

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка

На правах рукопису

ЦУРПАЛІ Світлана Іванівна

ПОДИНІЖКІ ПРОСТІ ПЛОСКІ ХВИЛІ  
ДЗВИНОПОДІБНОЇ ФОРМИ  
В КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук



Київ - 1996

39.3

№ 36.243

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в

Науковий керівник

Офіційні опоненти:

Провідна установа -

ЛННБ України ім.В.Стефаніка



00757306 (S)

доктор фізико-математичних наук  
член Нью-Йоркської академії наук  
професор Рущицький Я.Я.

доктор фізико-математичних наук  
член Академії технологічних наук України  
професор Селезов І.Г.

доктор фізико-математичних наук  
член-кореспондент Міжнародної академії  
комп'ютерних наук та систем  
Маслов Б.П.

Національний університет  
ім. Т.Г.Шевченка

Захист відбудеться 21 грудня 1996 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.03.03 при Інституті механіки ім.С.П.Тимошенка Національної академії наук України за адресою: 252057, Київ, вул.Нестерова, 3 ; факс - (044)46 03 19.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотечі Інституту механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України ( Київ, вул.Нестерова, 3 ).

Реферат розіслано 21 11 1996 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради  
доктор технічних наук, професор

*М.Зуб* І.С.Чернишенко

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Предметом дослідження в дисертаційній роботі є прості плоскі хвилі в композитних матеріалах. Вивчалася проста хвиля дзвіновидної форми в рамках трьох характерних для композитних матеріалів мікроструктурних теорій - квадратично нелінійної теорії ефективних макроскопічних сталей, лінійної мікроструктурної теорії суміші та квадратично нелінійної мікроструктурної теорії суміші.

Актуальність і ступінь дослідженості тематики дисертації.

Як прості хвилі, так і композитні матеріали вивчаються на протязі довгого часу багатьма поколіннями вчених-механіків і кожен зокрема є так би мовити, класичним об'єктом уваги.

Прості хвилі як фізичне поняття вперше почали вивчатися в механіці рідин та газів ще на початку минулого століття. Точний розв'язок рівнянь руху невіязкої рідини у вигляді простої плоскої хвилі знайшов Пуассон (Poisson S.D.) в 1808 році. Після Пуассона увагу до простих хвиль проявляли Стокс (Stokes G.G.) (1848), Ейрі (Airy G.B.) (1849), Ерншоу (Earnshaw S.) (1860).

В 1860 році була опублікована праця Ріманна (Riemann B.), де був отриманий розв'язок одновимірної задачі для гідродинамічних рівнянь, коли збурення плоске і рівняння стану є довірливим функціональним зв'язком між тиском та густиною. Цей результат викладається в роботі на кількох сторінках в п. 3.2.1. Тут лише зазначимо, що в світовій науковій літературі найбільш яскраво результат Ріманна прокоментований Лайтхіллом в його широко відомій монографії з теорії хвиль. Лайтхілл пише так:

*Блискуче математичне відкриття, зроблене Ріманном - одним з найзначніших математиків середини 19 століття - заклало основу всієї наступної роботи з нелінійної теорії плоских звукових хвиль. Це відкриття, рівносильне перетворенню рівнянь руху до вигляду, який чудово легко падає для вивчення хвиль будь-якої амплітуди, привело в свій час до прекрасного рівня розуміння предмету.*

*З іншого боку, блискуча пишність математичної техніки, яка була використана для цього першого перетворення, на протязі довгого часу створювала гігантський вплив на акустиків. Це привело до деякого застою в нелінійній теорії звуку, зв'язаного з заг*

льним переконанням, що весь успіх в розумінні предмету залежав від первісного математично близького перетворення. На протязі багатьох десятиліть це перешкождало узагальненню результатів на будь-які інші умови поширення хвиль, і в тому числі на важливий випадок одновимірного поширення в трубах або каналах з поступово змінними фізичними характеристиками рідини і поречним перетином, тому що в цих випадках неможливо знайти перетворення з подібними властивостями.

В цілому, ще в 80-их роках в цитованій монографії Лайтхілл засвідчив відсутність прогресу в дослідженні простих хвиль.

Зазначимо, що спроба детально викласти сучасне розуміння простої хвилі на основі семи відомих книг з теорії хвиль ( в інших не менш відомих книгах з теорії хвиль прості хвилі згадуються лише побіжно ) описана в п. 3.2.1. Тут же опишемо класичне означення простої хвилі, яке дається в підручнику з механіки суцільного середовища Седова. Така хвиля вводиться як певний розв'язок нелінійної системи рівнянь гідромеханіки. Стверджується, що така система вже не має розв'язків типу Д'Алямбера класичного хвильового рівняння, залежних тільки від  $x \pm a_0 t$  ( тут фаза записується через постійну фазову швидкість ). Але можна знайти розв'язок системи, який являє собою плоску хвилю і є узагальненням розв'язків типу Д'Алямбера  $f(x \pm a_0 t)$  лінійної теорії. Це такі частинні розв'язки системи, для яких швидкість  $u$  є функцією тільки густини  $\rho$ , тобто

$$u = u(\rho) \quad \rho = \rho(x, t)$$

Такі розв'язки Седов називає розв'язками Ріманна і рухи, що відповідають цим розв'язкам, називають хвилями Ріманна або простими хвилями.

Сучасне означення простої хвилі дається в книзі Мажена з механіки електромагнітних середовищ. Вона приділяє окрему увагу цьому означенню. Правила, означаються хвилі для електромагнітних середовищ. Спочатку вводиться поняття однорідних, які не змінюються з часом, станів - розв'язків консервативної системи рівнянь. Розв'язком такої системи є вектор, всі компоненти якого постійні в деякій області простору  $(x, t)$ . Наступними за складністю автор вважає прості хвилі, які означаються так: нестійкий неперервно диференційований розв'язок є простою хвилею в області  $R$  простору  $(x, t)$ , якщо всі його компоненти постійні вздовж ліній з однопараметричної родини, які покривають всю область  $R$ .

