{E}}=\left\| \begin{matrix} \partial D_{xl}/\partial E_{xl} & \partial D_{xl}/\partial E_{yl} & \partial D_{xl}/\partial E_{zl} \\ \partial D_{yl}/\partial E_{xl} & \partial D_{yl}/\partial E_{yl} & \partial D_{yl}/\partial E_{zl} \\ \partial D_{zl}/\partial E_{xl} & \partial D_{zl}/\partial E_{yl} & \partial D_{zl}/\partial E_{zl} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{xxl} & \varepsilon_{xyl} & \varepsilon_{xzl} \\ \varepsilon_{yxl} & \varepsilon_{yyl} & \varepsilon_{yzl} \\ \varepsilon_{zxl} & \varepsilon_{zyl} & \varepsilon_{zzl} \end{matrix} \right\|, \tag{82}$$

обчислені у вузлах сітки за (m-1)-м наближенням кореня САР.

Рівняння (76), (80) зводяться з урахуванням (77)-(79) до вигляду

$$F_G \cdot \overrightarrow{\Delta U}_{Gr} = \vec{M}_G;\ F_N \cdot \overrightarrow{\Delta U}_{Gr} = \vec{M}_N, \tag{83}$$

де

$$F_G=C_G(\Lambda_x\varepsilon_{xx}\Lambda_x+\Lambda_x\varepsilon_{xy}\Lambda_y+\Lambda_x\varepsilon_{xz}\Lambda_z+\Lambda_y\varepsilon_{yx}\Lambda_x+\Lambda_y\varepsilon_{yy}\Lambda_y+\Lambda_y\varepsilon_{yz}\Lambda_z+\Lambda_z\varepsilon_{zx}\Lambda_x+\Lambda_z\varepsilon_{zy}\Lambda_y+\Lambda_z\varepsilon_{zz}\Lambda_z)C_{Gr};$$

$$F_N=(n_x C_N\Lambda_x+n_y C_N\Lambda_y+n_z C_N\Lambda_z)\,C_{Gr} \tag{84}$$

- матриці розміру $L_G{\times}(L_G+L_N)$ та $L_N{\times}(L_G+L_N)$ відповідно; $\Lambda_i=R_iC\ (i=x,y,z)$
- матриця розміру $L{\times}L$.

Нульове наближення кореня САР (71)-(75) можна прийняти рівним нулеві. Якщо виявиться, що при цьому ітераційна процедура не збігається за 5-6 ітерацій, то належить скористатись комбінацією методу Ньютона з продовженням по параметру. За відсутності нелінійності розв'язок отримується за одну ітерацію.

Працездатність розроблених алгоритмів перевірена та їх точність проілюстрована на відповідних тестових задачах, що мають аналітичний розв'язок.

У **четвертому розділі** викладено опис програмного забезпечення для розв'язування крайових задач методами колокації та скінченних різниць на підставі теорії інваріантного наближення функцій і результати розв'язання контактно-крайової нелінійної задачі магнітостатики.

3. ВИСНОВКИ

1. На підставі огляду літератури виявлено основні причини, що гальмують застосування методу скінченних різниць, а саме:
- багатоваріантність різницевих аналогів диференційних операторів рівнянь полів і відсутність їх об'єктивної порівняльної оцінки;
- відсутність загального методу формування для диференційних операторів різницевих аналогів заданих порядків похибки апроксимації для нерегулярних сіток і в околі некоординатних границь.

2. В основу розвитку методу колокації та методу скінченних різниць покладено теорію інваріантного наближення функцій, метод Ньютона розв'язування нелінійних систем рівнянь та опис середовищ тензорами їх диференційного питомого опору чи диференційної проникності.

3. Вперше й на спільній математичній основі розроблено загальні алгоритми обчислення
- різницевих аналогів диференційних операторів, що входять у математичні формулювання крайових задач електро- та магнітостатики, як матриць-рядків, добутки яких на стовпець вузлових значень таблично заданої функції дорівнюють результатам дії цих операторів

на інтерполянту цієї функції в заздалегідь вказаному вузлі;
- дискретних аналогів диференційних операторів як квадратних матриць, добутки яких на стовпець вузлових значень функції дорівнюють матрицям-стовпцям результатів дії цих операторів на інтерполянту таблично заданої функції для всієї множини вузлів.

