НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

КОМАРОВ Геннадій Миколайович

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОБЛЕМ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

01.01.03 — математична фізика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1996

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у відділі мат... нійних коливань Інституту ма... України

Науковий консультант - доктор фізико-математичних наук, професор **БЕРЕЗОВСЬКИЙ А.А.**

Офіційні опоненти: - доктор фізико-математичних наук, професор **СЕЛЕЗОВ І.Т.**

- доктор фізико-математичних наук, професор **КАРНАУХОВ В.Г.**

- доктор фізико-математичних наук, професор **ЛЕНЮК М.П.**

Провідна установа - **Київський університет ім. Тараса Шевченка**

Захист дисертації відбудеться "24" грудня 1996 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.01.66.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту.

Автореферат розісланий "21" листя 1996 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради Алучка **ЛУЧКА А.Ю.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато проблем сучасних прикладних наук, в тому числі технічних і інженерних, повинні розглядатися як суттєво нелінійні, так як їх лінійне трактування не дає можливості враховувати найбільш істотні сторони явищ не тільки при кількісних, а й при якісних дослідженнях. Однак, нелінійний підхід ускладнює математичні моделі реальних процесів і приводить до нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Дослідження крайових і початково-крайових задач для таких рівнянь вимагає залучення абсолютно нових ідей і методів в порівнянні з ідеями і методами лінійної теорії. В зв'язку з тим, що в загальному випадку отримати точний аналітичний розв'язок згаданих вище задач дуже складно або взагалі неможливо, особливо актуальним є створення ефективних наближених методів їх розв'язання. Практична цінність одержаних при цьому результатів визначається тим, наскільки корисними вони виявляються при дослідженні нагальних потреб сучасного природознавства. До останніх відносяться і нелінійні проблеми термопружності.

Актуальність досліджень, що проводяться в цій області, викликана підвищеними вимогами до точності розрахунків на міцність і стійкість конструкцій, виготовлених із нових матеріалів, які мають широке застосування в техніці і будівництві, а також необхідністю опису ефектів, які лишаються поза увагою при лінійній постановці задач термопружності.

Як відомо, математичною моделлю термопружності твердого тіла є система зв'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка складається з векторного рівняння руху пружного тіла і скалярного рівняння теплопровідності. Нелінійність цих рівнянь зумовлена співвідношеннями між компонентами тензора деформацій і першими похідними компонент вектора переміщення (геометрична нелінійність), а також матеріальними рівняннями пружності і теплопровідності (фізична нелінійність). У випадку геометричної нелінійності вважають, що деформації малі, а кути повороту великі тому для того, щоб досить точно описати деформований стан, необхідно зберегти вищі степені перших похідних вектора переміщення, починаючи з другої. У випадку фізичної нелінійності виходять з припущення, що для пружної задачі при деформаціях, які допускають геометричну лінеаризацію, наявні помітні відхилення від лінійної залежності між напруженнями і деформаціями, яка визначається на основі закону Гука,а для чисто теплової - з нелінійності законів Фур'є, які зв'язують вектор теплового потоку з градієнтом температур і питому теплову енергію з температурою. Математична модель термопружності тепловипромінюючого тіла значно ускладнюється, якщо частина його поверхні вгнута. У цьому випадку відбувається перевипромінювання теплоти, урахування якого приводить до нелінійної і, більш того, нелокальної крайової умови.

З математичної точки зору нелінійні задачі термопружності належать до класу мало досліджених нелінійних крайових задач математичної фізики. В теоретичному плані для таких задач залишаються актуальними питання існування,єдиності, монотонності і стабілізації розв'язків. З практичної точки зору тут особливо важливими є наближені аналітичні і ефективні чисельно-аналітичні методи розв'язання.

З огляду на складність поставлених проблем, створення відповідних математичних моделей термопружності не обмежується описаною вище конкретизацією геометричних співвідношень і матеріальних рівнянь.Для того, щоб вони були придатні для вивчення точними кількісними методами, при математичній постановці конкретних задач необхідно враховувати специфічні властивості шуканих полів. До останніх відносяться симетрія і квазістаціонарність, які дозволяють понизити розмірність задачі, а також монотонність, яка дає можливість виконати перехід до актуальніших, з точки зору практики, постановок задач відносно поверхонь рівня і т.ін.

Однак, навіть після розумного спрощення математичне моделювання вказаних вище процесів, як правило, приводить до складних мало досліджених крайових і початково-крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також інтегро-диференціальних рівнянь. Як показує досвід дослідження такого роду задач, їх розв'язок неможливо отримати, користуючись якимось універсальним методом, і тільки поєднання наближених аналітичних і різних чисельних методів з використанням сучасної обчислювальної техніки може дати результат.

В наш час видано багато монографій, оглядів і окремих статей, присвячених розвитку, головним чином лінійних, задач термопружності і питанням взаємодії механічних, теплових і електромагнітних полів в матеріалах і елементах конструкцій. Сучасний рівень розвитку термов'язкоелектропружності висвітлений в монографіях А.Д. Коваленко, В.Новацького, Я.С.Підстригача, Я.Й.Бурака. М.О.Шульги, Ю.М.Коляно, А.Ф.Улітко, І.Т.Селезова і ін., а також в п'ятитомному виданні "Механика связанных полей в элементах конструкций" під загальною редакцією О.М.Гузя. Виведенню основних рівнянь загальної теорії термов'язкоелектропружності присвячені роботи А.А.Іллюшина, Б.Е.Победрі, Д.Л.Бикова В.В.Москвітіна, В.Г.Карнаухова, І.Т.Селезова, Р.Шепери, Р.Крістінсена, Б.Колемана та ін. Основні результати по побудові різних прикладних теорій одно- і багатошарових пружних і в'язкопружних пластин і оболонок з урахуванням взаємодії механічних, теплових і електростатичних полів відображені в монографіях Я.М.Григоренка, І.О.Луковського, В.А.Троценко і В.І.Усюкіна, В.Г.Карнаухова і І.Ф.Киричка.

Вивчення нелінійних задач термопружності стимулювало дослідження в областях математики, зв'язаних з теорією нелінійних диференціальних рівнянь еліптичного та параболічного типів. Важливі результати в цих розділах математики отримані в роботах Петровського І.Г., Тихонова О.М., Самарського О.А., Олєйник О.О., Ладиженської О.О., Вишика М.І., Дубинського Ю.А., Мартинсона Л.К., Березовського А.А., Ліонса Ж.-Л., Фужіти Х., Аронсона Д., Браудера Ф. та інших авторів.

В розвиток нелінійної теорії тепло- і масопереносу значний внесок зробили роботи Лейбензона Л.С., Зельдовича Я.В., Сєдова Л.І., Христиановича С.А., Дородницина А.А., Ликова А.В. та багатьох інших.

Метою дисертаційної роботи є створення нових математичних моделей нелінійних проблем термопружності просторових тіл і тонкостінних конструкцій; дослідження виникаючих при цьому нелінійних крайових задач, в якому поряд з теоретичними питаннями розглядається розробка ефективних конструктивних методів розв'язання модельних задач та їх детальний аналіз; побудова розв'язків конкретних крайових задач, типових і особливо важливих для інженерної практики; надання рекомендацій по оптимальному проектуванню елементів конструкцій.

Наукова новизна. В дисертації запропоновано нові математичні моделі термопружності, які відображають нелінійні властивості матеріалу і нелінійні деформації. Побудова розв'язків отриманих нелінійних векторних крайових задач відносно переміщень базується на застосуванні ідей теорії збурень, методу малого параметра в різних модифікаціях (методу пружних розв'язків А.А.Іллюшина, методу змінних параметрів І.А.Біргера та ін.), варіаційних методів в поєднанні з точними розв'язками.