Нехай  $l(\sigma): x = c(\sigma)t + a(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$

є лініями вказаної однопараметричної родини ліній  $\{l(\sigma)\}$  з параметром

$\sigma$ . Функції  $c(\sigma)$ ,  $a(\sigma)$  повинні бути диференційованими. Щоб розв'язати попереднє рівняння відносно  $\sigma$  і отримати  $\sigma = \sigma(x, t)$ , необхідно, щоб виконувалася умова  $\Delta(\sigma, t) = c'(\sigma)t + a'(\sigma) \neq 0$ ,  $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$ . Умова  $\Delta(\sigma, t) = 0$  означає, що родина ліній  $\{l(\sigma)\}$  має огинаючу. Починаючи з цього моменту, розв'язок у вигляді простої хвилі вже невірний. Його продовження реалізується у вигляді ударних хвиль. В дисертаційній роботі проста хвиля розуміється саме так, як це тільки що записано.

Вкажемо тут авторів сімох фундаментальних книг з різних розділів фізики, про які вже згадувалося раніше: 1. Віноградова, Руденко, Сухоруков; 2. Зарембо, Красільников; 3. Лойцянський; 4. Селов; 5. Лайтхілл; 6. Мажен; 7. Узем. Записані в цих книгах міркування та означення практично суперечать один одному лише в питанні, чи відносити хвилі Д'Аламбера до простих чи ні. Однак добре доповнюють один одного і створюють картину, яку можна б назвати вступом до теорії простих хвиль.

Одним з висновків, які можна зробити при детальному знайомстві з теорією простих хвиль, є відсутність досліджень таких хвиль в твердих тілах ( матеріалах ) з внутрішньою мікроструктурою, до яких, зокрема, відносяться композитні матеріали. Неперервні нелінійні хвилі в твердих тілах ( механічні хвилі в матеріалах ) взагалі значно менше досліджені порівняно з нелінійними хвилями, які вивчаються в інших розділах фізики. Пояснити таку ситуацію можна двома особливостями, з яких одна має загальний характер, а друга стосується лише композитних матеріалів.

Перша особливість пов'язана зі складністю систем рівнянь нелінійної теорії деформування матеріалів і взаємозв'язаністю поздовжніх і поперечних хвиль. Якщо зосередитися на простих хвилях ( оскільки вони є предметом уваги в дисертації ), то спостереження Лайтхілла про неможливість перетворення таких систем так, як це зробив Ріманн, тут повністю застосовні. Друга особливість полягає в тому, що хвилі в композитних матеріалах здебільшого описуються за допомогою мікроструктурних теорій другого порядку. Це звичайно лінійні теорії і математично вони зводяться до більш складних рівнянь, ніж класичні рівняння теорії пружності. Як правило, хвильовий рух в таких теоріях вже не описується класичним хвильовим рівнянням. Тим самим створюється знову ситуація, коли перетворення, подібні ріманновим, не знайдені і вивчаються лише дисперсійні гармонічні хвилі. Узагальнення мікроструктурних теорій на випадок фізичної та геометричної нелінійностей ще більш ускладнює системи рівнянь, які описують хвильовий рух. Таким чином, були створені певні об'єктивні причини, які не спонукали до вивчення простих хвиль в композитних матеріалах.

В дев'ястих роках з'явилися роботи, в яких саме прості хвилі в тве-

рних пружних тілах стали предметом аналізу (Еделен,Фу і Скотт,Рушицький).Ці роботи підтвердили, що теорія простих хвиль в матеріалах не є достатньо дослідженою. Отже, задача про поодинокі прості хвилі в композитних матеріалах є актуальною з точки зору подальшого розвитку теорії не-гармонічних неперервних хвиль в матеріалах.Такого роду хвилі раніше вченими-механіками не розглядалися.

За мету в дисертаційній роботі було вибрано вивчення плоских простих хвиль дзвіноподібної форми в гранульованих композитних матеріалах. Основний механічний ефект, який вивчається, полягає в еволюції хвилі і спотворенні початкового профіля хвилі внаслідок цієї еволюції.Поставлена мета включала постановку задачі про спотворення саме дзвіноподібної хвилі в рамках трьох характерних для композитних матеріалів мікроструктурних теорій- квадратично нелінійної теорії ефективних макроскопічних станів, лінійної мікроструктурної теорії суміші та квадратично нелінійної мікроструктурної теорії суміші. Далі ставилася задача про отримання простих аналітичних розв'язків через дзвіноподібну функцію та числовий аналіз ( математичне моделювання ) на комп'ютері еволюції хвилі. Для кожної з вибраних трьох моделей задача про еволюцію має свою специфіку,однак їх об'єднує спільна мета отримати представлення розв'язку через дзвіноподібну функцію.Тобто,така мета - хоча б на якійсь обмеженій відстані поширення або, що те ж саме, за якийсь обмежений початковий проміжок часу описати профіль хвилі, яка поширюється в композитному матеріалі, за допомогою дзвіноподібної функції. Ця мета подібна до тієї,яку ставив Ріманн для нелінійних рівнянь гідродинаміки. Але отриманий розв'язок уже не буде точним, а наближеним.

