

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

БИСЧОКОВ Руслан Мусарбиевич

ВНУТРЕННЕ-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА  
С НЕЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ  
ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ  
ПОЛОВОЗРАСТНОЙ  
СТРУКТУРЫ ПОПУЛЯЦИИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

01.01.03 — математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

КИЕВ — 1996

077.95  
3:51

46.36.437

Диссертация является рукописью.

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00760726 (S)

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте математики и автоматизации Кабардинского филиала Российской академии наук (г.Наурат)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, академик РАЕН и АМАН НАХУШЕВ А.М.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор БЕРЕЗОВСКИЙ А.А.

кандидат физико-математических наук, доцент ГОРДИНСКИЙ Л.Д.

Ведущая организация: ИНСТИТУТ ГИДРОМЕХАНИКИ НАН УКРАИНЫ

Защита диссертации состоится 14 января 1997 года в 15 часов на заседании специализированного совета Д.01.66.02 при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601 Киев - 4, ГСЦ, ул. Терещенковская, 3.

3 диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института

Автореферат разослан 12 декабря 1996 г.

Ученый секретарь  
специализированного совета

*А. Лука*  
ЛУЧКА А.Ю.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Работа посвящена исследованию некоторых математических моделей, которые описывают динамику половозрастной структуры популяции, в случае двуполой популяции, и внутренне-краевые задачи с нелокальным смещением для систем уравнений параболического типа.

Проблема динамики половозрастной структуры популяции занимает одно из центральных мест в экологических исследованиях. Это связано с тем, что на протяжении жизненных (популяционных) циклов изменяются не только численность популяции, но и, в первую очередь, половозрастная структура.

Учет половозрастной структуры популяции обусловлен так же тем, что плодovitость и смертность в популяции в основном зависят от их возраста и от соотношения между различными возрастными группами особей и различными полами этих особей.

Информация о половозрастной структуре необходима также для рациональной эксплуатации как естественных, так и искусственных популяций. Действительно, стратегия максимального сбора "урожая" определенного возраста может сильно отличаться от такой же стратегии для всей популяции.

В связи с этим, возникает необходимость исследования имеющихся и построения новых математических моделей динамики половозрастной структуры популяции.

В работе рассматриваются некоторые математические модели с половозрастной структурой, описывающие динамику биологических процессов, и внутренне-краевые задачи с нелокальным смещением для систем уравнений параболического типа.

**Цель работы.** Целью работы является разработка и исследование качественно новых математических моделей динамики половозрастной структуры популяции. Изучение вопросов существования и единственности решений соответствующих краевых задач. Исследование внутренне-краевых задач с нелокальным смещением для систем уравнений параболического типа, доказательство существования и единственности регулярного решения.

**Общая методика исследования.** В работе используется метод эквивалентной редукции к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода и метод тепловых потенциалов.

**Научная новизна.** В диссертационной работе рассмотрены новые постановки задачи. Научную новизну диссертационной работы составляют следующие результаты:

- Доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для системы уравнений параболического типа, описывающая динамику половозрастной структуры популяции, в случае двуполой популяции.

- Доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для системы уравнений параболического типа, описывающая динамику половозрастной структуры популяции, в случае двуполой популяции, когда начало и конец репродуктивного периода зависят от времени.

- Исследована нелокальная задача для системы уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами.

- Доказана теорема существования и единственности регулярного решения внутренне-краевой задачи со смещением для системы  $n$  уравнений параболического типа, в случае, когда коэффициент диффузии пред-

ставляет собой: положительно определенную диагональную  $(n \times n)$ -матричную функцию, положительно определенную однобокую  $(n \times n)$ -матричную функцию и положительно определенную полную  $(n \times n)$ -матричную функцию.

- Исследована система уравнений половозрастной структуры популяции при отсутствии диффузии.

**Практическая и теоретическая ценность.** Результаты, полученные в работе, являются определенным вкладом в разработку теории краевых задач для уравнений математической биологии, математической физики и могут быть широко использованы при построении математических моделей в математической биологии и физике, в химии и других областях естествознания.

На математическом факультете КБГУ читается спецкурс "Уравнения математической биологии".

