НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОБУДУВАННЯ

На правах рукопису

ВАЛУЙСЬКА Ольга Олексіївна

МЕТОД ОПУКЛОГО ПРОДОВЖЕННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків - 1996

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі пр[illegible]
державного технічного університе[illegible]

Наукові керівники: член-кореспон[illegible]
них наук, професор Стоян Юрій Григорович;
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Ємець Олег Олексійович

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Яковлєв Сергій Всеволодович;
кандидат фізико-математичних наук, професор
Мельниченко Олександр Савович

Провідна організація: Київський національний університет ім. Т.Шевченка

Захист відбудеться "15" січня 1997 р. о 14 годині в ауд. 11-го поверху на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 02.18.02 в Інституті проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул.Дм. Пожарського, 2/10

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту проблем машинобудування НАН України за адресою: 310046, м.Харків, вул.Дм. Пожарського, 2/10

Автореферат розісланий "13" грудня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
канд. фіз.-мат. наук, с.н.с. Веретельник Веретельник В.В.

Актуальність роботи. В зв'язку з швидким розвитком в останній час можливостей обчислювальної техніки та застосуванням її в різних сферах людської діяльності з'явилась велика кількість робіт, пов'язаних з ЕОМ, в різних сферах математики. В математичному програмуванні розглядається, зокрема, розв'язання задач, що виникають в економіці, керуванні, а також задач, що розглядаються в плануванні, проектуванні та інших областях знань. Це привело до розвитку теорії та методів математичного моделювання оптимізаційних задач геометричного проектування (в цьому випадку оптимізація розглядається, ~~як правило,~~ на множинах комбінаторного типу).

Занурення комбінаторних множин у евклідів простір дало поштовх до розвитку комбінаторної оптимізації та теорії комбінаторних множин в принципово новому аспекті. В працях Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлєва, О.О. Ємця наведені результати досліджень властивостей комбінаторних множин, які занурені у евклідів простір, а також екстремальних властивостей цільових функцій, які задані на комбінаторних множинах. Дія занурення, яка відображає комбінаторні множини в множини точок евклідового простору, дає можливість для деяких з них перейти до множин вершин опуклих многогранників (переставного, поліпереставного, розміщень). При моделюванні задач оптимізації на множинах, що розглядаються, це обгрунтовує застосування класичних методів математичного програмування до розв'язування задач оптимізації, що виникають при математичному моделюванні задач геометричного проектування чи розробці нових методів математичного програмування. Після дослідження і розв'язання задач з лінійною або кусково-лінійною цільовою функцією та накопичення інформації про розв'язання практичних задач з різними цільовими функціями виникла можливість розробки алгоритмів та методів комбінаторної оптимізації для різних класів цільових функцій.

При математичному моделюванні оптимізаційних задач геометричного проектування виникає проблема оптимізації опуклих функцій. Ця робота присвячена оптимізації опуклих функцій на комбінаторних многогранниках (метод покриваючих симплексів). Суттєво розширяє можливості апарата математичного моделювання існування опуклого продовження цільових функцій з множин, що містять множини, де шукаємо оптимум, в евклідів простір. Ця задача - важлива, оскільки конструктивні алгоритми опуклого продовження поширюють коло функцій, до яких можна застосовувати алгоритми оптимізації опуклих функцій, за рахунок функцій, що мають опукле продовження.

Проблема опуклого продовження актуальна в математичному моделюванні, оскільки значно поширює його апарат. Задачі про опукле продовження відрізняються постановками. Як правило, при доведенні існування опуклого продовження наводиться конструктивний метод його знаходження.

Робота є подальшим розвитком досліджень, що виконуються в Інституті проблем машинобудування НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України Стояна Ю.Г., в теорії евклідових комбінаторних задач і методів їх розв'язання в геометричному проектуванні та інших областях оптимізації.