Розглянуто нові за постановкою нелінійні задачі теплообміну, в яких враховано випромінювання теплоти з поверхні деформованого тіла, фазові перетворення і перевипромінювання теплоти на вгнутих поверхнях, а також їх різні спрощення,пов'язані із спеціальними усередненнями температурного поля по товщині шарів з високою теплопровідністю і переходом до задач відносно поверхонь рівня. Методом інтегральних рівнянь за допомогою функцій Гріна для лінійного оператора задач теплопровідності здійснено перехід до еквівалентних нелінійних інтегральних постановок задач. Отримано вагову функцію і другу формулу Гріна для неузгодженого з крайовими умовами і умовами спряження оператора рівняння теплопровідності. Побудовано функцію Гріна у вигляді білінійного ряду за власними функціями спектральних задач з параметром як в крайових умовах, так і в умовах спряження. Встановлено узагальнену ортогональність і повноту системи власних функцій таких спектральних задач. Дослідження конкретних, важливих для практики задач складного теплообміну, проведено методом еквівалентної лінеаризації, ідеї якого започатковані в роботах Л.С.Лейбензона, М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського, а також методами дискретизації за часом (Роте) і нелінійних інтегральних рівнянь.

Проведено дослідження фізично нелінійних задач термопружності осесиметрично деформованого багатошарового циліндра. Виведено нелінійні рівняння рівноваги і розроблено ітераційні методи їх розв'язання (А.А.Іллюшина, І.А.Біргера) в поєднанні з методом Папковича-Нейбера.Отримано точний розв'язок однієї модельної задачі термопружності шаруватого циліндра із фізично нелінійного матеріалу. Для двошарового циліндра одержані результати доведено до алгоритмів і програм чисельних розрахунків на ЕОМ.

На основі варіаційного підходу одержано геометрично і фізично нелінійні рівняння рівноваги і руху осесиметрично деформованих довільних і пологих оболонок обертання для різних визначальних функцій. Отримано нові за постановкою динамічні задачі термопружності, в тому числі з приєднаними масами. Здійснено перехід від крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь до систем еквівалентних навантажених інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна. Здійснено скінченновимірну апроксимацію розв'язків нелінійних задач термопружності довільних і пологих оболонок обертання в варіаційній і інтегральній постановках, яка грунтується на використанні фінітних базисних функцій. У випадку варіаційних постановок отримано тридіагональні системи алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень шуканих функцій, а для інтегральних - повні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх значень шуканих функцій на інтервалах розбиття відрізка. Розглянуто питання побудови шуканих розв'язків з вищим ступенем гладкості апроксимацій.

Наукова і практична цінність отриманих результатів. Дослідження в області математичного моделювання нелінійних проблем термопружності стимулюється запитами практики. Нелінійний підхід приводить до суттєвого ускладнення математичної сторони, вимагає застосування абсолютно нової математичної ідеології і принципово нових методів. До тепер тут не існує закінчених загальних теорій і методів, які можуть бути створені тільки на основі широкого аналізу конкретних задач, подібних тим, які розглядаються в даній роботі.

Практична цінність проведених в дисертації досліджень крайових і початково-крайових задач нелінійної термопружності визначається їх внеском в розв'язання нагальних проблем природознавства. Частину отриманих тут результатів у вигляді науково-технічних звітів, технічних інструкцій, інженерних методик розрахунків і спеціалізованих програм таких розрахунків на ЕОМ впроваджено в практику при виконанні ряду комплексних програм по проблемах турбомашонобудування в Інституті механіки НАН України і Київському університеті.

Достовірність результатів, отриманих в дисертаційній роботі, заснована на строгій математичній постановці нелінійних задач термопружності і застосуванні при їх дослідженні теоретично обгрунтованих методів. Вона підтверджується порівнянням отриманих чисельних результатів з експериментальними даними.

Апробація роботи. Основні положення дисертаційної роботи та її окремі результати доповідались і обговорювались на різних наукових нарадах, конференціях, школах і семінарах. Зокрема на:

- "Научных совещаниях по тепловым напряжениям в элементах конструкций" (м.Канів, II - 1962 р., VII - 1967 р., IX - 1969 р., XIV - - 1977 р., XV - 1980 р.);

- "Республиканских конференциях по аэрогидромеханике, тепло- и массопереносу" (м. Київ, I - 1968 р., II - 1969 р.);

- II Республиканській конференції "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" (м. Київ, 1978 р.);

- "I Всесоюзной конференции по механике неоднородных структур" (м. Львів, 1983 р.);

- Всесоюзних і Республіканських школах-семінарах "Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения" (м. Нальчик, 1989, 1990, 1993 рр.; м. Самарканд, 1991 р.; с. Кацивелі, 1992 р.; м. Тернопіль, 1994 р.; м.Чернівці, 1995 р.);

- конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики-вторые Боголюбовские чтения" (м.Київ,1993 р.);

- міжнародній конференції з нелінійних диференціальних рівнянь (м.Київ, 1995 р.);

- загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки НАН України (м.Київ,1983 р., керівник - академік НАНУ Гузь О.М.).

В повному об'ємі дисертаційна робота обговорювалась на семинарі відділу математичної фізики та теорії нелінійних коливань Інституту математики НАН України (м. Київ,1995, 1996 р.р., керівник - академік Ю.О.Митропольський).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 38 друкованих праць. Основні результати отримані автором самостійно. Вклад кожного з співавторів чітко виділено в дисертаційній роботі.

Структура і об'єм роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, п'яти розділів і списку літератури, який містить 117 найменування. Загальний об'єм дисертації - 293 сторінки, в тому числі 17 рисунків і 3 таблиці.

Основний зміст роботи

В даній роботі розглядаються актуальні проблеми нелінійної термопружності, пов'язані із створенням нових математичних моделей тертермонапруженого стану пружних твердих тіл і тонкостінних конструкцій, якісним дослідженням отриманих векторних нелінійних граничних задач та, головним чином, розробкою нових ефективних методів дослідження таких моделей, а також з упровадженням отриманих результатів в інженерну практику.

У вступі сформульовано мету роботи та предмет дослідження, охарактеризовано актуальність проблеми і її практичну цінність, визначено структуру дисертації і в анотованому вигляді викладено її зміст.

Перший розділ містить коротку характеристику основних співвідношень і рівнянь геометрично і фізично нелінійних задач термопружності. Викладення починається з розгляду напруженого і деформованого станів ізотропного пружного тіла, які характеризуються симетричними тензорами напружень і деформацій. Поряд з лінійними розглядаються і квадратичні зв'язки деформацій з першими похідними компонент вектора переміщення.

Матеріальні рівняння, які зв'язують тензор напружень з тензором деформацій, вибираються в такій формі, яка дозволяє найточніше відобразити ті фізичні властивості, урахуванню яких ми надаємо особливого значення, з одного боку, і які мають по можливості найпростіший вигляд, з другого боку. Другій вимозі, без сумніву, найкраще відповідає закон Гука для малих деформацій у тому вигляді, в якому він використовується в класичній теорії пружності. Якщо користуватись принципом оптимального формулювання закону, то і у випадку фізичної нелінійності не слід, якщо це можливо, відступати від математично зручної форми закону Гука. Цього можна досягти при адитивній участі нелінійностей в загальній формі закону пружності для малих деформацій

$$S = 3KD_0 + 2GD' - 3K\varphi(\varepsilon_0)D_0 - 2G\omega(\psi_0)D', \tag{1}$$

де S – тензор напружень; D_0 і D' – кульовий і девіаторний тензори деформацій; K і G – модулі об'ємного стискання і зсуву; $\varphi(\varepsilon_0)$ і $\omega(\psi_0)$ – функції відповідно середнього подовження ε_0 та інтенсивності деформації зсуву ψ_0, які характеризують ступінь відхилення пружних властивостей від лінійних.