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались неоднократно на научно-исследовательском семинаре НИИ ПМА по современному анализу и информатике (руководитель - заслуженный деятель науки КБР и республики Адыгея, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАЕН и АМАН А.М.Нахушев), на заседаниях объединенного научно-исследовательского семинара математического факультета КБГУ, в работе школы-семинара по современным проблемам анализа и математическому моделированию (руководитель - доктор физико-математических наук, профессор, академик АМАН М.Х.Шхануков), на научном семинаре в РГУ (г.Ростов-на-Дону).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 4 работы.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа объемом 110 машинописных страниц состоит из введения и четырех глав, разбитых на 13 параграфов. Библиография состоит из 101 наименования.

### Содержание диссертации

Во введении дается краткий обзор работ по теме диссертации, обосновывается актуальность темы, кратко изложено ее содержание и сформулированы основные результаты, представленные к защите.

В первой главе исследуется внутренне-краевая задача с нелокальным смещением для системы уравнений половозрастной структуры популяции.

§ 1. Постановка задачи. При определенных допущениях динамику половозрастной структуры популяции, в случае двуполой популяции, когда процесс размножения не лимитируется недостатком самцов и, стало быть, коэффициент размножения  $k^+(x, y)$  особей женского пола не зависит от численности особей мужского пола, можно описать с помощью следующих уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} u_x^+ + u_y^+ + c^+(x, y)u^+ - \gamma^+(x, y)u^- &= D^+(x, y)u_{xx}^+ - f^+(x, y), \\ u_x^- + u_y^- + c^-(x, y)u^- - \gamma^-(x, y)u^+ &= D^-(x, y)u_{xx}^- - f^-(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u^+ = u^+(x, y)$  ( $u^- = u^-(x, y)$ ) — плотность особей женского (мужского) пола возраста  $x$  в момент времени  $y$ ;  $c^+(x, y)$  и  $\gamma^+(x, y)$  ( $c^-(x, y)$  и  $\gamma^-(x, y)$ ) — коэффициенты естественной и принудительной смертности самок (самцов); функции  $f^+(x, y)$  и  $f^-(x, y)$  характеризуют интенсивность изъятий особей из популяции;  $D^+(x, y) > 0$ ,  $D^-(x, y) > 0$  — коэффициенты диффузии.

К системе уравнений (1) присоединим уравнения рождаемости

$$\begin{aligned} u^+(0, y) &= \int_{\alpha}^{\beta} k^+(x, y) \cdot u^+(x, y) \cdot dx, \quad 0 \leq y \leq T, \\ u^-(0, y) &= \int_{\alpha}^{\beta} k^-(x, y) \cdot u^-(x, y) \cdot dx, \quad 0 \leq y \leq T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $u^+(0, y)$  ( $u^-(0, y)$ ) — плотность новорожденных особей женского (мужского) пола;  $k^+(x, y)$  и  $k^-(x, y)$  — коэффициенты рождаемости самок и самцов соответственно;  $\alpha$  и  $\beta$  — начало и конец репродуктивного пе-

риода; (2) и (3) имеют биологический смысл при  $R^{\pm}(x,y)u^{\pm}(x,y) > 0$  в  $((x,y): \alpha < x < \beta, 0 < y < T)$ . При  $x < \alpha$  и  $x > \beta$   $R^{\pm}(x,y) = 0$ .

В качестве дополнительных ограничений можно задать начальную половозрастную структуру популяции

$$u^+(x,0) = \varphi^+(x), \quad u^-(x,0) = \varphi^-(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

и плотности обоих полов, достигших возраста  $l$  (например, предельную) в момент времени  $y$ :

$$u^+(l,y) = \psi^+(y), \quad u^-(l,y) = \psi^-(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (5)$$

где  $T$  - расчетное время.

Соблюдены следующие биологически корректные условия:

$$\varphi^+(0) = \int_0^{\beta} R^+(x,0) \varphi^+(x) dx, \quad \varphi^-(0) = \int_0^{\beta} R^-(x,0) \varphi^-(x) dx,$$

$$\psi^+(l) = \varphi^+(0), \quad \psi^-(l) = \varphi^-(0).$$

**Задача 1.** Найти регулярное в области  $\Omega = ((x,y): 0 < x < 1, 0 < y < T)$  решение  $u = (u^+, u^-)$  системы (1) уравнений, непрерывное в замыкании  $\bar{\Omega}$  и удовлетворяющее условиям (2)-(5).