Наукова новизна і значущість результатів роботи полягають в тому, що вперше:

- вивчені еволюція та спотворення поодиноких простих хвиль дзвіноподібнової форми; проведений теоретичний та числовий аналіз еволюції плоскої поодинокі хвилі за класичною схемою нелінійної акустики; вивчений мікроструктурний механізм спотворення плоскої дзвіноподібнової хвилі за схемою лінійної теорії суміші; побудований новий наближений розв'язок у вигляді дзвіноподібнової хвилі і обґрунтована справедливність такого розв'язку; зроблений комп'ютерний аналіз спотворення хвиль; проведений теоретичний та числовий аналіз спотворення плоскої поодинокі хвилі, який прагне як класичний,так і мікроструктурний механізми спотворення хвилі; отриманий розв'язок нелінійної системи хвильового руху методом повільно змінних амплітуд; поставлена і проаналізована задача про синхронізм

трьох дзвіноподібних хвиль, де отримано новий результат, що при певних резонансних умовах дві поодинокі хвилі взаємодіють і породжують третю поодинокую хвилю.

Достовірність одержаних в дисертації результатів та висновків забезпечується коректністю постановок задач, обґрунтованістю використуваного математичного апарату, погодженістю результатів між собою і несуне речливістю встановлених закономірностей з загальними міркуваннями фізичної природи.

Теоретичне значення та практична цінність одержаних в роботі результатів полягають:

- у розвитку теорії простих поодиноких хвиль дзвіноподібної форми, які поширюються в композитних матеріалах, а саме в теоретичному та комп'ютерному аналізі еволюції та спотворення поодиноких простих хвиль дзвіноподібної форми в гранульованих композитних матеріалах в рамках трьох мікроструктурних моделей композитів;
- в знаходженні нових розв'язків рівнянь хвильового руху;
- в знаходженні нових тривимірних форм графічного представлення еволюції дзвіноподібних хвиль;
- у виявленні нового механізму взаємодії поодиноких хвиль.

Реалізація та впровадження результатів, отриманих в дисертації, Наукові дослідження виконувалися в рамках робіт, передбачених програмами та планами НДР НАН України. Результати дисертаційної роботи увійшли до звіту теми фундаментальних робіт №1/227 "Розробка тривимірних структурних моделей механіки композитів".

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу динаміки поліагрегатних середовищ Інституту механіки НАН України (1995-1996); науковому семінарі за напрямком "Теорія коливань" при Інституті механіки НАН України (1996); науковому семінарі з механіки механіко-математичного факультету Національного університету України (1996); науковому семінарі з теорії нелінійних хвиль при Інституті гідромеханіки НАН України (1996); 5-й міжнародній науковій конференції з математики пам'яті академіка М.Кравчука (1996). Важливі результати з дисертації доповідалися на 31-й Польській конференції з механіки (1996), 18-ому міжнародному симпозіумі "Vibrations in Physical Systems" (1996).

Публікації. По результатах дисертації опубліковано 5 наукових праць. Основний зміст роботи відображено в публікаціях [1-5].

В працях, написаних з науковим керівником, проф. Рушицькому Я.Я. нале-

жить ідея досліджень, загальна постановка задач та вибір методів аналізу. Ст.лаук.снівр. канд.фіз.-мат.лаук Коваленку А.П. належить вибір способів комп'ютерного моделювання. Доценту канд.фіз.-мат.лаук Ергашеву Б.Б. на лежить постановка задач. Співавторам також належить участь в обговоренні та аналізі результатів.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається з чотирьох глав, висновків та списку літератури. Робота викладена на 152 сторінках, включаючи шість таблиць та 10 рисунків. Бібліографічний список налічує 136 назв.

## КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

В першій главі (вступі) подано огляд сучасного стану проблеми простих хвиль взагалі і в твердих тілах зокрема, описане місце даної роботи серед проведених раніше досліджень, сформульована мета роботи, обгрунтовано актуальність та новизну результатів, теоретичне значення і практичну цінність роботи, а також коротко викладені основні результати і обгрунтована їх достовірність. Сформульовані положення, що виносяться на захист. Стисло викладений зміст глав.

Друга глава містить необхідні факти з застосування в дисертації теорії деформування композитних матеріалів, а саме - класичної теорії макроскопічних сталей, класичної теорії нелінійної пружності та лінійної теорії твердих сумішей. Спочатку викладаються необхідні факти з класичної механіки суцільного середовища та теорії макроскопічних сталей, де робиться наголос на композитних матеріалах, для яких навіть сам матеріальний континуум вводиться по-своєму. Далі послідовно описуються ті положення з класичної нелінійної теорії пружності, які стосуються гінериружних середовищ. Нагадаємо, що поняття гінерипружних середовищ ввів Трусделл для позначення таких середовищ, для яких існує потенціал накопиченої енергії. Детально викладається необхідна в подальшому класична квадратично нелінійна теорія, основана на потенціалі Меріагана. Як відомо, цей потенціал означає нелінійно пружний ізотропний матеріал, який характеризується двома пружними постійними другого порядку  $\lambda, \mu$  (постійними Ляме) та трьома пружними постійними третього порядку  $A, B, C$  (постійними Меріагана). Записуються рівняння нелінійної акустики, для чого вводиться тензор напружень Піоли-Кірхгофа  $I_{nm}$ , і описується задача про взаємодію гармонічних акустичних хвиль. Особлива увага приділена трьом стандартним задачам взаємодії поздовжніх та поперечних хвиль з однаковою частотою. Навприклад, перша така: 1. Коли на вході в середовище за-