Виведення основних рівнянь руху лінійної і нелінійної термопружності засноване на законі Дюгамеля-Неймана, який стверджує: повна деформація дорівнює сумі пружної деформації, зв'язаної з напруженнями відповідними співвідношеннями, і чисто теплового розширення, яке є результатом дії відомого температурного поля.

У випадку фізичної і геометричної нелінійностей задачі термопружності зведено до векторного нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними, яке має вигляд

$$G\Delta\vec{u} + (K+(1/3)G)\,grad\,div\,\vec{u} = 3K\alpha_T\,grad\,T + \rho\ddot{\vec{u}} - \vec{F} + \vec{\Phi}\vec{u}, \tag{2}$$

і скалярного рівняння теплопровідності

$$\Delta T - \frac{1}{a^2}\dot{T} - \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda}\,\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}} = -\frac{w_0}{\lambda}, \quad P\in\Omega,\ t>0. \qquad (3)$$

Тут $\vec{u} = \{u,v,w\}$ – вектор переміщення; T – температура тіла; $F = \{X,Y,Z\}$ – зовнішня сила, віднесена до одиниці маси; α_T, λ_T – коефіцієнти лінійного теплового розширення і теплопровідності; с, ρ – теплоємність і густина; $a^2 = \lambda/c\rho$ – коефіцієнт температуропровідності; λ, μ – сталі Ляме; T_0 – температура тіла в ненапруженому стані; w_0 – інтенсивність джерела теплоти; P – точка тіла Ω з координатами x, y, z; крапкою позначено диференціювання за часом t. Ліва частина рівняння (2) – звичайне лінійне рівняння Ляме, а права – крім температурного доданку $3K\alpha_T \mathrm{grad} T$, сил інерції $\rho\ddot{\vec{u}}$ і масових сил $\vec{F}$ містить доданок $\Phi\vec{u}$, де Φ – векторний нелінійний диференціальний оператор, що діє на вектор $\vec{u}$. Компоненти $\Phi\vec{u}$ визначаються адитивними нелінійними доданками узагальненого закону Гука (1) і квадратичними доданками в геометричних зв'язках деформації- похідні компонент вектора переміщення.

Для квазістатичних задач термопружності, коли інерційними членами і швидкостями відповідно в рівняннях (2) і (3) можна знехтувати, остання розпадається на незалежне скалярне рівняння теплопровідності і нелінійне векторне рівняння рівноваги для наступного визначення вектора переміщення $\vec{u}$

$$G\Delta\vec{u} + [K+(1/3)G]\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u} = \mathrm{grad}(3K\alpha T + \Phi), \qquad (4)$$

де $\mathrm{grad}\Phi = \Phi\vec{u} - \vec{F}$.

Така форма запису дозволяє застосувати ітераційні методи, зокрема метод "пружних розв'язків" А.А.Іллюшина, і звести рівняння (4) до лінійного на кожній із ітерацій, причому Φ заміняється його значенням на попередній ітерації Φ. Розв'язання лінійних рівнянь, в свою чергу, у відповідності з методом Папковича-Нейбера зводиться до знаходження термопружного потенціалу Φ

$$\Delta\Phi = \frac{3}{3K-4G}\,(3K\alpha_T T + \Phi), \tag{5}$$

а також векторної $\vec{B}$ і скалярної B_0 гармонічних функцій

$$\Delta\vec{B} = 0, \quad \Delta B_0 = 0. \tag{6}$$

На кожній із ітерацій розв'язок $\vec{u}$ визначається сумою частинного і загального розв'язків відповідного (4) лінійного рівняння -

$$\vec{u} = grad\Phi + 4(1-\nu)\vec{B} - grad(\vec{B}\cdot\vec{r} + B_0), \tag{7}$$

де ν - коефіцієнт Пуассона, $\vec{r}$ - радіус-вектор. Функціональну довільність, що міститься в гармонічних функціях, можна ефективно використовувати при задоволенні крайових умов.

Поряд з методом А.А.Іллюшина для розв'язання рівнянь квазістатичної термопружності застосовуються також ітераційні методи "змінних параметрів" А.А.Біргера. Однак, в порівнянні з методом "пружних розв'язків", тут виникають додаткові труднощі, пов'язані зі змінністю коефіцієнтів в лінійних диференціальних рівняннях і крайових умовах. Зокрема, в цьому випадку неможливо застосувати метод Папковича-Нейбера.

В заключному параграфі розділу розглянуто питання існування та єдиності розв'язку фізично нелінійних векторних крайових задач термопружності. Отримано умови на нелінійності $\varphi(\theta)$ та $\omega(e_u)$, при виконанні яких має місце

Теорема. Нехай виконуються умови

$$F_i\in L_p(\Omega),\ p>6/5; \quad \sigma_{0i}\in L_m(S_2),\ m>4/3; \quad \alpha T\in L_n(\Omega),\ n>2,$$

а для функцій φ і ω справджуються нерівності

$$\left|\frac{\partial[\varphi(\theta-3\alpha T)]}{\partial\theta}\right|<\alpha, \qquad \sqrt{\frac{K}{3G}}\left|\frac{\partial[\varphi(\theta-3\alpha T)]}{\partial e_u}\right|\leqslant\delta,$$

$$\sqrt{\frac{3G}{K}}\left|\frac{\partial[\omega e_u]}{\partial\theta}\right|\leqslant\beta, \qquad \left|\frac{\partial[\omega e_u]}{\partial e_u}\right|\leqslant\gamma,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \leqslant \lambda^2 < 1, \quad \omega \geqslant 0, \quad \varphi \geqslant 0, \quad \lambda > 0,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial e_u} \geqslant 0, \quad K(T) > 0, \quad G(T) > 0.$$

Тоді послідовність $\vec{u}^{(n)}$ ітераційного процесу в методі "пружних розв'язків" збігається до узагальненого розв'язку основної задачі термопружності для рівняння (2) при довільній початковій ітерації $\vec{u}^{(0)} \in M$.

Як уже зазначалось, для квазістатичних задач термопружності визначення температурного поля $T(P,t)$ являє собою незалежну задачу, за допомогою якої в подальшому визначається термопружний стан пружного тіла. В цьому плані задача теплопровідності є однією із задач математичної фізики і має самостійне значення. Тому в **другому розділі** розглядаються чисто температурні аспекти задач термопружності. Розділ містить коротку характеристику задач теплопровідності з конкретизацією можливих джерел нелінійностей як в диференціальних рівняннях, так і в крайових умовах. Визначення температурного поля в твердому тілі з об'ємом Ω, обмеженим поверхнею Σ, в багатьох випадках вимагає дослідження задач складного теплообміну, який ураховує процеси кондуктивної теплопровідності в Ω, конвективного теплообміну та теплового випромінювання на опуклій частині Σ_1, перевипромінювання теплоти на вгнутій частині Σ_2 поверхні Σ, а також заховану теплоту плавлення у випадку фазових перетворень. Урахування цих факторів вимагає різноманітних узагальнень законів Фур'є, Стефана-Больцмана, плавлення і залучення інтегрального рівняння променевого теплообміну на вгнутій частині поверхні твердого тіла. В загальному випадку для визначення температури $T(P,t)$ нелінійними виявляються як диференціальне рівняння, так і крайові умови. Останні у випадку розв'язності інтегрального рівняння променевого теплообміну до того ж нелокальні на вгнутій частині Σ_2 поверхні Σ.

При дослідженні задач теплопровідності для шаруватих середовищ, складених із шарів з високою теплопровідністю і термічно тонких покрить, значного спрощення досягають вже на рівні постановки задач при усередненні температурного поля по товщині геометрично або фізично тонких шарів. Враховувати вплив таких шарів і покрить дозволяють так звані імпедансні умови спряження і імпедансні крайові умови.