**§ 2. Существование и единственность регулярного решения задачи 1.** Доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Система уравнений (1) эквивалентно редуцируется к системе нагруженных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u^+(\xi, \eta) &= \int_0^{\eta} u^+(0, y) G_{\sigma}^+(\xi, \eta; 0, y) D^+(0, y) dy - \\ &- \int_0^{\eta} u^+(l, y) G_{\sigma}^+(\xi, \eta; l, y) D^+(l, y) dy + \int_0^1 u^+(x, 0) G^+(\xi, \eta; x, 0) dx - \\ &- \int_0^{\eta} dy \int_0^1 G^+(\xi, \eta; x, y) F^+(x, y; u^-) dx, \\ u^-(\xi, \eta) &= \int_0^{\eta} u^-(0, y) G_{\sigma}^-(\xi, \eta; 0, y) D^-(0, y) dy - \\ &- \int_0^{\eta} u^-(l, y) G_{\sigma}^-(\xi, \eta; l, y) D^-(l, y) dy + \int_0^1 u^-(x, 0) G^-(\xi, \eta; x, 0) dx - \\ &- \int_0^{\eta} dy \int_0^1 G^-(\xi, \eta; x, y) F^-(x, y; u^+) dx. \end{aligned}$$

Затем доказывается существование и единственность регулярного решения  $u=(u^+, u^-)$  системы уравнений (1).

§ 3. Существование и единственность регулярного решения задачи 1 в случае, когда граница периода репродуктивности зависит от времени. Рассматривается задача 1, в случае, когда начало и конец репродуктивного периода меняются с изменением времени  $y$ , то есть  $\alpha=\alpha(y)$  и  $\beta=\beta(y)$ .

Пользуясь методом тепловых потенциалов, доказывается существование и единственность регулярного решения рассматриваемой задачи.

Во второй главе исследуется нелокальная задача для системы уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами.

§ 1. Постановка задачи. В области  $\Omega$  рассматривается система уравнений (1), когда коэффициенты и правая часть являются неотрицательными постоянными.

Для системы (1) сформулируем следующую задачу.

Задача 2. Найти непрерывное в области  $\Omega$  решение  $u=(u^+, u^-)$  системы уравнений (1), удовлетворяющее условиям

$$u^+(0, y) = k^+ \int_a^{\beta} u^+(x, y) dx, \quad u^-(0, y) = k^- \int_a^{\beta} u^-(x, y) dx, \quad 0 < y < T,$$

$$u^+(x, 0) = \varphi^+, \quad u^-(x, 0) = \varphi^-, \quad 0 < x < l,$$

$$u^+(l, y) = \varphi^+, \quad u^-(l, y) = \varphi^-, \quad 0 < y < T,$$

где  $k^+, \varphi^+$  — неотрицательные постоянные.

§ 2. Решение нелокальной задачи для системы уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами. Рассматриваемая система эквивалентно редуцируется к системе нагруженных интегральных уравнений

$$u^{\pm}(x, y) = D^{\pm} e^{2D^{\pm} y} k^{\pm} \iint_{\Omega} e^{-\left(\sigma^{\pm} + \frac{1}{4D^{\pm}}\right)(y-\eta)} G_{\xi}^{\pm}(x, y; 0, \eta) u^{\pm}(\xi, \eta) d\xi d\eta -$$

$$\begin{aligned}
 & - D^{\pm} e^{2D^{\pm} y} \varphi^{\pm} \int_0^y e^{-(\sigma^{\pm} + \frac{1}{4D^{\pm}})(y-\eta)} G_{\xi}^{\pm}(x, y; l, \eta) d\eta + \\
 & + e^{-(\sigma^{\pm} + \frac{1}{4D^{\pm}})y} \varphi^{\pm} \int_0^{\frac{x-\xi}{2D^{\pm}}} G^{\pm}(x, y; \xi, 0) d\xi - \\
 & - \int_0^1 \int_0^1 G^{\pm}(x, y; \xi, \eta) (f^{\pm} - \gamma^{\mp} u^{\mp}) e^{\frac{x-\xi}{2D^{\pm}}(\sigma^{\pm} + \frac{1}{4D^{\pm}})(y-\eta)} d\xi d\eta. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Существует единственная функция Грина

$$G^{\pm}(\xi, \eta; x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\Gamma^{\pm}(\xi, \eta; x+2n, y) - \Gamma^{\pm}(\xi, \eta; -x+2n, y)], \quad (7)$$