дається тільки поздовжня хвиля. В термінах механіки це означає, що на границі півплощини  $x=0$  за-дається коливання в поздовжньому напрямку з заданою частотою  $\omega$ . Останній, третій, параграф цієї глави присвячений лінійній теорії двофазної суміші як мікроструктурній теорії композитних матеріалів. Викладаються основні положення теорії, далі аналізуються хвилі в сумішах. Суміш є дисперсивним середовищем і тому гармовічні хвилі в суміші дисперсивні. Детально аналізуються плоскі хвилі. Хвильовий рух описується трьома взаємозв'язаними системами рівнянь

$$\begin{aligned} & \rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - \\ & - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) = 0 \\ & \rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial t^2} - \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - \mu_3 \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}) = 0 \quad (m = 2, 3) \end{aligned} \quad (1)$$

Отримані системи описують незалежне поширення трьох видів хвиль - поздовжньої (P-хвилі), поперечної горизонтальної (SH-хвилі) і поперечної вертикальної (SV-хвилі). Системи (3) мають розв'язки у вигляді двох хвиль

$$\begin{aligned} u_m^{(\alpha)}(x, t) = & A_{\alpha m}^{(\alpha)} e^{-i(k_\alpha^{(m)} x - \omega t)} + \\ & + i(k_\delta^{(m)}) A_{\alpha m}^{(\delta)} e^{-i(k_\delta^{(m)} x - \omega t)} \end{aligned} \quad (2)$$

Особливості розв'язку (2) такі : 1) одночасно існують дві моди, які відрізняються хвильовими числами  $k_\alpha^{(m)}$  (індекс  $\alpha$  фіксує номер моди); 2) обидві моди являють собою суттєво дисперсивні хвилі; 3) одна з мод фільтрується сумішшю, вона запирається для низьких частот, починаючи з частоти яку називають частотою запирання ( частотою відсікання ); 4) в кожній фазі зі поширюються обидві моди зі своїми амплітудами, матриці розподілу амплітуд задаються коефіцієнтами, зі зміною частоти енергія переноситься з однієї моди до іншої моди.

В третій главі описується теорія нелінійних хвиль та теорія простих хвиль стосовно двофазних сумішей. Показані особливості побудови нелінійної теорії двофазної суміші взагалі і квадратично нелінійної теорії зокрема. Записані основні факти з квадратично нелінійної теорії плоских гармонічних хвиль, тут підкреслено перш за все прямий зв'язок цієї теорії з класичною теорією нелінійної акустики. Тут записано узагальнення потенціалу Меріагана на випадок пружних сумішей. Новий потенціал включає тільки сім пружних постійних другого порядку ( $\lambda_k, \mu_k, \beta$ ) і сім пружних постійних третього порядку ( $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, \beta'$ ). Він описує властивості не-

лінійного деформування і властивості деформування суміші як мікроструктурного середовища. Поширення плоских хвиль описується такими взаємо-зв'язаними нелінійними системами рівнянь

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial^2 u_1^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_1^{(\alpha)} - u_1^{(\delta)}) =$$

$$= N_1^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1} + N_2^{(\alpha)} \left( \frac{\partial^2 u_2^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_2^{(\alpha)}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_3^{(\alpha)}}{\partial x_1} \right); \quad (3)$$

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial t^2} - \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_k^2} - \mu_3 \frac{\partial^2 u_m^{(\delta)}}{\partial x_k^2} - \beta(u_m^{(\alpha)} - u_m^{(\delta)}) =$$

$$= N_2^{(\alpha)} \left( \frac{\partial^2 u_m^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u_1^{(\alpha)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_m^{(\alpha)}}{\partial x_1} \right); \quad (m = 2, 3), \quad (4)$$

Далі записуються отримані методом Ірвіну розв'язки систем (3), (4) для трьох стандартних умов. Детально описується перша стандартна задача, яка описує еволюцію поздовжньої хвилі, оскільки в наступній главі ця задача суттєво узагальнюється. Вище приведені і надалі використані комплекти фізичних сталих для ряду реальних гранульованих гіперпружних композитних матеріалів. В другій частині глави зроблена спроба викласти елементи теорії простих хвиль, куди б входили як історичні аспекти, так і сучасні уявлення. Акцентована увага на міркування Лайтхілла щодо побудови Ріманом простих хвиль, тому що на них базується обґрунтування достовірності отриманого в роботі нового наближеного розв'язку у вигляді простої хвилі дзвіноподібної форми.

В четвертій главі викладені результати дослідження спотворення простої плоскої дзвіноподібної хвилі в композитному матеріалі, який описується трьома різними мікроструктурними моделями. Для кожної з трьох теоретичних схем використовується свій метод. Тому глава складається з трьох великих частин, відмінних між собою досить суттєво у всьому, крім умовно кажучи, початку і кінця. Тобто, завжди в постановці задачі задається і досліджується дзвіноподібна хвиля і завжди в кінці отримується результат, що така хвиля при проходженні через композитний матеріал спотворюється. Перший параграф містить результати вивчення еволюції плоскої хвилі, коли матеріал описується класичною моделлю макроскопічних сталих і враховується таким чином класичний механізм нелінійної еволюції хвиль. Оскільки дзвіноподібна хвиля є хвилею з профілем, який описується функцією Чебишова Ерміта  $\Psi_n(z) = e^{-z^2/2} H_n^*(z)$ , нульового індек-

$$\text{су} \quad \psi_0(x) = e^{-x^2/2}. \quad (5)$$

то викладені відомості про функції Чебишова-Ерміта і також нарисовані графіки перших шести функцій, з яких видно, що це функції з фінітною вагою і цими функціями можна описати профілі поодиноких хвиль. Тобто, профіль має один або кілька "горбів", зосереджених біля нуля, і далі амплітуда профіля практично є нулем.