Імпедансні умови містять граничні значення шуканої функції, її перших похідних по нормалі і часу, других похідних в дотичному напрямку і відображають вплив на розподіл температури товщини шару або покриття, його теплоємності c, коефіцієнта теплопровідності λ і коефіцієнтів теплообміну у випадку неідеального теплового контакту між шарами. Слід зазначити, що порядок імпедансних умов вищий, ніж порядок диференціального рівняння. Як правило, імпедансні умови виводились в припущенні, що температура по товщині шару або покриття постійна. Це можливо в тому випадку, коли коефіцієнт теплопровідності досить великий ($\lambda \to \infty$). В той же час зазначений коефіцієнт може бути скінченним. Для того, щоб урахувати його вплив при відкиданні шару або покриття, в цьому випадку необхідно будувати більш адекватну модель усереднення. Така модель отримана в роботі в припущенні зміни температури по товщині шару або покриття за лінійним законом.

При розв'язанні початково-крайових задач теплопровідності для шаруватих середовищ з непогодженим диференціальним оператором, крайовими умовами і умовами спряження в дисертації отримана вагова функція $M(x)$, яка дозволяє симетризувати оператор задачі. Для середовищ з кусково-постійними характеристиками і вагова функція кусково-постійна

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i [\eta(x-x_{i-1}) - \eta(x-x_i)], \quad a_{i-1}<x<a_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

де $\eta(x-x_i)$ – функція Хевісайда.

В одновимірному випадку отримані рекурентні співвідношення для визначення значень M_i $(i=\overline{1,n})$. Показано, що власні функції відповідної спектральної задачі ортогональні з вагою $M(x)\rho(x)$, тобто в розумінні скалярного добутку

$$(u,v) = \int_V uvM(x)\rho(x)dx. \tag{9}$$

Здійснено також симетризацію оператора одновимірних задач теплопровідності з імпедансними крайовими умовами і умовами спряження – отримана друга формула Гріна для симетризованого оператора

$$\int_0^{\tau+0}\int_V \{v[L[u]-c(x)\rho(x)u_t]-u[L[v]+c(x)\rho(x)v_t]\}M(x)dxdt =$$

$$= -\langle u,v\rangle\Big|_0^{\tau+0} + \frac{M_n p(a_n)}{\alpha_{22}^{(n)}}\int_0^{\tau+0}\Big\{v\Big[\alpha_{22}^{(n)}\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{22}^{(n)}u + \gamma_{22}^{(n)}\frac{\partial u}{\partial t}\Big] -$$

$$- u\Big[\alpha_{22}^{(n)}\frac{\partial v}{\partial x} + \beta_{22}^{(n)}v - \gamma_{22}^{(n)}\frac{\partial v}{\partial t}\Big]\Big\}dt\Big|_{x=a_n} - \tag{10}$$

$$- \frac{M_1 p(a_0)}{\alpha_{11}^{(0)}}\int_0^{\tau+0}\Big\{v\Big[\alpha_{11}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{11}^{(0)}u - \gamma_{12}^{(0)}\frac{\partial u}{\partial t}\Big] -$$

$$- u\Big[\alpha_{11}^{(0)}\frac{\partial v}{\partial x} + \beta_{11}^{(0)}v + \gamma_{12}^{(0)}\frac{\partial v}{\partial t}\Big]\Big\}dt\Big|_{x=a_0},$$

з якої випливає умова "узагальненої" ортогональності власних функцій спектральної задачі з параметром в крайових умовах і умовах спряження в розумінні скалярного добутку

$$\langle u,v\rangle = (u,v) + M_1 p(a_0)\frac{\gamma_{12}^{(0)}}{\alpha_{11}^{(0)}}uv\Big|_{x=a_0} +$$

$$+ M_{i+1}p(a_i)\frac{\gamma_{22}^{(i)}}{\alpha_{12}^{(i)}}uv\Big|_{x=a_i} + M_n p(a_n)\frac{\gamma_{22}^{(n)}}{\alpha_{22}^{(n)}}uv\Big|_{x=a_n}. \tag{11}$$

Доведено теорему про повноту власних функцій спектральної задачі з параметром в крайових умовах та умовах спряження для кусково однорідних обмежених зв'язних і незв'язних областей та теорему Стеклова про розвинення в ряди Фур'є за такими функціями довільної функції із простору з відповідним скалярним добутком.

Побудовано функцію Гріна $G(x,\xi;t-\tau)$ у вигляді білінійних рядів Фур'є за власними функціями відповідних спектральних задач, що дозволило, використовуючи (10), (11), звести розв'язання нелінійних задач теплопровідності для шаруватих середовищ до знаходження розв'язку нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтерра. Отримано точні розв'язки лінійних задач у вигляді розвинення в ряди Фур'є за власними функціями спектральної задачі з параметром як в крайових умовах, так і в умовах спряження. На основі вказаних розв'язків за допомогою ЕОМ проведено чисельні розрахунки температурних полів для двошарового вздовж радіуса циліндра.

Значної уваги в другому розділі надано задачам складного теплообміну, в яких враховано випромінювання теплоти з поверхні тіла Σ за нелінійним законом –

$$\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} + q(T) = 0, \quad P\in\Sigma, \quad t>0, \tag{12}$$

та фазові перетворення, коли внутрішня питома теплова енергія є розривною функцією температури – $e = e(T)$. Це приводить до розгляду нелінійного рівняння теплопровідності

$$\Delta T - \frac{1}{\lambda_T}\left[\frac{\partial e}{\partial T} + [e]_{T^*}\,\delta(T-T^*)\right]\dot{T} = -\frac{w_0}{\lambda_T}, \tag{13}$$

при нелінійній крайовій умові. Тут $[e]_{T^*}$ – стрибок функції $e(T)$ в точці $T=T^*$, який дорівнює енергії поглинання або виділення при фазових перетвореннях.

Якщо поверхня Σ має вгнуту частину Σ_2, то крайова умова на ній набуває вигляду

$$\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} + q(T) - \varepsilon E = 0, \quad P\in\Sigma_2, \quad t>0, \tag{14}$$

де $E=E(P,T)$ – шукана інтегральна напівсферична інтенсивність падаючого випромінювання, а ε – ступінь чорноти поверхні Σ_2. У цьому випадку для замикання задачі теплопровідності (13), (14) залучається інтегральне рівняння променевого теплообміну, яке зв'язує скалярні поля T і E на Σ_2 –

$$E(P,t) = E_{\text{дж.}}(P,t) + \int_{\Sigma_2} K(P,Q)\{rE(Q,t) + q[T(P,t)]\}d\sigma, \quad P\in\Sigma_2, \qquad (15)$$

де $K(P,Q) = \cos(P-Q,n_P)\cdot\cos(Q-P,n_Q)/\pi|P-Q|^2$, $E_{\text{дж.}}(P,t)$ – інтенсивність зовнішнього джерела, $r=1-\varepsilon$ – коефіцієнт відбиття. В тих випадках, коли вдається побудувати резольвенту $R(P,Q)$ ядра $K(P,Q)$ після виключення $E(P,t)$ із крайової умови, одержуємо задачу з нелінійною і нелокальною крайовою умовою.

Дослідження таких нових за постановкою задач складного теплообміну проводиться методами нелінійних інтегральних рівнянь, еквівалентної лінеаризації, де використовуються точні розв'язки стаціонарних задач і, крім того, різні апроксимації вихідних розв'язків, дискретизації за часом (метод Роте), неявних різницевих схем, усереднення за просторовою змінною, переходу до нормальних форм для квазілінійних параболічних рівнянь, тобто розгляду постановок задач для ізотермічних поверхонь.

Зміст методу нелінійних інтегральних рівнянь полягає в зведенні початково-крайових задач для тепловипромінюючого твердого тіла до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння мінімальної розмірності з наступним застосуванням до нього одного з наближених ітераційних або варіаційних методів. Це реалізується за допомогою другої формули Гріна для лінійного рівняння теплопровідності і функції Гріна, яка є розв'язком відповідних розглядуваних крайових задач з лінійними однорідними крайовими умовами і умовами причинності.