где  $\Gamma^{\pm}(\xi, \eta; x, y)$  - фундаментальные решения. Тогда (6) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 u^{\pm}(x, y) &= K^{\pm} \int_0^y Z^{\pm}(x, y; \eta) d\eta \int_{\xi}^{\beta} u^{\pm}(\xi, \eta) d\xi - \\
 &- \gamma^{\mp} \int_0^1 \int_0^1 K^{\pm}(x, y; \xi, \eta) u^{\mp}(\xi, \eta) d\xi d\eta + B^{\pm}(x, y), \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$$w^{\pm}(x, y; \eta) = \frac{1}{2\sqrt{xD^{\pm}}} e^{\frac{x}{2D^{\pm}}(\sigma^{\pm} + \frac{1}{4D^{\pm}})(y-\eta)}$$

$$Z^{\pm}(x, y; \eta) = \frac{w^{\pm}(x, y; \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x-2n) e^{-\frac{(x-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}}$$

$$K^{\pm}(x, y; \xi, \eta) = \frac{w^{\pm}(x, y; \eta)}{(y-\eta)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{\frac{(x-\xi-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}} - e^{\frac{(x+\xi-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}} \right],$$

$$B^{\pm}(x, y) = \varphi^{\pm} \frac{w^{\pm}(x, y; 0)}{y^{1/2}} \int_0^{\frac{x}{2D^{\pm}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{\frac{(x-\xi-2n)^2}{4D^{\pm}y}} - e^{\frac{(x+\xi-2n)^2}{4D^{\pm}y}} \right] d\xi -$$

$$\frac{\varphi^{\pm}}{4} e^{\frac{1}{2D^{\pm}y}} \int_0^y \frac{w^{\pm}(x, y; \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ (x-l-2n) e^{\frac{(x-l-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}} + (x+l-2n) e^{\frac{(x+l-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}} \right] d\eta -$$

$$- \int_0^1 \int_0^1 \frac{f^+ w^+(x, y; \eta)}{(y-\eta)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ e^{\frac{(x-\xi-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}} - e^{\frac{(x+\xi-2n)^2}{4D^{\pm}(y-\eta)}} \right] d\xi d\eta.$$

Ряд (7) может быть выражен через классическую трансцендентную функцию

$$Q\left(\frac{y}{\pi}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 y} \cos 2n\pi x$$

и имеет вид

$$\begin{aligned} G^{\pm}(x, y; \xi, \eta) &= D^{\pm} \sqrt{\pi} \left[ Q\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{\pi D^{\pm}(y-\eta)}}\right) - Q\left(\frac{x+\xi}{2\sqrt{\pi D^{\pm}(y-\eta)}}\right) \right] = \\ &= 4D^{\pm} \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 D^{\pm}(y-\eta)} \operatorname{strumkx} \cdot \operatorname{strumk\xi}. \end{aligned}$$

Тогда (8) запишется в виде

$$\begin{aligned} u^{\pm}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{\pm}(x) \int_0^y e^{d_m^{\pm}(y-\eta)} d\eta \int_{\alpha}^{\beta} u^{\pm}(\xi, \eta) d\xi + \\ &+ 4D^{\pm} \pi^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{strumkx} \int_0^y e^{d_m^{\pm}(y-\eta)} d\eta \int_0^{\frac{x-\xi}{2D^{\pm}}} e^{2D^{\pm} \xi} \operatorname{strumk\xi} u^{\pm}(\xi, \eta) d\xi - \\ &- 4D^{\pm} \pi^{3/2} e^{2D^{\pm} \varphi} \sum_{m=1}^{\infty} m \operatorname{strumkx} \cos m\pi l \int_0^y e^{d_m^{\pm}(y-\eta)} d\eta + \\ &+ 4D^{\pm} \pi^{1/2} \varphi^{\pm} \sum_{m=1}^{\infty} e^{d_m^{\pm} \varphi} \operatorname{strumkx} \int_0^{\frac{x-\xi}{2D^{\pm}}} e^{2D^{\pm} \xi} \operatorname{strumk\xi} d\xi - \\ &- 4D^{\pm} \pi^{1/2} \int_0^{\pm} \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{strumkx} \int_0^y e^{d_m^{\pm}(y-\eta)} d\eta \int_0^{\frac{x-\xi}{2D^{\pm}}} \operatorname{strumk\xi} d\xi, \end{aligned}$$

где  $w_m^{\pm}(x) = 4mD^{\pm} \pi^{3/2} e^{2D^{\pm} \varphi} k^{\pm} \operatorname{strumkx}$ ,  $d_m^{\pm} = -\left(c^{\pm} + \frac{1}{2} + m^2 \pi^2 D^{\pm}\right)$ .