Робота виконувалась на кафедрі прикладної математики Харківського державного технічного університету радіоелектроніки (ХДТУРЕ) згідно з індивідуальним планом аспірантської підготовки та угодою про науково-технічне співробітництво ХДТУРЕ і Інституту проблем машинобудування НАН України № 805 від 12.10.87 р. у відповідності до науково-дослідних робіт за програмою НАН України 1.12.5 (1990-1993рр.) "Проблеми автоматизації проектування технічних систем" по д/б темі "Математичне моделювання складних технічних систем модульного типу", що виконується за рішенням Президії НАН України від 8.01.90, протокол № 1, § 3 (ДР№01900003448); за програмою Фонду фундаментальних досліджень КМ України 1/304, (1992-1993 р.р., шифр "Конвалія") "Створення і впровадження нових методів спільного перетворення складної аналітичної інформації в математичному і комп'ютерному моделюванні" (д/б тема етапу "Дослідження алгебро-топологічних властивостей евклідових множин після їх занурення в арифметичний евклідовий простір", ДР№0192U031204); за планом НДР Полтавського технічного університету по д/б темі "Розробка теорії, моделей, методів та алгоритмів евклідової комбінаторної оптимізації" (1995-1996 рр., ДР№096U006063).

Метою роботи є розробка методу опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій з гіперсфери в евклідів простір, а також використання цього методу для оптимізації продовжених функцій, які є опуклими, на множинах, що або належать початковій гіперсфері (деякі евклідові комбінаторні множини), або збігаються з гіперсферою, та застосування розроблених методів і алгоритмів до розв'язання практичних задач, що мають відповідні математичні моделі.

Основні завдання роботи: 1) обгрунтування існування опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій в евклідів простір з межі спеціальної опуклої множини; 2) розробка методу опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій з гіперсфери в евклідів простір; 3) застосування методу опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій з гіперсфери в евклідів простір до оптимізаційних задач геометричного проектування; 4) використання одержаних методів і алгоритмів до розв'язання оптимізаційних задач, які є моделями практичних задач.

Методика дослідження. Наведені результати одержані на основі теорії та методів математичного моделювання, математичного програмування, евклідової комбінаторної оптимізації та геометричного проектування. Метод опуклого продовження, крім того, базується на результатах опуклого аналізу.

Ступінь дослідження матеріалу. В роботах Стояна Ю.Г. та його учнів закладені основи теорії евклідової комбінаторної оптимізації та геометричного проектування. В працях Яковлєва С.В. розглядаються задачі опуклого продовження та їх застосування в комбінаторній оптимізації. В публікаціях Ємця О.О. наведено метод покриваючих симплексів.

Теоретичну цінність мають обгрунтування існування опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій в евклідів простір з межі спеціальної опуклої множини; метод опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій з гіперсфери в евклідів простір та доведення модифікації методу покриваючих симплексів.

Практична цінність полягає в тому, що розроблені методи, алгоритми та реалізовані програми можуть бути використані для розв'язання практичних задач, математичні моделі яких мають відповідний вигляд (наприклад, можуть бути побудовані на основі теорії геометричного проектування).

Рівень реалізації і впровадження. Матеріали дисертації використовуються при виконанні д/б теми "Розробка теорії, моделей, методів та алгоритмів евклідової комбінаторної оптимізації", ДР № 0960006063.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає ось в чому:

- обгрунтовано існування опуклого продовження двічі непервно диференційовних функцій в евклідів простір з межі спеціальної опуклої множини;

- розроблено та обгрунтовано метод опуклого продовження двічі неперервно диференційовних функцій з гіперсфери в евклідів простір;

- реалізовано алгоритм методу покриваючих симплексів для оптимізації в геометричному проектуванні, запропоновано та реалізовано його модифікації;

- показано ефективність застосування розроблених алгоритмів і методів до відомих практичних задач.