Далі проаналізована еволюція простої плоскої хвилі (5) за класичною схемою нелінійної акустики. Розглядалася задача про випромінення в гінерируєме середовище тількию поздовжньої хвилі. Хвильовий рух в цьому випадку описується таким рівнянням

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \left( 1 + \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (6)$$

Відступимо від класичної постановки і розглянемо неперіодичний початковий імпульс у вигляді функції Чебишова-Ерміта нульового індексу (5)

$u_1(x, 0) = a_0 e^{-x^2/2}$ . Потракуємо у рівнянні (6) невідому нелінійну функцію

$v_1 = c_1 \left( 1 + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^{1/2}$  як місцеву швидкість хвилі в момент часу  $t$  і в

точці  $x$ , тобто як невідому фазову швидкість хвилі. Ця швидкість є нелінійною функцією самого розв'язку. Отже, можна постушити так, як це описано Лайтхілом для хвилі Ріманна: *шукати розв'язок задачі (6) у вигляді простої хвилі ціби задача лінійна*

$$u_1(x, t) = a_0 e^{-\sigma^2/2} \quad \sigma = x - v_1 t \quad (7)$$

Такий розв'язок знайдений, він має вигляд

$$u_1(x_1, t) = a_0 e^{-(x-c_1 t)^2/2} - \frac{1}{2} \alpha c_1 t (x - c_1 t)^2 \left( a_0 e^{-(x-c_1 t)^2/2} \right)^2 \quad (8)$$

Структура розв'язку та ж, що і класичного, коли хвилі гармонічні. Перший доданок справа описує хвилю, яка може бути потракована так: початковий звиноподібний профіль рухається без будь-яких спотворень з постійною фазовою швидкістю поздовжніх хвиль в лінійно пружному тілі.

$$u_1(x_1, t) = a_0 e^{-(x-c_1 t)^2/2} - \frac{1}{2} \alpha c_1 t (x - c_1 t)^2 \left( a_0 e^{-(x-c_1 t)^2/2} \right)^2 \quad (9)$$

Структура розв'язку та ж, що і класичного у вигляді гармонічних хвиль. Перший доданок справа описує хвилю, яка може бути потракована так: початковий звиноподібний профіль рухається без будь-яких спотворень з постійною фазовою швидкістю поздовжніх хвиль в лінійно пружному тілі. Ця хвиля може бути теж названа першою гармонікою. Але тоді виникає

питання, що таке гармоніки для дзвіноподібної хвилі взагалі. Мабуть тут такий термін слід використовувати умовно. Якщо прийняти, що наступні після першої гармоніки відрізняються від неї множинником-простим числом перед фазою і це число дає номер гармоніки, то вираз в дужках з другого доданка (10) є другою гармонікою. Але поняття гармоніки все-таки зв'язують з гармонічним аналізом, основаним на повноті системи функцій- гармонік. Тоді таке не виконується для дзвіноподібних функцій. Для них писатимемо, що "перша гармоніка" має вигляд  $e^{-\frac{(x-c\rho)^2}{2}}$ , а "друга гармоніка" така  $e^{-\frac{(x-c\rho)^2}{2}}$ . Обидві вони є простими хвилями в розумінні Д'Алямбера, оскільки швидкість їх поширення постійна.

Нагадаємо, що особливістю еволюції гармонічної хвилі є такий характер створення профіля хвилі: наскільки передній фронт стає крутішим, наскільки задній фронт стає пологішим. Профіль простої хвилі (10) створюється по-іншому. "Друга гармоніка" завжди дає від'ємну добавку. Отже, "дзвін" в основній своїй частині стає тоншим, схили "дзвона" стають крутішими. З метою більш повного аналізу еволюції були проведені числові розрахунки. Розглядалися композитні матеріали, описані в п.3.1.3. Початкова амплітуда вибиралася у всіх випадках рівною  $a_0 = 1.0 \cdot 10^{-3} m$ . Для кожного матеріалу будувалися три просторові комп'ютерні графіки, які показують еволюцію профіля хвилі на фазовій площині при її поширенні вздовж характеристичних прямих. Перший графік зображає нестворену хвилю так, як вона поширювалася б в лінійно пружному середовищі. Наступні два графіки показують еволюцію "другої гармоніки". Другий демонструє еволюцію "другої гармоніки" за досить тривалий відрізок часу. Третій теж зображує "другу гармоніку", але за короткий початковий момент часу, тобто він є фрагментом в більшому мірілі з другого рисунку. Три характерних рисунки зображені під №1 в кінці автореферату. Основний висновок тут такий - еволюція є суттєвою і вона зростає з часом поширення хвилі.

В другому параграфі описаний розв'язок задачі про створення хвилі (5) в рамках іншої теоретичної схеми - лінійної теорії двофазної суміші. У ньому випадку повинен проявитися інший механізм створення хвилі - мікроструктурний. Фактично, це теж нелінійний механізм створення, але він пов'язаний з дисперсійністю хвиль, як наслідком врахування в теорії мікроструктури. Тут фазова швидкість нелінійно залежить від частоти, але це споріднений з класичним механізмом створення.

Розглядається перша стандартна задача для лінійної двофазної теорії сумі

ші, в якій рух поздовжньої хвилі описується системою рівнянь (1). Система лінійна, вона має періодичний розв'язок у формі гармонічних хвиль (4). Початковий імпульс вибирається так же, як і в попередньому параграфі - як дзвіноподібна функція (2).

Пропонується новий шлях побудови розв'язку у вигляді хвилі.

*За винятком невеликої області навколо частоти запирання оптичної моди, дисперсивність середовища (композита) слабка. Отже, імпульс буде спотворюватися повільно.* Тоді виникає питання:

чи не можна описати профіль хвилі, яка поширюється, (хоча б на якійсь обмеженій відстані, або, що те ж саме, за якийсь обмежений початковий проміжок часу) за допомогою тієї ж функції Чебишова-Ерміта  $\psi_0(z)$  подібно до розв'язку Д'Алямбера для класичного хвильового рівняння?