Так как мы имеем  $u^{\pm} > 0$ , то для любого фиксированного  $\eta$  из  $[0, T]$ , согласно формуле среднего значения, существует такая точка  $x_0$ . Тогда, после некоторого преобразования, получаем

$$u^{\pm}(x, y) = (\beta - \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{\pm}(x) \int_0^y e^{d_m^{\pm}(y-\eta)} \left( N^{\pm}(x_0, \eta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (\beta - \alpha) \int_0^{\eta} R_1^+(\eta, \eta_1) N^+(x_0, \eta_1) d\eta_1 + i \int_0^{\eta} \int_0^{\eta_1} R_2^+(\eta, \eta_1, \eta_2) N^+(x_0, \eta_2) d\eta_2 d\eta_1 \Big] d\eta - \\
 & - 2D^+ \pi^{1/2} \gamma^- i e^{\frac{x-x_0}{2D^+}} \sum_{m=1}^{\infty} \text{str} \mu \kappa \text{str} \mu \kappa \int_0^y e^{a_m^+(y-\eta)} \left[ E^-(x_0, \eta) + \right. \\
 & + \int_0^{\eta} K_1^-(\eta, \eta_1) \left[ N^+(x_0, \eta_1) + (\beta - \alpha) \int_0^{\eta_1} R_1^+(\eta_1, \eta_2) N^+(x_0, \eta_2) d\eta_2 + \right. \\
 & \left. \left. + i \int_0^{\eta_1} \int_0^{\eta_2} R_2^+(\eta_1, \eta_2, \eta_3) N^+(x_0, \eta_3) d\eta_3 d\eta_2 \right] d\eta_1 \right] + E^+(x, y), \\
 u^-(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \left[ (\beta - \alpha) w_m^-(x) + 4D^- \pi^{1/2} \gamma^+ i e^{\frac{x-x_0}{2D^-}} \text{str} \mu \kappa \text{str} \mu \kappa \right] \times \\
 & \times \int_0^y e^{a_m^-(y-\eta)} \left[ N^+(x_0, \eta) + (\beta - \alpha) \int_0^{\eta} R_1^+(\eta, \eta_1) N^+(x_0, \eta_1) d\eta_1 + \right. \\
 & \left. + i \int_0^{\eta} \int_0^{\eta_1} R_2^+(\eta, \eta_1, \eta_2) N^+(x_0, \eta_2) d\eta_2 d\eta_1 \right] d\eta + E^-(x, y),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 N^+(x_0, y) = & E^+(x_0, y) + i \sum_{m=1}^{\infty} w_m^+(x_0) \int_0^y e^{a_m^+(y-\eta)} E^-(x_0, \eta) d\eta, \\
 K_1^-(y, \eta) = & \sum_{m=1}^{\infty} e^{a_m^-(y-\eta)} \left[ (\beta - \alpha) w_m^+(x_0) + 4D^+ \pi^{1/2} \gamma^- \text{str} \mu^2 \kappa \right],
 \end{aligned}$$

$R_1^+(y, \eta), R_2^+(y, \eta, \eta_1)$  - резольвенты ядер интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

§ 3. Существование и единственность решения задачи 2, в случае когда  $\alpha = \alpha(y), \beta = \beta(y)$ . Как и в § 3 главы 1, методом тепловых потенциалов доказывается существование и единственность решения задачи 2.

В третьей главе исследуется внутренне-краевая задача с нелокальным смещением для системы уравнений параболического типа.

§ 1. Постановка задачи. В области  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$  евклидовой плоскости рассмотрим систему  $n$  уравнений параболического типа

$$u_{i,y} + \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x,y)u_{j,x} + \sum_{j=1}^n c_{i,j}(x,y)u_j = \sum_{j=1}^n D_{i,j}(x,y)u_{j,xx} - f_i(x,y), \quad (9)$$

где  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $a(x,y)$ ,  $c(x,y)$ ,  $f(x,y)$  - заданные непрерывные в замкнутой области  $\bar{\Omega}$  функции независимых переменных  $x$  и  $y$ ;  $D_{i,j}(x,y)$  - заданные в области  $\Omega$  дважды непрерывно дифференцируемые по переменной  $x$  функции;  $u_i(x,y)$  - искомые непрерывные в замкнутой области функции. Для этой системы уравнений ставится следующая задача.