А п р о б а ц і я р о б о т и. Основні результати роботи доповідалися на: 44-й - 47-й наукових конференціях професорів, викладачів, наукових співробітників, аспірантів і студентів Полтавського інженерно-будівельного інституту (Полтавського технічного університету) (м. Полтава, 1992 - 95 рр.); семінарі "Математичні методи геометричного проектування" при науковій раді НАН України по проблемі "Кібернетика" (м. Харків, 1995р.); 3-й міжнародній науково-технічній конференції "Контроль і управління в технічних системах" (Винницького технічного університету) (м. Винниця, 1995 р.).

О с о б и с т и й в н е с о к. Всі результати, що викладені в роботі та виносяться на захист, одержані особисто автором. В працях, що опубліковані у співавторстві, такі матеріали одержані особисто автором. В [1] автору дисертації належить постановка задачі опуклого продовження як продовження з гіперсфери. В [2] - спосіб опуклого продовження, який лежить в основі методу опуклого продовження. В [3] - обгрунтування методу опуклого продовження поза гіперсферою, та викладені модифікації методу покриваючих симплексів. В [4] - доведення методу опуклого продовження функції з гіперсфери в евклідів простір. В [5] - обгрунтовання того, що для опуклого продовження умова двічі неперервно диференційовності функції, яка продовжується, є необхідною умовою. В [6] - оцінки констант, що виникають в процесі реалізації даного методу. В [7]- класифікація функцій за способом їх опуклого продовження. В [8]- опис методу опуклого продовження функції з гіперсфери в евклідів простір. В [9]- модифікація методу опуклого продовження для задачі опуклого продовження з гіперсфери в опуклі множини спеціального вигляду. В [10] - реалізація методу опуклого продовження з гіперсфери в евклідів простір для евклідової комбінаторної оптимізації.

Публікації. По темі дисертації опубліковано 10 наукових праць, з них 7 тез доповідей, 3 - депоновані рукописи.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, чотирьох розділів, висновку, додатку - 115 сторінок машинописного тексту, списку літератури з 102 найменувань, 5 таблиць, 2 малюнків, всього - 141 сторінка.

2. ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі наведена загальна постановка задачі оптимізації функції f на множини G в просторі $\mathbb{R}^k$: $\min(f(x) \mid x \in G)$, яка розглядається нижче.

В подальшому на цільову функцію f накладемо додаткові умови: або умову двічі неперервної диференційовності, або умову угнутості. На множину G введемо умову належності деякій гіперсфері.

В цьому розділі наведено також необхідні для наступного розгляду результати з евклідової комбінаторної оптимізації.

У другому розділі викладено розроблений метод опуклого продовження двічі неперервно диференційовної функції з гіперсфери в евклідів простір.

Розглянемо задачу. Нехай $f(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ - двічі неперервно диференційовна функція. Треба знайти функцію $F(x)$, що:

1) $F(x)$ - опукла в $\mathbb{R}^k$,

2) $F(x)= f(x)$, для $x \in S_1(0)$, де $S_1(0) = \{ x : |x|=1 \}$ - гі-

персфера одиничного радіуса з центром на початку координат. Розгляд $S_1(0)$ не обмежує загальності міркувань і всі результати мають місце для випадку довільної гіперсфери.

Якщо функція f - двічі неперервно диференційовна, то, як відомо, еквівалентні такі умови:

a) f - опукла; b) $f(y) \geq f(x) + \operatorname{grad} f(x) \times (y-x)$, $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^k$;

c) гессіан $\nabla^2 f(x)$ $\forall\ x$ є додатна напіввизначена квадратична форма.

З останнього випливає, що для опуклості необхідно та достатньо, щоб матриця других похідних

$$\nabla^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j},\ i,\ j \in J_k = \{ 1,\dots,k \} \right)$$

була додатна напіввизначена квадратична форма. Якщо ця матриця - додатньо визначена, тоді функція f - строго опукла.

Звідси випливає, що умова опуклості для двічі неперервно диференційовної функції збігається з додатністю квадратичної форми. В подальшому, для перевірки додатності квадратичних форм будемо користуватися критерієм Сільвестра; результуючий критерій будемо називати критерієм опуклості для двічі неперервно диференційовної функції.