Ідеї застосованого в дисертації методу еквівалентної лінеаризації беруть початок в роботах Л.С.Лейбензона, М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського і суттєво використовують спеціальні апроксимації і конструкції точних розв'язків відповідних стаціонарних задач з деякими вивільненими параметрами, які залежать від часу. Вимога рівності нулю нев'язки диференціальних рівнянь в тому чи іншому інтегральному смислі приводить до значно простіших задач Коші для визначення цих параметрів.

На відміну від методу еквівалентної лінеаризації, в якому використовується апроксимація за координатою, в методі Роте виконується апроксимація за часом t, що дозволяє звести початково-крайову задачу до крайових задач на кожному часовому шарі. Розв'язок останніх запропоновано отримувати методами нелінійних інтегральних рівнянь.

Оцінка похибки наближених розв'язків здійснюється за допомогою математичних експериментів на основі неявних різницевих схем. Для зниження розмірності задач застосовуються викладені вище усереднення по товщині оболонок з досить великим коефіцієнтом теплопровідності.

У тих випадках, коли шукані розв'язки монотонні по одній із координат $u(x,y,z,t) \leftrightarrow z(x,y,u,t)$, за допомогою спеціальних перетворень типу Мізеса здійснено перехід від задачі визначення температурного поля до задачі визначення поля ізотерм. Не зважаючи на складність і нелінійність виразу для диференціального оператора, а також необхідність знаходження області визначення розв'язку, в ряді випадків постановка оберненої задачі краща, ніж постановка прямої задачі. Доцільність переходу до постановки такого роду задач виправдана і необхідна, тому що при прогнозуванні, оптимізації і управлінні тепловими процесами визначальним є не температурне поле $u = u(x,y,z,t)$, а динаміка його ізотермічних поверхонь $z = z(x,y,u,t)$.

Переліченими методами розв'язані задачі Стефана про НВЧ і інфрачервоне нагрівання необмеженої пластини, розглянуто різні постановки двовимірних задач теплопровідності з фазовими перетвореннями, які виникають в спецелектрометалургії. Отримано розв'язки нелінійних задач кондуктивного і радіаційного теплообміну в тонких оболонках стосовно до розрахунків теплових режимів різноманітної апаратури, покликаної працювати в космосі, і т.ін.

Третій розділ присвячено дослідженню фізично нелінійної задачі термопружності осесиметрично деформованого багатошарового циліндра. Виходячи із загального зв'язку між тензорами напружень і деформацій в фізично нелінійних середовищах (1), виведено диференціальні рівняння і натуральні крайові умови для визначення вектора переміщення й осесиметрично деформованого циліндра

$$L\vec{u} = \vec{f}_0 + \vec{f}_1(\vec{u},\varphi,\omega), \quad \Gamma\vec{u} = \vec{\phi}_0 + \vec{\phi}_1(\vec{u},\varphi,\omega), \tag{16}$$

де L і Γ – матричні диференціальні оператори. В цих рівняннях в явному вигляді виділено лінійні оператори, а всі нелінійності розглядаються як збурення правих частин, що, як правило, має місце у випадку слабкої фізичної нелінійності, коли значення функцій $\varphi(\varepsilon_0) = 1-\chi(\varepsilon_0)$ і $\omega(\psi_0)=1-\gamma(\psi_0^2)$ малі.

Отримано точний аналітичний розв'язок найпростішої модельної задачі ($(\omega(\psi_0)=0)$ для нескінченно довгого кругового циліндра, коли температурне поле осесиметричне і не залежить від осьової координати z –

$$u(r) = \frac{1}{r}\int_a^r \tilde{\theta}(r,C_1)r\,dr + \frac{C_2}{r}, \tag{17}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі; $\tilde{\theta}$ – додатний корінь рівняння

$$\theta - A\varphi(\theta)(\theta - \theta_T) = \theta_л; \tag{18}$$

A, θ_T і $\theta_л$ – відомі величини. Визначення C_1, C_2 і $\tilde{\theta}$ зводиться до сумісного розв'язку рівняння (18) і двох нелінійних рівнянь, які отримані із крайових умов після підстановки в них розв'язку (17).

Встановлено умову на функцію нелінійності $\varphi(\theta)$: $\varphi(\theta) \leqslant C/|\theta-\theta_T|$, $C>0$, при виконанні якої рівняння (18) має єдиний додатний корінь.

У випадку $\varphi(\theta) = Z\theta/|\theta_T-\theta|$, де Z – безрозмірний параметр, який характеризує ступінь відхилення властивостей середовища від лінійного закону Гука, $\tilde{\theta} = \theta_л/(1+AZ)$. Сталі C_1 і C_2 при цьому визначаються із крайових умов. Отриманий точний розв'язок може бути використаний для оцінки похибки в методі "пружних розв'язків" А.А.Іллюшина.

Для знаходження розв'язку нелінійної векторної крайової задачі (16) використані конструктивні ітераційні методи розв'язання, зокрема, метод "пружних розв'язків" А.А.Іллюшина. Процес ітерацій за цим методом будується за схемою

$$\begin{aligned} L\vec{u}^{(k+1)} &= \vec{f}_0 + \vec{f}_1(\vec{u}^{(k)},\varphi^{(k)},\omega^{(k)}), \\ T\vec{u}^{(k+1)} &= \vec{\phi}_0 + \vec{\phi}_1(\vec{u}^{(k)},\varphi^{(k)},\omega^{(k)}), \end{aligned} \tag{19}$$

де індексом k позначено k-те наближення до розв'язку задачі. Ітераційний процес, представлений формулами (19), починається з $k=0$, коли $\vec{u}^{(0)}=0$, $\varphi^{(0)}=\omega^{(0)}=0$. У цьому випадку дорівнюють нулю всі доданки, зв'язані з нелінійними членами, тобто розв'язується добре вивчена лінійна задача.

Загальний розв'язок $(k+1)$-го наближення записується у вигляді суми частинного розв'язку неоднорідного рівняння (5) і загального розв'язку однорідного векторного рівняння (4) у формі (6), (7), запропонованій П.Ф.Папковичем і Г.Нейбером.

Використання методу А.А.Іллюшина в поєднанні з методом Папковича-Нейбера дозволяє визначити теплові напруження в шаруватому порожнистому циліндрі скінченної довжини з точним задоволенням крайових умов на бокових поверхнях і наближеним (в розумінні принципу Сен-Венана) – на торцях. У випадку дробово-лінійного закону фізичної нелінійності отримано чисельно-аналітичний розв'язок задачі термопружності для двошарового циліндра з еквівалентними пружними і тепловими характеристиками – коефіцієнтом Пуассона ν^* і коефіцієнтом теплообміну α_T^*. Розроблено та реалізовано на ЕОМ програми для розрахунків термопружного стану.

В останньому параграфі цього розділу розглянуто питання існування і єдиності розв'язків загальної задачі термопружності для осесиметричного деформованого скінченного циліндра з фізично нелінійного матеріалу. Проведено аналіз осесиметричних векторних полів і після переходу до безкоординатної форми розглядуваної нелінійної векторної задачі введено поняття узагальненого розв'язку останньої. Методами нелінійного функціонального аналізу задачу зведено до операторного вигляду

$$A_\eta w + \Delta\sigma = 0 \text{ в } \Omega, \quad 2\eta\mu_r + \sigma = p \text{ на } S,$$

отримано апріорні оцінки для узагальнених розв'язків, досліджено відповідні лінеаризовані задачі, встановлено умови монотонності оператора $A_\eta w$ та доведено теорему про існування і єдиність узагальнених розв'язків задачі.