Задача 3. Найти регулярные в области  $\Omega$  решения  $u_i(x,y)$  системы уравнений (9), непрерывные в замкании  $\bar{\Omega}$  и удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{i,j}(y)u_j(0,y) = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha}^{\beta} k_{i,j}(x,y)u_j(x,y)dx, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (10)$$

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (11)$$

$$u_j(l,y) = \psi_j(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (12)$$

где  $\lambda_{i,j}(y)$ ,  $k_{i,j}(x,y)$ ,  $\varphi_i(x)$ ,  $\psi_j(y)$  - заданные непрерывные в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ , причем  $k_{i,j}(x,y) = 0$  при  $x < \alpha$  и  $x > \beta$ .

Функции  $a_{i,j}(x,y)$ ,  $c_{i,j}(x,y)$  и  $D_{i,j}(x,y)$  удовлетворяют условиям Гельдера:

$$|D_{i,j}(x,y) - D_{i,j}(\xi,\eta)| \leq M \cdot (|x-\xi|^{\epsilon} + |y-\eta|^{\epsilon/2}),$$

$$|D_{i,j,xx}(x,y) - D_{i,j,xx}(\xi,\eta)| \leq M \cdot |x-\xi|^{\delta},$$

$$|a_{i,j}(x,y) - a_{i,j}(\xi,\eta)| \leq M \cdot |x-\xi|^{\epsilon},$$

$$|a_{i,j,x}(x,y) - a_{i,j,x}(\xi,\eta)| \leq M \cdot |x-\xi|^{\delta},$$

$$|c_{i,j}(x,y) - c_{i,j}(\xi,\eta)| \leq M \cdot |x-\xi|^{\epsilon}, \quad (13)$$

где  $M$  - коэффициент,  $\epsilon$  и  $\delta$  - показатели Гельдера.

Рассмотрим следующие три случая:

-  $D_{i,j}(x,y) = 0$  при  $i \neq j$ , то есть имеем диагональную матрицу;

- $D_{ij}(x,y)=0$  при  $t>f$ , то есть имеем однобокую матрицу;
- $D_{ij}(x,y)>0$  для всех  $t$  и  $j$ .

§ 2. Существование и единственность регулярного решения задачи 3 в случае, когда  $D_{ij}(x,y)=0$  при  $t \neq f$ . Пользуясь методом эквивалентного редуцирования к системе интегральных уравнений Вольтерра 2 рода, доказывается теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия (13), I-VII (см. дис.), то существует единственное регулярное решение  $u(x,y)$  уравнения (9), удовлетворяющее условиям (10)-(12).

§ 3. Существование и единственность регулярного решения задачи 3 в случае, когда  $D_{ij}(x,y)=0$  при  $t>f$ . Сначала рассмотрим  $n$ -е уравнение системы

$$Lu = [d(x,y)u_{n_x} + a(x,y)u_{n_x} - u_{n_y} - c(x,y)u_n = F_n(x,y;u), \quad (14)$$

где

$$d(x,y) = D_{nn}(x,y), \quad a(x,y) = a_{nn}(x,y) + D_{nn_x}(x,y),$$

$$c(x,y) = c_{nn}(x,y),$$

$$F_n(x,y;u) = f_n(x,y) + \sum_{j=1}^{n-1} [c_{nj}(x,y)u_j + a_{nj}(x,y)u_j].$$

Рассматривается задача 3 для уравнения (14).

Как и в § 2, можно доказать существование и единственность регулярного решения  $u_n(x,y)$  уравнения (14). Затем рассмотрим  $n-1$  уравнение системы и докажем существование и единственность регулярного решения  $u_{n-1}(x,y)$ . Продолжая это до первого уравнения, мы докажем существование и единственность регулярного решения  $u(x,y)$  всей системы.