Введемо допоміжну функцію $g(y)$: $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ та $g(y) \in C^2(\mathbb{R}^1)$.

$$\begin{gathered} g(0)=0,\ g(1)=1,\ g(y)\geq 0,\ |g(y)|\sqrt{y} \leq M, \\ |g'(y)|y \leq M,\ |g'(y)|\sqrt{y} \leq M, \\ |g''(y)|y \leq M,\ |g''(y)|y\sqrt{y} \leq M,\ \forall\ y \geq 0,\ M>0. \end{gathered} \tag{1}$$

За функцію $g(y)$ можно взяти $g(y)= ye^{1-y}$. В роботі наведено спосіб знаходження функції $g(y)$.

Введемо позначення: $n(x)= \sum_i x_i^2$.

Нехай $\Phi(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$- двічі неперервно диференційовна функція з обмеженими частинними похідними другого порядку.

Будемо шукати F у вигляді $F_p(x) = \Phi(x) + P\ (\ n(x) - 1\ )$, де $P = \mathrm{const}$.

Розв'язується така задача: для функції $F_p(x)$ треба вказати такі числа $P > 0$, $P \in \mathbb{R}^1$, що функція $F_p(x)$ - опукла в $\mathbb{R}^k$.

Теорема 1. Нехай $\Phi(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ двічі неперервно диференційовна функція з обмеженими частинними похідними другого порядку. Тоді $\exists$ P_Φ, що $\forall$ $P \geq P_\Phi$ функція

$$F_p(x) = \Phi(x) + P\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 1\right) \text{ - опукла в } \mathbb{R}^k.$$

Розглянуто і обгрунтовано узагальнення цього способу опуклого продовження: одержано опукле продовження двічі неперервно диференційовної функції з обмеженими частинними похідними другого порядку в евклідів простір не з гіперсфери, а з межі деякої опуклої множини, що задовільняє додаткові умови.

Нехай $d \in \mathbb{R}^k$ - опукла множина, для якої існує функція $D(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$, така, що

$$d = \{\ x:\ D(x) \leq 1\},\ \partial d = \{\ x:\ D(x) = 1\}.$$

Накладемо на D умови:

$$0 < D_i,\ \forall\ i \in J_k, \tag{2}$$

де $D_i = \inf\left(\dfrac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i^2},\ x \in \mathbb{R}^k\right)$;

$$D_{ij} < +\infty,\ \forall\ i,\ j \in J_k, \tag{3}$$

де $D_{ij} = \sup\left(\left|\dfrac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|,\ x \in \mathbb{R}^k\right)$.

Тобто множина d, що розглядається, є опукла множина, топологічно еквівалентна еліпсоїду. Ця умова суттєва.

Розв'язано таку задачу опуклого продовження. Нехай $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$- двічі неперервно диференційовна функція з обмеженими частинними похідними другого порядку. Треба знайти $F(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$, таку, що:

1) $F(x)$ - опукла в $\mathbb{R}^k$, 2) $F(x) = f(x)$, для $x \in \partial d$.

Функцію $F(x)$ знайдено у вигляді:

$$F(x) = f(x) + P(\ D(x) - 1).$$

Теорема 2. Нехай $f(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ двічі неперервно диференційовна функція з обмеженими частинними похідними другого порядку. Нехай $d \in \mathbb{R}^k$ - опукла множина, для якої існує функція $D(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$, що

$$d = \{ x: D(x) \leq 1\}, \ \partial d = \{ x: D(x) = 1\}.$$

Нехай виконуються умови (2) та (3).

Тоді $\exists \ P_{f,D}$, що $\forall \ P \geq P_{f,D}$ функція

$$F(x)= f(x) + P(D(x) - 1) \text{ - опукла в } \mathbb{R}^k.$$

Зазначимо, що умова (2) є суттєвою. Наведемо приклад, коли опукле продовження таким чином неможливе у випадку невиконання цієї умови.