Розв'язок системи формально може бути записаний у такому вигляді

$$u_1^{(a)}(x, t) = A^{(a)} \psi_0(z^{(a)}) + p(z^{(b)}) A^{(b)} \psi_0(z^{(b)}) = \quad (10)$$

$$= A^{(a)} e^{-\frac{(z^{(a)})^2}{2}} + p(z^{(b)}) A^{(b)} e^{-\frac{(z^{(b)})^2}{2}};$$

Простота в записі розв'язку досягнута двома суттєвими ускладненнями - нелінійною залежністю фазової швидкості від фази і наближеністю задоволення основної системи (1).

Перше ускладнення ніби перетворює хвилю в просту. В цьому подявав задум. Друге потребує додаткового дослідження. Це ускладнення виникає при підстановці представлення (10) в (1) і обчисленні других частинних похідних. Обґрунтування справедливості побудови нового наближеного розв'язку ґрунтується на аналізі графіків фазових швидкостей отриманих простих хвиль. В теорії сумішей вони мають певну характерну форму, спільну для всіх твердих сумішей ( матеріалів ). Для підтвердження цього для групи матеріалів, які вже згадувалися раніше, були побудовані графіки фазових швидкостей обох мод (див. рис.2 в кінці автореферату).

Доведено, що для вибраного класу композитних матеріалів опис поширення імпульсу у вигляді простої хвилі допустимий на достатньо великому початковому етапі еволюції хвилі.

Співставимо тепер класичний та новий розв'язки. Перелічені раніше основні властивості класичного розв'язку зберігаються і для простих хвиль дзвіноподібної форми. Дисперсивність гармонічної хвилі трансформується в нелінійну залежність фазової швидкості від фази. Тобто, хвилі (10) мають основні ознаки простих, оскільки характеристиками тут є прямі лі

ції, вздовж яких амплітуда хвилі  $|u^{(\alpha)}(x,t)|$  постійна. Дві моди теж тут зберігаються, і відмінність між фазовими швидкостями мод суттєва. Зберігається і сама процедура опису розподілу амплітуд між фазами - формули для  $f^{(\alpha)}$  і  $p^{(\alpha)}$  подібні. Але розбіжності між класичними і наближеними досить суттєві. Перш за все, через суттєву різницю між класичними гармонічними дисперсійними і неперіодичними простими хвилями. Отриманий наближений розв'язок у вигляді відомого дзвіноподібного сигналу описує зручним функціональним зависом через функцію Чебишова-Ерміта поодинокую хвилю з одним горбом. Отже, в твердих тілах одночасно з гармонічними (періодичними) класичними хвилями можуть існувати прості поодинокі (неперіодичні) хвилі.

Оскільки наближений розв'язок у вигляді (11) справедливий на початковій стадії поширення хвилі, але не для вибраних матеріалів виявилися досить значні відстані, рівні кільком десяткам відстаней "відноши дзвона", то на цих відстанях цілком можливо було б очікувати певних спотворень початкового профіля "дзвона". Для матеріалів з п. 3.1.3 були обчислені просторові профілі хвиль. Такого роду графіки вже будувалися нами в попередньому параграфі. Приведемо на рис. 3 характерні два графіки для одного з матеріалів, де демонструється еволюція початкового профіля хвилі. Еволюція досить суттєва і відбувається вона порівняно швидко.

Третій параграф присвячений простим поздовжнім плоским хвилям. Композитний матеріал моделюється нелінійною сумішшю. Вивчається суто нелінійне явище - генерація нових хвиль та спотворення у зв'язку з ним початково заданих хвиль. Оскільки хвилю ми вибираємо поздовжню, то вивчається самогенерація і таким чином еволюція та спотворення профіля простої хвилі, який заданий в початковий момент часу. На відміну від попередніх двох параграфів, де вивчалися два відмінних між собою механізми спотворення кожен зокрема, в цьому параграфі описана задача, в якій обидва механізми (класичний нелінійний та мікроструктурний) діють одночасно та хвиля має такий же, як і раніше, дзвіноподібний профіль. Рух хвилі описується такою нелінійною системою рівнянь

$$\rho_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial t^2} - (\lambda_{\alpha} + 2\mu_{\alpha}) \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial x^2} - (\lambda_{\beta} + 2\mu_{\beta}) \frac{\partial^2 u^{(\beta)}}{\partial x^2} - \beta(u^{(\alpha)} - u^{(\beta)}) = N_1^{(\alpha)} \frac{\partial^2 u^{(\alpha)}}{\partial x^2} \frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial x} \quad (12)$$

Взаємодія хвиль вивчається методом повільно змінних амплітуд. Суттєвим моментом в методі є знання розв'язку лінійної системи, яка отримана з ис-

лінійної нехтуванням нелінійності. Отже, використовується розв'язок (2).

Згідно з методом розв'язок нелінійної системи (12) шукатимемо при умові, що амплітуди всіх хвиль є повільно змінними з часом поширення простої хвилі в просторі. Якщо для гармонічної хвилі повільність розуміється в порівнянні з довжиною хвилі (за час поширення хвилі на цю відстань зміна амплітуди така мала, що всю нехтують), то для простої хвилі дзвіноподібної форми поняття довжини хвилі відсутнє, тому повільність розумітимемо так - за час поширення на відстань, рівну одній "длина" ( $x=4, t = \frac{4}{v(4)}$ ), амплітуда змінюється незначно.