§ 4. Существование и единственность регулярного решения задачи 3 в случае, когда  $D_{ij}(x,y)>0$  для всех  $t$  и  $j$ . В области  $\Omega$  рассмотрим систему уравнений (9) в случае, когда  $D(x,y)$  является заданной

двжды непрерывно дифференцируемой по переменной  $x$  положительно определенной  $(n \times n)$ -матричной функцией и  $D_{ij}(x, y) \geq 0$ .

Доказывается существование и единственность регулярного решения  $u(x, y)$  задачи 3 для рассматриваемой системы.

В четвертой главе исследуется одна система уравнений половозрастной структуры популяции при отсутствии диффузии.

§ 1. Представление системы и ее анализ. В области  $\Omega$  рассматривается система уравнений в частных производных первого порядка:

$$u_y^+ + u_x^+ + c^+ u^+ - \gamma^- u^- + f_1^+ = 0,$$

$$u_y^- + u_x^- + c^- u^- - \gamma^+ u^+ + f_1^- = 0.$$

Введем обозначения:  $u = u^+, v = u^-, 2a = c^+, 2b = \gamma^-, 2c = c^-, 2d = \gamma^+, 2f_1 = f_1^+, 2f_2 = f_1^-$ . Тогда система запишется в виде

$$u_y + u_x + 2au - 2bv + 2f_1 = 0, \quad (15)$$

$$v_y + v_x + 2cv - 2du + 2f_2 = 0,$$

где  $a, b, c, d, f_1$  и  $f_2$  - известные неотрицательные постоянные.

Эта система является системой уравнений неразрывности Мак Кендрика фон Ферстера, которая описывает динамику замкнутой популяции.

1. Рассматриваемая система является гиперболической с кратными характеристиками  $x+y = const$ .

2. Предположим, что  $b \neq 0$ . Тогда (15) сводится к уравнению

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2(a+c)u_x + 2(a+c)u_y + 4(ac-bd)u = -(cf_1 + df_2).$$

А в каноническом виде

$$u_{\xi\xi} + (a+c)u_{\xi} + (ac-bd)u = -(cf_1 + df_2). \quad (16)$$

Как видим, система уравнений (15) редуцируется к неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка по переменной  $\xi$ , а  $\eta = const$ .

§ 2. Общее представление всех решений

I. Решение системы уравнений (15) записывается в виде

$$u(x, y) = e^{-ax}u(0, y) + \frac{f_1}{a} \left[ e^{-ax} - 1 \right] + b e^{-ax} \int_0^x v(t, x+y-t) e^{2at} dt,$$

$$v(x, y) = \psi e^{2o(1-x)} + \frac{f_2}{c} \left[ e^{2o(1-x)} - 1 \right] + d e^{-ox} \int_0^x u(t, x+y-t) e^{2ct} dt.$$

II. Пусть  $f_1 = f_2 = 0$ . Известно, что уравнение вида (16) при  $ac - bd < 0$  по принципу экстремума имеет единственное решение. Поэтому рассмотрим два случая.

1. Предположим, что  $ac - bd = 0$ . Тогда общее решение уравнения (16) имеет вид

$$u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right) = \frac{1}{a+c} C_1(\eta) e^{-2(a+c)(\xi+\eta)} + C_2(\eta)$$

или

$$u(x, y) = \frac{1}{a+c} C_1(x+y) e^{-2(a+c)x} + C_2(x+y).$$

А затем находим  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ .

2. Предположим, что  $ac - bd < 0$ . Тогда общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right) = C_1(\eta) \exp\left\{\left[\frac{-(a+c)}{2} + \sqrt{\frac{(a+c)^2}{4} - (ac-bd)}\right](\xi+\eta)\right\} + C_2(\eta) \exp\left\{\left[\frac{-(a+c)}{2} - \sqrt{\frac{(a+c)^2}{4} - (ac-bd)}\right](\xi+\eta)\right\}$$

или

$$u(x, y) = C_1(x+y) \exp\left\{\left[-(a+c) + \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-bd)}\right]x\right\} + C_2(x+y) \exp\left\{\left[-(a+c) - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-bd)}\right]x\right\}.$$

В зависимости от поставленной задачи находятся  $C_1$  и  $C_2$ . Затем находим и  $v(x, y)$ .

§ 3. Постановка задач и их анализ. Исследованы следующие задачи для системы уравнений (15).