Дослідженню статичних і динамічних нелінійних задач термопружності довільних і пологих оболонок обертання присвячено **IV розділ** дисертації. Оболонки обертання широко застосовуються в техніці та будівництві у вигляді різних тонкостінних елементів конструкцій. За їх допомогою досягається створення легких, економічних і водночас міцних споруд, а також гнучких пружних елементів приладів спеціального призначення. Такі елементи працюють в умовах нерівномірного нестаціонарного нагріву і зазнають значних силових впливів. Це призводить до того, що в приладах виникають теплові напруження, які супроводяться динамічними ефектами і великими прогинами, що унеможливлює застосування лінійної теорії оболонок, котра в таких випадках не може дати не тільки кількісного, а й якісного опису напруженого і деформованого стану оболонок обертання. Такий опис стає можливим тільки на основі геометрично нелінійної теорії. Крім того, на сучасному етапі розвитку техніки широко застосовуються тонкі оболонки, виготовлені із матеріалів, пружні властивості яких описуються нелінійними залежностями між напруженнями і деформаціями. Для інженерних розрахунків таких оболонок треба виходити із фізично нелінійної теорії.

В **четвертому розділі** на основі понять і формул теорії поверхонь встановлюються геометрично нелінійні співвідношення між деформаціями і компонентами вектора переміщення довільної оболонки обертання. Розглянуто різні закони фізично нелінійних залежностей (1) між напруженнями і деформаціями в тонких оболонках. На основі закону Дюгамеля-Неймана отримано зв'язки між зусиллями, моментами та деформаціями.

Наведено варіаційні постановки задач термопружності оболонок обертання, які зводяться до відшукання мінімуму наступного функціоналу повної потенціальної енергії:

$$Э = \mathfrak{I}(u,w) = \pi\left\{\int_0^l F(s,u,w,u',w',w'')ds + \Phi(u(l),w(l),w'(l))\right\}, \qquad (20)$$

де F і Φ – задані функції своїх аргументів, що відображають крім роботи пружних сил і зовнішніх навантажень також роботу температурних напружень на зміні деформацій і кривин.

Поряд з варіаційними, значна увага приділена диференціальним постановкам задач, які описуються рівнянням Ейлера і натуральними крайовими умовами для функціоналу $\mathfrak{I}(u,w)$. У векторно-матричній формі запису вони представляються рівняннями

$$L_0\vec{u} = -L_1\vec{u} - \vec{f}_0 + \vec{f}_1(\vec{u}), \quad l\vec{u} = \vec{\phi}_0 + \vec{\phi}_1(\vec{u}), \qquad (21)$$

з явно виділеними лінійними операторами диференціальних рівнянь шостого порядку L_0, L_1, оператором крайових умов Γ і нелінійностями тільки в правих частинах $\vec{f}_1(\vec{u})$, $\vec{\phi}_1(\vec{u})$.

Розглянуто різні спрощення диференціальних постановок задач термопружності оболонок обертання, зв'язані з нерозтяжністю, безмоментністю і геометрією оболонок і, крім того, вибором визначальних функцій.

Проведено дослідження динамічних задач нелінійної термопружності осесиметрично деформованих оболонок обертання, в яких враховані інерційні члени в диференціальних рівняннях руху. Отримано нові за постановкою задачі термопружності оболонок з приєднаними масами, які містять інерційні члени як в диференціальних рівняннях, так і в крайових умовах.

За допомогою формул і функцій Гріна виконано перехід від диференціальних постановок квазілінійних задач термопружності (21) до систем еквівалентних навантажених нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, які записано у вигляді

$$\vec{u}(x) = \vec{u}_л(x) + \int_0^a G(x;\xi)\vec{f}_{11}(\vec{u}(\xi))d\xi + \vec{P}(x,\vec{u}(0),\vec{u}(a)). \qquad (22)$$

Наближеним методам розв'язання геометрично і фізично нелінійних задач термопружності оболонок обертання в варіаційній, диференціальній і інтегральній постановках присвячено п'ятий розділ дисертації. Розглянуто питання скінченновимірної апроксимації шуканих розв'язків у вигляді лінійних комбінацій функцій із скінченним носієм того чи іншого ступеня гладкості (фінітних функцій)

$$u(x) \approx u^N(x) = \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_i[\eta(x-x_{i-1}) - \eta(x-x_i)],$$

$$v(x) \approx v^N(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i\phi_i(x), \qquad (23)$$

$$w(x) \cong w^N(x) = \sum_{i=1}^{N} [w_i\phi_i(x)+w'_i\chi_i(x)],$$

де $\eta(x-x_i)$ – функції Хевісайда, різниця яких для різних значень i визначає одиничну сходинку; $\varphi_i(x)$ – лінійні функції-кришечки; $\phi_i(x)$, $\chi_i(x)$ – кубічні функції-кришечки.

Для визначення коефіцієнтів таких комбінацій застосовувались варіаційно-різницеві і проекційно-сіткові методи. Перші з них пов'язані з мінімізацією отриманих функціоналів (20) (метод Рітца), а другі – з вимогою ортогональності нев'язки диференціальних (21) або інтегральних (22) рівнянь до всіх фінітних базисних функцій (метод Бубнова-Гальоркіна).

Ефективність таких методів визначається перш за все тим, що на відміну від методу Фур'є, коефіцієнти лінійних комбінацій фінітних функцій мають чіткий апроксимаційний зміст – це середні ($\bar{u}_i$), вузлові (v_i, w_i) значення функцій, а також вузлові значення самих функцій w_i та їх перших похідних w'_i.

Варіаційно-різницева схема для функціоналу нелінійної задачі термопружності оболонок обертання (20), в якій використовуються фінітні функції-кришечки і кубічні функції-кришечки, приводить до тридіагональних систем алгебраїчних рівнянь з явно виділеними поліноміальними нелінійностями в правих частинах –

$$\sum_{j=i-1}^{i+1} (U_{ij,k}u_j + W_{ij,k}w_j + W'_{ij,k}w'_j) = f_{ik} -$$
$$- F_k(u_{i-1},u_i,u_{i+1};w_{i-1},w_i,w_{i+1};w'_{i-1},w'_i,w'_{i+1}), \quad i=\overline{1,N}, \quad k=1,2,3. \tag{24}$$

На аналітичному рівні обчислено елементи матриць і праві частини отриманих систем.

Розглянуто проекційно-сіткові схеми для інтегральних рівнянь пологих оболонок обертання. Отримано системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх $\bar{s}_i$, $\bar{\vartheta}_i$ та вузлових s_i, ϑ_i значень вигляду

$$\bar{\vartheta}_j\Delta_j - \sum_{i=1}^{N} a_{1ij}\bar{s}_i = f_{0j} - \sum_{i=1}^{N} f_{1ij} - \sum_{i=1}^{N} b_{1ij}\bar{\vartheta}_i\bar{s}_i,$$
$$\bar{s}_j\Delta_j - \sum_{i=1}^{N} a_{2ij}\bar{\vartheta}_i = f_{0j} - \sum_{i=1}^{N} f_{2ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} b_{2ij}\bar{\vartheta}_i^2, \quad (25)$$

На відміну від системи (24) матриці останніх систем повністю завантажені.

Розглянуто проекційно-сіткові і варіаційно-різницеві схеми побудови наближених розв'язків фізично нелінійних задач термопружності гнучких оболонок обертання в диференціальних і варіаційних постановках. Розв'язок систем алгебраїчних рівнянь з поліноміальними правими частинами можна одержати методом Ньютона з використанням ПЕОМ.

Виконано якісне дослідження нелінійних початково-крайових задач осесиметрично деформованих гнучких оболонок з приєднаними масами на контурі. Для відповідних динамічних рівнянь та крайових умов з інерційними членами введено поняття узагальненого розв'язку та доведено теореми про його існування у відповідних навантажених функціональних просторах. При доведенні використовуються проекційний метод Б.Г.Гальоркіна та теореми вкладення С.Л.Соболєва.