Зупинимось далі на одному типі взаємодії - взаємодії двох мод позовжж-ної простої хвилі, в результаті чого виникає третя позовжжж хвиля того типу. Отже, розглянемо ситуацію, коли в суміні одночасно існують три хвилі - які є розв'язками рівнянь (12). Застосування процедури ван дер Поля дає спочатку вкорочені рівняння, а далі еволюційні рівняння для трьох випадків взаємодії: 1-а мода +1-а мода, 1-а мода +2-а мода, 2-а мода +2-а мода. В кожному випадку в середовищі виникають два триплети, еволюція яких неоднакова. Запишемо еволюційні рівняння для першого триплету у випадку 1-а мода +2-а мода

$$\frac{dA_1^{(1)}}{dt} = \frac{N_1^{(1)}}{2\rho_{11}} \frac{I(\sigma^{(2)})}{v_{ln}(\sigma^{(1)})} S_{23} A_1^{(2)} A_1^{(3)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^{(2)2} + \sigma^{(3)2} - \sigma^{(1)2})}$$

$$\frac{dA_1^{(2)}}{dt} = \frac{N_1^{(1)}}{2\rho_{11}} \frac{1}{v_{ln}(\sigma^{(2)}) I(\sigma^{(2)})} S_{132} A_1^{(1)} A_1^{(3)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^{(1)2} + \sigma^{(3)2} - \sigma^{(2)2})} \quad (14)$$

$$\frac{dA_1^{(3)}}{dt} = \frac{N_1^{(1)}}{2\rho_{11}} \frac{I(\sigma^{(2)})}{v^{(3)}} S_{123} A_1^{(1)} A_1^{(2)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^{(1)2} + \sigma^{(2)2} - \sigma^{(3)2})}$$

Ще раз зазначимо, що еволюція нової, третьої, хвилі в кожній фазі буде своя і початково збуджені хвилі еволюціонують в різних фазах по-різному. Отримані еволюційні рівняння, як і в інших розділах фізики, дають змогу розглянути задачу про синхронізм трьох простих дзвіноподібних хвиль. Отже, нехай третя хвиля початково не збуджується і вивчимо ситуацію про генерацію двома хвилями третьої. Доведено, що при певній умові узгодженості фаз

$$\Delta\sigma(\tau) = (\sigma^{(1)})^2 + (\sigma^{(2)})^2 - (\sigma^{(3)})^2 = 0 \quad (15)$$

яку з огляду на класичні терміни частотного і просторового синхронізму можна назвати умовою фазового синхронізму, дві прості хвилі породжують

третю і вона забирає від них енергію. Особливістю результату є те, що відмінні між собою моди можуть породжувати як першу, так і другу моди. В частинному випадку двох однакових хвиль задача описує самогенерацію простої дзвіноподібної хвилі. Амплітуда самогенераваної хвилі більша складо, ніж в класичній задачі, залежить від фази. Отримана формула для вихування амплітуди дозволяє простежити еволюцію та спотворення хвилі в окремих фазах.

Заключча частина (Висновки) містить в першій своїй частині розширене формулювання основних результатів, отриманих в дисертації. В другій частині систематизовані висновки, які впливають з аналізу результатів дисертації.

I. Таким чином, в поданій на захист дисертаційній роботі досліджені прості плоскі хвилі спеціальної дзвіноподібної форми, які поширюються в композитних матеріалах. Такі прості хвилі, як і будь-якої іншої форми, раніше не вивчалися і дисертація започатковує новий напрямок в дослідженні хвиль в матеріалах. Проведене дослідження включає:

1. Постановку задачі про поширення простих плоских поодиноких дзвіноподібних хвиль в композитних матеріалах і постановку задачі про еволюцію таких хвиль в рамках трьох відомих моделей композитних матеріалів.
2. Отримання аналітичних розв'язків поставлених задач і математичне моделювання на комп'ютері процесу еволюції дзвіноподібних поодиноких простих хвиль.
3. Теоретичне засвідчення нових механічних ефектів, пов'язаних з взаємодією простих хвиль вибраної форми.

II. Основні результати роботи такі:

A. Вивчені еволюція та спотворення поодиноких простих хвиль дзвіноподібної форми; B. Проведений теоретичний та числовий аналіз еволюції плоскої поодинокі хвилі за класичною схемою нелінійної акустики; B. Вивчений мікроструктурний механізм спотворення плоскої дзвіноподібної хвилі за схемою лінійної теорії суміші; Г. Побудований новий наближений розв'язок у вигляді дзвіноподібної хвилі і обґрунтована, справедливості такого розв'язку; Д. Зроблений комп'ютерний аналіз спотворення хвиль для всіх трьох прийятих моделей композитного матеріалу; E. Проведений теоретичний та числовий аналіз спотворення плоскої поодинокі хвилі, який враховує як класичний, так і мікроструктурний механізми спотворення хвилі; E. Отриманий розв'язок нелінійної системи хвильового руху методом

повільно змінних амплітуд. Ж. Поставлена і проаналізована задача про синхронізм трьох дзвіноподібних хвиль, де отримано новий результат, що при певних резонансних умовах дві поодинокі хвилі взаємодіють і породжують третю поодинокую хвилю.

III. З отриманих результатів можна зробити такі висновки:

1. Всі три використані в дисертації теорії описують еволюцію простої дзвіноподібної хвилі. Побудовані комп'ютерні тривимірні графіки профіля хвилі свідчать, що для ряду композитів ця еволюція суттєва.

2. В першій теорії (класична нелінійна теорія пружного деформування) еволюція простої хвилі відбувається за рахунок класичного механізму нелінійності, який теж відповідальний за класичну еволюцію гармонічної хвилі.

3. В другій теорії (лінійна теорія пружної суміші) еволюція спричинена мікроструктурою, яка породжує дисперсивність. Дисперсивність в якомусь розумінні теж є нелінійністю. Отже, причиною еволюції є нелінійність.