Ці алгоритми мають однакову структуру для всіх диференційних операторів і забезпечують єдиність розв'язку, інваріантність відносно групи лінійних перетворень декартової системи координат і придатність для простору з довільною кількістю незалежних змінних, для невироджених комплектів вузлів довільного степеня і з довільним взаємним розташуванням вузлів.

4. Розроблені алгоритми реалізовано у вигляді програмних модулів інтерполяції та диференціювання таблично заданих функцій, апроксимації та диференціювання таблично заданих функцій, обчислення різницевих аналогів диференційних операторів, а також обчислення рядка Тейлора (як сукупності базисних функцій багатовимірного многочлена Тейлора) та його похідних.

5. На підставі розроблених алгоритмів виконано перевірку ряду відомих у літературі різницевих формул для двовимірного простору і виявлено, що деякі з них є неінваріантними.

6. Вперше й на спільній математичній основі розроблено комплекси алгоритмів розв'язування методом колокації та методом скінченних різниць крайових задач розрахунку тривимірних і плоских електричних, магнітних потенціальних і магнітних вихрових полів. Ці алгоритми гарантують:
- інваріантність відносно групи лінійних перетворень декартової системи координат рівнянь на всіх етапах розв'язання задачі, і, як наслідок, інваріантність розв'язку;
- однотипність процедур формування дискретних аналогів диференційних крайових задач для регулярних і нерегулярних сіток, координатних і некоординатних граничних і контактних поверхонь для безгістерезисних середовищ усіх видів - лінійних і нелінійних, однорідних і неоднорідних, ізотропних й анізотропних;
- заздалегідь вибраний порядок похибки апроксимації диференційних операторів їх різницевими аналогами.

7. Доведено, що крайова задача електро- чи магнітостатики має розв'язок методом колокації (і він є єдиним), якщо загальна кількість вузлів колокації та кількість внутрішніх вузлів дорівнюють кількості членів многочлена Тейлора відповідно n-го та $(n-2)$-го степеня, а сукупності цих вузлів не належать поверхням (для двовимірної задачі - лініям) відповідно n-го та $(n-2)$-го порядку.

8. Працездатність розроблених алгоритмів перевірена на значній кількості розв'язаних тестових задач.

9. Отримані результати математичного характеру мають безпосереднє відношення до будь-яких задач математичної фізики - задач електродинаміки, теплопровідності, дифузії, пружності, аеро- та гідродинаміки тощо.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ВИКЛАДЕНІ В РОБОТАХ:

1. Фильц Р.В., Коцюба М.В. О разностной аппроксимации оператора Лапласа на регулярной сетке //Теоретическая электротехника: Сб. статей / Львовский государственный университет. - Львов. - 1987. - Вып. 42. - С. 3-7.

2. Коцюба М.В., Фильц Р.В. Решение нелинейной задачи магнитостатики методом коллокации на основе теории натуральной интерполяции //Тез. докладов научно-технической конференции "Совершенствование технологических процессов производства, их механизация, автоматизация и внедрение результатов". - Каунас: Каунасский политехнический институт. - 1988. - С. 61.

3. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Программа натуральной степенной интерполяции и дифференцирования таблично заданной функции многих независимых переменных. - Киев, 1988. - Деп. у РФАП. - Инв.NАПО223.

4. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Программа натуральной степенной аппроксимации и дифференцирования таблично заданной функции многих независимых переменных. - Киев, 1989. - Деп. у РФАП. - Инв.NАПО249.

5. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Расчет двумерных магнитных полей методом коллокации с применением теории натуральной интерполяции //Изв. вузов. Электромеханика. - 1989. - № 3. - С. 5-12.

6. Фільц Р.В., Коцюба М.В. Програма розрахунку інваріантних різницевих аналогів диференціальних операторів. - Київ, 1990. - Деп. у РФАП. - Інв.NАПО281.

7. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Расчет методом конечных разностей плоских магнитных полей в областях сложной конфигурации //Изв. вузов. Электромеханика. - 1990. - № 7. - С. 14-20.

8. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Решение нелинейной двумерной потенциальной задачи магнитостатики методом коллокации //Теоретическая электротехника: Сб. статей /Львовский государственный университет. - Львов. - 1990. - Вып. 49. - С. 118-126.

9. Коцюба М.В., Фільц Р.В., Костів О.П. Розв'язання задачі оптимізації в лісовій галузі на основі теорії інваріантного наближення функцій //Лісове господарство, лісова, паперова та деревообробна промисловість. Зб. статей / Львівський лісотехнічний інститут. - Львів. - 1991. - Вип. 22. - С. 101-105.

10. Фільц Р.В., Коцюба М.В. Програма обчислення вектора Тейлора та його похідних. - Київ, 1991. - Деп. у РФАП. - Інв.NАПО315.

11. Фильц Р.В., Коцюба М.В. Расчет методом конечных разностей плоских электростатических полей в областях сложной конфигурации // Теоретическая электротехника: Сб. статей /Львовский государственный университет. - Львов. - 1991. - Вып. 50. - С. 27-34.

12. Фильц Р.В., Коцюба М.В., Грицюк Ю.И. Алгоритм вычисления на ЭВМ многочлена Тейлора и его производных //Изв. вузов. Электромеханика. - 1991. - № 5. - С. 5-10.

13. Коцюба М.В. Розвиток методу скінченних різниць на підставі теорії інваріантного наближення функцій //Тези доповідей 1-ї Міжнародної науково-технічної конференції "Математичне моделювання в електротехніці й електроенергетиці". - Львів: Державний університет "Львівська політехніка". - 1995. - С. 69.

ОСОБИСТИЙ ВНЕСОК ПРЕТЕНДЕНТА

В роботі [1] дисертантові належить математичне виведення, в [2] - алгоритм розв'язання задачі і програмна реалізація, в [3, 4, 6, 10] - програмна реалізація і розв'язання тестових задач, в [5, 7, 8, 11] - дискретний аналог, алгоритм розрахунку, програмна реалізація і розв'язання наведеного прикладу, в [9] - алгоритм побудови невиродженого комплекту вузлів, у [12] - алгоритм і програмна реалізація, а також у [5] - умови існування розв'язку, у [7] - спосіб формування сітки.

Kotsyuba M.V. **Application of Invariable Approximations in Solving of the Boundary Problems of Electro - and Magnetostatics**. Manuscript. The dissertation to the obtaining of the scientific degree of the Candidate of physics-mathematics sciences on the speciality 01.05.02 - Mathematical Simulation and Calculating Methods in Scientific Research/ State University "Lvivska Politechnika", Lviv, 1996.

The main aim of the research was to apply invariable approximations to collocation and finite differences methods. This work covers general algorytms of conctruction discrete analogies of differencial boundary problems. These analogies are invariable according to the group of linear conversions of the Decart's co-ordinate system, conservative and undependent from the configuration of boundary and contact surfaces. They have a set kind of the error of approximation. The algorythms for solving discrete analogies and their soft ware implementation are included. The research of the conditions of correct statement in collocation method was carried.

Коцюба М.В. **Применение инвариантных аппроксимаций для решения краевых задач электро- и магнитостатики.** Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях/Государственный университет "Львивська политехника", Львов, 1996.

Работа направлена на развитие метода коллокации и метода конечных разностей на основе применения инвариантных аппроксимаций. Разработаны общие алгоритмы построения дискретных аналогов дифференциальных краевых задач при решении их указанными методами. Созданные дискретные аналоги являются однотипными для линейных и нелинейных задач, инвариантными относительно группы линейных преобразований декартовой системы координат, консервативными и независимыми от конфигурации граничных и контактных поверхностей, имеют заданный порядок погрешности аппроксимации. Предложены общие алгоритмы и программная реализация решения получаемых дискретных аналогов дифференциальных краевых задач. Исследованы условия корректности постановки задачи при решении ее методом коллокации.

Ключові слова: многочлен Тейлора, інваріантність, диференційний оператор, крайова задача, різницевий аналог, дискретний аналог.

Підписано до друку 18.11.96 р.
Формат 60x84$_{1/16}$.
Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 1,1. Ум. фарбовідбитків 1,5.
Зам. 222. Тираж 100.