Основні результати дисертації

В дисертації з залученням нових ідей, спеціальних прийомів і застосуванням точних аналітичних, наближених і чисельних методів проведено дослідження математичних моделей нелінійних задач термопружності, які приводять до крайових і початково крайових задач для векторних і скалярних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому одержано ряд нових результатів.

1. Запропоновано нові математичні моделі термопружності, які відображають нелінійні властивості матеріалів і нелінійні деформації. Для їх дослідження застосовуються ітераційні методи в поєднанні з

методом Папковича-Нейбера. Доведено збіжність відповідних ітераційних процесів в просторі W_2^1.

2. Розглянуто нові за постановкою нелінійні задачі складного теплообміну, в яких враховано випромінювання теплоти з поверхні деформованого тіла, можливі фазові перетворення і перевипромінювання теплоти на вгнутих поверхнях, а також їх розумні спрощення, які базуються на спеціальних усередненнях температурного поля по товщині шарів з високою теплопровідною здатністю і переході до задач відносно поверхонь рівня. Методом інтегральних рівнянь за допомогою формул і функцій Гріна для лінійного оператора здійснено перехід до еквівалентних нелінійних інтегральних постановок задач.

3. Отримано вагову функцію і другу формулу Гріна для неузгодженого з крайовими умовами і умовами спряження оператора диференціального рівняння теплопровідності. Побудовано функцію Гріна у вигляді білінійного ряду за власними функціями спектральних задач з параметром в крайових умовах та умовах спряження для кусково-однорідних обмежених зв'язних і незв'язних областей. Встановлено узагальнену ортогональність власних функцій та доведено теореми про їх повноту і розвинення в ряди Фур'є довільної функції із простору з відповідним скалярним добутком. Отримано точні розв'язки лінійних задач у вигляді рядів за власними функціями, і за допомогою ЕОМ проведено розрахунки температурного поля двошарового вздовж радіуса циліндра.

4. Методом еквівалентної лінеаризації, ідеї якого започатковані в роботах Л.С.Лейбензона, М.М.Крилова,М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського, а також методами дискретизації за часом (Роте) і нелінійних інтегральних рівнянь отримано чисельно-аналітичні розв'язки важливих для практики задач складного теплообміну.

5. Проведено дослідження фізично нелінійних задач термопружності осесиметрично деформованого багатошарового вздовж радіуса циліндра, виведені нелінійні рівняння рівноваги і розроблені ітераційні методи їх розв'язання (А.А.Іллюшина, І.А.Біргера) в поєднанні з методом Папковича-Нейбера. Отримано точний розв'язок однієї модельної задачі термопружності шаруватого циліндра із фізично нелінійного матеріалу. Розроблено програми та алгоритми розрахунків на ЕОМ термопружного стану двошарового циліндра.

6. Розглянуто питання існування і єдиності розв'язків загальної задачі термопружності для осесимметричного деформованого скінченного циліндра з фізично нелінійного матеріалу. Проведено аналіз осесиметричних векторних полів і після переходу до безкоординатної форми розглядуваної нелінійної векторної задачі введено поняття узагальузагальненого розв'язку останньої. Методами нелінійного функціонального аналізу задачу зведено до операторного вигляду, отримано апріорні оцінки для узагальнених розв'язків, досліджено відповідні лінеаризовані задачі, встановлено умови монотонності оператора задачі та доведено теорему про існування і єдиність узагальнених розв'язків.

7. На основі варіаційного підходу одержано геометрично і фізично нелінійні рівняння рівноваги і руху осесиметрично деформованих довільних і пологих оболонок обертання для різних визначальних функцій. Отримано нові по постановці динамічні задачі термопружності, в тому числі з приєднаними масами. Здійснено перехід від крайових задач для систем нелінійних диференціальних рівнянь до систем еквівалентних навантажених інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна.

8. Здійснено скінченновимірну апроксимацію розв'язків нелінійних задач термопружності довільних і пологих оболонок обертання в варіаційній і інтегральній постановках, яка базується на використан-

ні фінітних базисних функцій. Отримано тридіагональні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх значень функцій для варіаційних постановок і повні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно середніх значень на інтервалах розбиття у випадку інтегральних постановок задач. Розглянуто питання побудови більш гладких апроксимацій шуканих розв'язків.

9. Проведено дослідження нелінійних початково-крайових задач осесиметрично деформованих гнучких оболонок з приєднаними масами на контурі. Для відповідних динамічних рівнянь та крайових умов з інерційними членами введено поняття узагальненого розв'язку та за допомогою проекційного методу Б.Г.Гальоркіна і теорем вкладення С.Л.Соболєва доведено теореми про його існування у відповідних навантажених функціональних просторах.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. *Комаров Г.Н.* Нестационарная теплопроводность многослойных систем //Тепловые напряжения в элем. констр.- 1967.- Вып.7.- С.166-173.
2. *Комаров Г.Н.* О собственных функциях и собственных значениях систем дифференциальных уравнений и разложении произвольной векторфункции//Мат. физика:Респ.межвед.сб. - 1968.- Вып.4 - С. 66-77.
3. *Комаров Г.Н.* Теплопроводность многослойных систем с несовершенным тепловым контактом //Тр. I Респ. конф. по аэрогидромеханике, тепло- и массообмену.- Киев: Изд-во КГУ, 1969. - С.334-338.
4. *Комаров Г.Н.* Нестационарная теплопроводность многослойного цилиндра//Тез. докл. II Респ. конф. по аэрогидромеханике, тепло- и массообмену.- Киев: Изд-во КГУ, 1969. - С. 129.
5. *Комаров Г.Н.* Нестационарная теплопроводность многослойной сферы //Тез.докл. II Респ. конф. по аэрогидромеханике, тепло- и массообмену.- Киев: Изд-во КГУ, 1969. - С. 130.

6. *Комаров Г.Н.* О термонапряженном состоянии многослойного цилиндра//Тепловые напряжения в элементах конструкций.- 1970. - Вып.3. - С. 35 - 49.

7. *Комаров Г.Н.* Решение задачи теплопроводности пакета пластин//Науч. сб. КТЭИ. - 1971. - Вып.9. - С. 36-43.

8. *Комаров Г.Н.* Решение задачи теплопроводности многослойного диска //Науч. сб. КТЭИ. - 1971.- Вып.9. - С. 43-50.

9. *Комаров Г.Н.* Теплопроводность многослойных систем при неидеальном тепловом контакте //Тез. докл. XIV Науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций.- Киев: Наук.думка, 1977.-С.61.

10. *Комаров Г.Н.* Теплопроводность многослойных систем при неидеальном тепловом контакте //Тез.докл. II Респ. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе".- Киев: Изд-во АН УССР, 1978. - С. 95.

11. *Мотовиловец И.А., Комаров Г.Н.* О термонапряженном состоянии многослойного цилиндра при неидеальном термоконтакте //Тез.докл. XV Науч.совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций.-Киев: Наук. думка, 1980. - С. 65.

12. *Мотовиловец И.А., Комаров Г.Н., Червинко О.П.* Термонапряженное состояние многослойных тел // Тез. докл. I Всесоюз. конф. по механике неоднородных структур.- Киев: Наук.думка, 1980. -С. 151.

13. *Комаров Г.Н., Мотовиловец И.А.* Теплопроводность многослойных тел при неидеальном тепловом контакте -Киев, 1983.- С.27-34.-(Препр. /АН Украины. Ин-т математики; 83.45).

14. *Комаров Г.Н., Мотовиловец И.А., Червинко О.П.* Нестационарное напряженное состояние двухслойного цилиндра при контактном термосопротивлении //Прикл. механика. - 1983. -19, № 11. - С. 46-51.