4. В третій теорії (нелінійна теорія пружної суміші) еволюція породжується обома типами нелінійності. У цьому випадку можна описати задачу про синхронізм хвиль. Отриманий результат теоретично передбачає можливість злиття двох дзвіноподібних хвиль в одну, яка зосередить у собі енергію двох первинних хвиль.

Основний зміст дисертаційної роботи викладено в таких працях:

1. Створення простої хвилі дзвіноподібної форми при її поширенні в двофазному матеріалі // Доповіді НАН України.-1996.- № 7.- С.58-63 (Співавтор Рушницький Я.Я., Коваленко А.П.).
2. Генерація нової простої хвилі подовженою простою хвилею в гіперпружкому двофазному середовищі // Доповіді НАН України.-1996.- № 8.- С.51-54 (Співавтор Рушницький Я.Я.).
3. Новое решение обобщенного уравнения Клейна-Гордона в виде одиночной волны колоколообразной формы // Тезисы докладов 5-й международной конференции памяти акад.П.Кравчука.-Киев:Нац.техн.универс.Украины "Киевский политех. институт", 1996.-С. 475.
4. Импульсная нагрузка круглой трубы из композитного материала // Тезисы докладов 15-й научной конференции молодых ученых-Института механики. Киев. 1990. С.17. (Співавтор Ергашев Б.Б.).
5. Нестационарные колебания композитной трубы при импульсном нагружении // Труды 1-й всесоюзной научн. конф. "Технол.проблемы прочно-сти несущих конструкций". Запорожье,1991. С.262. (Співавтор Ергашев Б.Б.).

Tsurpal S.I. Simple plane waves in composite materials.

Dissertation for the Candidate of Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.02.04 - mechanics of deformable solid, S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1996.

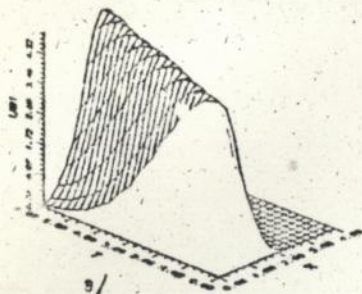
Five papers containing results of theoretical and computer investigations of simple plane waves of the bell-shaped form, which propagate through composite materials, are defended. Three different well-known models for composites are used. The evolution of such waves is studied. Two mechanisms of the distortion of initial wave profile are described. In the case when special resonant conditions are fulfilled the interaction of solitary bell-shaped waves is fixed.

Цурпал С.И. Простые плоские волны в композитных материалах.

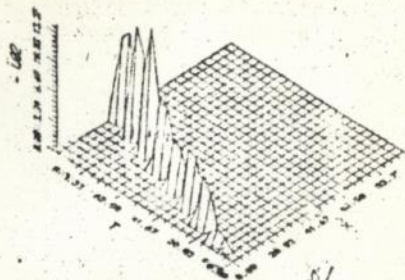
Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. Институт механики им.С.П.Тимошенко Национальной академии наук Украины, Киев, 1996.

Защищается 5 научных работ, которые содержат результаты теоретических исследований и компьютерного моделирования простых плоских волн колоколообразной формы, которые распространяются в композитных материалах. Используются три известные модели композитов. Изучена эволюция таких волн. Описаны два механизма искажения начального профиля волны. В случае, когда выполняются специальные резонансные условия, отмечено взаимодействие одиноких колоколообразных волн.

Ключові слова: проста плоска хвиля, подинока дзвіноподібна хвиля, еволюція та спотворення хвилі, композитний матеріал, мікроструктура, нелінійність, теорія суміші.



а/



б/

Рис. 1

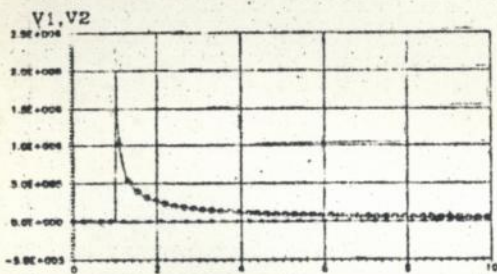
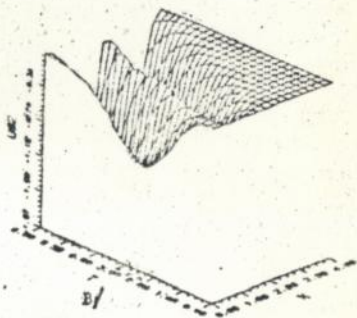
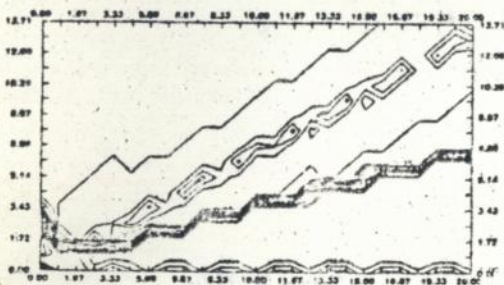


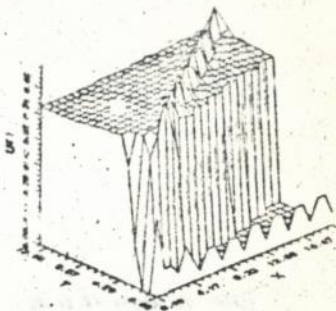
Рис. 2



в/



г/



д/

Рис. 3

438024

АВ 36.243

Підп. до друку 18.11.96. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>10</sub>.  
Папір друк. № 1. Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,23.  
Умовн. фарбо-відб. 1,00. Обл.-вид. арк. 10.  
Тираж 130. Зам. №

---

Фірма «ВПОЛ»  
252151, Київ, вул. Волинська, 60.