I. Задача 1. Найти регулярное в области  $\Omega$  решение  $(u, v)$  системы уравнений (15), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = k \int_0^{\beta} u(x, y) dx, \quad v(1, y) = \phi, \quad 0 \leq y \leq T,$$

где  $k, \phi$  - произвольные действительные числа,  $0 < \alpha < \beta < 1$ .

II. При  $ac - bd = 0$  сформулируем несколько задач.

Задача 2. Найти регулярное в области  $\Omega$  решение  $(u, v)$  системы уравнений (15), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = k \int_0^{\beta} u(x, y) dx, \quad u(1, y) = \phi, \quad 0 \leq y \leq T,$$

где  $k, \phi$  - произвольные действительные числа.

Задача 3. Найти регулярное в области  $\Omega$  решение  $(u, v)$  системы уравнений (15), удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) \Big|_{x=y} = \phi(y), \quad u(x, y) \Big|_{x=1} = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

Задача 4. Найти регулярное в области  $\Omega$  решение  $(u, v)$  системы (15), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \phi(y), \quad v(1, y) = \psi \quad 0 \leq y \leq T.$$

При  $ac - bd < 0$  можно также сформулировать задачи, решения которых явно будут определены.

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

- доказана теорема существования и единственности регулярно-го решения краевой задачи для системы уравнений параболического типа, описывающая динамику половозрастной структуры популяции, в случае двуполой популяции;

- доказана теорема существования и единственности регулярного решения краевой задачи для системы уравнений параболического типа, описывающая динамику половозрастной структуры популяции, в случае

двуполой популяции, когда начало и конец репродуктивного периода зависят от времени;

- исследована нелокальная задача для системы уравнений параболического типа с постоянными коэффициентами;

- доказана теорема существования и единственности регулярного решения внутренне-краевой задачи со смещением для системы  $n$  уравнений параболического типа в случае, когда коэффициент диффузии представляет собой: положительно определенную диагональную  $(n \times n)$ -матричную функцию, положительно определенную однобокую  $(n \times n)$ -матричную функцию и положительно определенную полную  $(n \times n)$ -матричную функцию;

- исследована система уравнений половозрастной структуры популяции при отсутствии диффузии.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Бисчоков Р.М. Об одной внутренне-краевой задаче с нелокальными смещениями для системы уравнений половозрастной структуры популяции // Тезисы докладов научной конференции "Краевые задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений", Алма-Ата, 22-25 мая 1991 г. - Алма-Ата, 1991.
2. Бисчоков Р.М. Об одной внутренне-краевой задаче с нелокальным смещением для системы уравнений половозрастной структуры популяции // Дифференц. уравнения. - 1994. - 30, № 3.
3. Бисчоков Р.М. Внутренне-краевая задача с нелокальным смещением для системы уравнений параболического типа // Докл. АМАН. - 1994. - 1, № 3.
4. Бисчоков Р.М. Внутренне-краевая задача с нелокальным смещением для системы уравнений параболического типа // Тезисы докладов научной конференции. - Нальчик; КБГУ, 1994.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, академику АМАН и РАН, заслуженному деятелю науки КБР и республики Адыгея Нахушеву Адаму Маремовичу за руководство данной работой.

Бисчоков Руслан Мусарбиевич "Внутренне-краевая задача с нелокальным смещением для системы уравнений половозрастной структуры популяции"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, 01.01.03 - математическая физика, Институт математики НАН Украины, 1996 г.

Разработана и исследована математическая модель, описывающая динамику половозрастной структуры популяции.

Доказана теорема существования и единственности регулярного решения нелокальной краевой задачи для системы уравнений параболического типа.

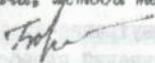
Bischokov R.M. Inner-boundary problem with non-local bias for equation system of the sexage population structure.

The dissertation is presented for obtaining the degree of Candidate of Sciences in Physics and Mathematics on subject 01.01.02 - differential equation and 01.01.03 - mathematical physics, Ukrainian Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Kiev, 1996.

The mathematical model which describes the dynamic of sexage population structure is and investigated.

The existance of singular regular resolution of non-local boundary problem for parabolic type equation system is proved.

Ключевые слова: система уравнений параболического типа, интегральные уравнения, нелокальные задачи, методы тепловых потенциалов.



---

Подп. в печ. 02.12.96. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.  
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 0,93. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж  
100 экз. Зак.241. Бесплатно.

---

Отпечатано в Институте математики НАН Украины  
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3

439684

AB 36.437