15. *Комаров Г.Н.* СВЧ нагрев неограниченной пластины//Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С. 26-29.

16. *Комаров Г.Н.*, *Мотовиловец И.А.* Нестационарное температурное поле многослойной стенки //Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. - С. 52-60.

17. *Березовский А.А.*, *Комаров Г.Н.*, *Юртин И.И.*, Применение сопряженных задач теплопроводности с подвижной границей к расчету температурных полей в пищевых продуктах //Физико-технические приложения нелинейных краевых задач. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С. 19-27.

18. *Комаров Г.Н.* Задача Стефана при СВЧ нагреве неограниченной пластины //Математическое моделирование физических процессов.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. - С. 78-82.

19. *Комаров Г.Н.* Задача Стефана при СВЧ нагреве //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1990. - С. 64-65.

20. *Комаров Г.Н.* Интегральная формулировка одномерных задач Стефана. //Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. -Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. - С. 68-70.

21. *Комаров Г.Н.*Эквивалентная линеаризация в задачах Стефана//Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений.-Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. - С. 140-145.

22. *Комаров Г.Н.* Математические модели двумерных процессов теплопроводности с фазовыми переходами //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.-Киев:Ин-т математики АН УССР, 1992. - С. 58-60.

23. *Комаров Г.Н.* Двумерные задачи Стефана в проблемах плавления и испарения//Тез. докл.конф. "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений математической физики" - Вторые Боголюбовские чтения. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1992. - С. 74.

24. *Комаров Г.Н.* Уравнения термоупругости гибких оболочек вращения в перемещениях //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения -Киев:Ин-т математики АН Украины,1993.- С.64-68.

25. *Комаров Г.Н.* Уравнения термоупругости осесимметрично деформированных гибких пологих оболочек вращения //Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993.- С. 68-70.

26. *Комаров Г.Н.*Обобщенная ортогональность собственных функций несамосопряженной спектральной задачи с параметром в краевых условиях и условиях сопряжения//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 103-106.

27. *Комаров Г.М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності //Краевые задачи математической физики. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 56 - 62.

28. *Комаров Г.М.* Одномірні задачі нестаціонарної теплопровідності з імпедансними умовами спряження і крайовими умовами //Краевые задачи математической физики. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 67 - 68.

29. *Комаров Г.Н.* Физически нелинейная задача термоупругости осесимметрично деформированного многослойного цилиндра.- Киев,1994. - 42 с. -(Препр./АН Украины. Ин-т математики; 94.30).

30. *Комаров Г.Н.* Напряженное состояние слоистого цилиндра из физически нелинейного материала//Нелинейные краевые задачи математиче-

ской физики и их приложения.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 100-103.

31. *Комаров Г.Н.* Нелинейные задачи термоупругости оболочек вращения. Основные уравнения в перемещениях.- Киев, 1994. - 68 с.-(Препр./ АН Украины. Ин-т математики; 94.11).

32. *Комаров Г.Н.* Нелинейные задачи термоупругости оболочек вращения. Вариационно-разностные и проекционно-сеточные схемы построения приближенных решений.- Киев, 1994. - 56 с.-(Препр./НАН Украины. Ин-т математики; 94.12).

33. *Комаров Г.М.* Нелінійні задачі кондуктивного і радіаційного теплообміну //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1995.- Вип.8. - С. 199-203.

34. *Comarov G.N.* Mathematical models and approximate methods for solvig of nonlinear problems of thermoelasticity //International Conference Nonlinear Differential Equations, Kiev, August 21-27, 1995, - P. 36.

35. *Комаров Г.Н.* Спектральные задачи с параметром в краевом условиях и условиях сопряжения//Укр.мат.журн. - 1995. - 47. - №12.- С. 1653-1660.

36. *Комаров Г.Н., Литвиненко А.В.* Уравнения движения осесимметрично деформированных пологих гибких оболочек вращения с присоединенными массами//Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1994. - С. 147-150.

37. *Комаров Г.Н., Ошунов М.М.* О разрешимости физически нелинейных задач термоупругости//Укр.мат.журн.-1995.- 47.- №12.- С.949-953.

38. *Комаров Г.М.* Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності//Доповіді НАН України.- 1996. - № 7. - С.26-31.

КОМАРОВ Г.Н. "Математические модели и приближенные методы решения нелинейных проблем термоупругости".

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика, Институт математики НАН Украины, 1996 г.

Защищаются 38 научных работ, которые содержат исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих при математическом моделировании термонапряженного состояния пространственных тел и тонкостенных конструкций, включая создание моделей, правильную постановку сложных нелинейных задач математической физики, их разумное упрощение, выяснение вопросов разрешимости, разработку эффективных конструктивных методов решения, детальный анализ и решение нелинейных краевых задач, типичных и особенно важных для инженерной практики. Получено ряд фундаментальных результатов по нелинейным проблемам термоупругости с учетом нелинейных свойств материалов, конечных деформаций,излучения теплоты, фазовых переходов и переизлучения теплоты на вогнутых поверхностях. Разработанные алгоритмы решений позволяют использовать современные вычислительные средства для проведения экспериментов и вносят определенный вклад в создание эффективных методов математических расчетов, прогнозов и оптимизации термонапряженного состояния пространственных тел и тонкостенных конструкций. Исследование конкретных нелинейных систем дифференциальных уравнений основаны на новых идеях, специальных приемах построения приближенных решений, использовании всего арсенала конструктивных методов нелинейного анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Komarov G.N."Mathematical models and approximate methods for solving of nonlinear problems of thermoelasticity"

Thesis for a scientific degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 - *Mathematical Physics. Ukrainian Academy of Sciences, Institute of Mathematics. Kiev, 1996.*

38 research papers have been defended. They contain a theoretical analysis of systems of nonlinear partial differential equations arising in the Mathematical modelling thermoelasticity of space bodies and thin-walled constructions, including construction of mo-

dels, correct setting of complex nonlinear problems of mathematical physics, their reasonable simplification, investigation of solvability, elaboration of effective, constructive methods of solving the problems, a detailed analysis and a nonlinear boundary value problems solution, which are typical and important for engineering practice. A set of fundamental results on nonlinear problems of thermoelasticity with accounting nonlinear properties of matherials, finite deformations, heat radiation, phase transitions and reradiation on concave surfaces has been obtained in the thesis. Elaborated algorithms of solution of the above problems allow the use of modern computing resources to carry out experiments and make definite contribution to the creation of effective methods for mathematical calculations, forecasts and optimizations of thermostressed states of space bodies and thin-walled constructions. The investigations of concrete nonlinear systems of differential equations are based on some new ideas, special devices for the construction of approximate solutions, on using the whole arsenal of constructive methods of the nonlinear analysis and the theory of partial differential equations.

Ключові слова: *нелінійний закон Гука, скінченні деформації, нелінійні рівняння Ляме, закон Дюгамеля-Неймана, нелінійні рівняння термопружності, методи теорії збурень, метод Папковича-Нейбера, нелінійні закони теплопровідності, випромінювання та перевипромінювання теплоти, фазові перетворення, усереднення, імпедансні крайові умови та умови спряження, симетризація оператора, вагова функція, узагальнена ортогональність, формула та функція Гріна, інтегральні рівняння, фізично нелінійні задачі термопружності, метод А.А.Іллюшина, принцип Сен-Венана, оболонки обертання, пологі оболонки, геометрична нелінійність, потенціальна енергія, рівняння Ейлера, приєднані маси, системи диференціальних та інтегральних рівнянь, методи Рітца та Бубнова-Гальоркіна, фінітні функції, варіаційно-різницева та проекційно-сіткова схеми.*

Підп. до друку 04.04.96. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс друк.
Ум. друк. арк. 2,09. Ум. фарбо-відб. 2,09. Обл.-вид. арк. 1,5.
Тираж 100 пр. Зам. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3