Приклад 3. За множину $\partial d \in \mathbb{R}^k$ візьмемо циліндричну поверхню

$$d = \{ x: D(x) \leq 1\}, \ \partial d = \{ x: D(x) = 1\},$$

де $D(x) = \sum_{i=2}^{k} x_i^2$. За функцію $f(x)$ візьмемо $f(x)= - x_1^2$. Якщо для деякого P розглянемо функцію F, то $\dfrac{\partial^2 F(x)}{\partial x_1^2} = - 2$ для всіх P. Тоді критерій опуклості для двічі неперервно диференційовної функції не виконується.

Умову (3) можна частково зняти, якщо розглядати опукле продовження f не у весь простір $\mathbb{R}^k$, а в опуклу множину M, яка задовольняє умову

$$D_{ij} < + \infty, \ \forall \ i, j \in J_k,$$

де $D_{ij}= \max \left(\left| \dfrac{\partial^2 D(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|, \ x \in M \right)$. Наприклад, за M можно взяти будь-яку обмежену опуклу множину.

Наведений результат можна назвати доведенням існування опуклого продовження з заданими умовами, але цей спосіб знаходження опуклого продовження не дає можливості в загальному випадку знайти оцінки констант P_f: для наведеного алгоритму знаходження P_f пов'язано з оцінками інтервалів, яким належать дійсні корені мажоруючих поліномів. Розроблено та обгрунтовано метод опуклого продовження, що дозволяє оцінити константи, які виникають в процесі його реалізації.

Лема 4. Нехай є квадратична форма

$$\sum_i M_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} M_{ij} x_i x_j .$$

Тоді, якщо 1) $M_i \geq 0$, $\forall$ i, 2) $|M_{ij}| \leq \sqrt{M_i M_j}/(k-1)$, $\forall$ $i < j$, то квадратична форма - додатна.

Лема 5. Нехай є квадратична форма

$$\sum_i M_i x_i^2 + 2 \sum_{i<j} M_{ij} x_i x_j .$$

Тоді, якщо 1) $M_i \geq m \geq 0$, $\forall$ i, 2) $|M_{ij}| \leq \sqrt{M_i M_j}/(k-1)$, $\forall$ $i < j$, то квадратична форма - додатна.

Зазначимо, що обидві леми є наслідками критерія Сільвестра.

Теорема 6. Нехай $\Phi(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ двічі неперервно диференційовна функція з обмеженими частинними похідними другого порядку. Тоді $F(x) = \Phi(x) + (M_1 + M_2)(n(x) - 1)/2$ - опукла в $\mathbb{R}^k$ функція, де

$$M_1 = \max\left(0, \max_i \max\left(\left\{-\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2}\right\}, x \in \mathbb{R}^k\right)\right);$$

$$M_2 = \max\left(0, \max_{i<j} \max\left(\left\{-\sqrt{\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i^2} + M_1}\sqrt{\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_j^2} + M_1} + (k-1)\left|\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right\}, x \in \mathbb{R}^k\right)\right).$$

Теорема 6 доводиться з використанням леми 4, з допомогою леми 5 отримується аналогічна теорема.

Умову на обмеженість частинних похідних другого порядку функції, що продовжується (а у випадку продовження з межі опуклої множини d і умову на обмеженість частинних похідних функції D), можно зняти, якщо розглядати таку задачу.

Нехай $T(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ - двічі неперервно диференційовна функція. Треба знайти таку функцію $F(x)$, що

1) $F(x)$ - опукла в M, 2) $F(x) = f(x)$, для $x \in S_1(0)$, де M - обмежена опукла множина. Тоді вірна теорема.

Теорема 7. Нехай $T(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ і $T(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ - двічі неперервно диференційовна функція. Тоді $F(x)= T(x) + (M_1+ M_2)n(x)/2 -$ $- (M_1 + M_2)/2$ - опукла в M функція, де

$$M_1 = \max \left(0, \max_{0<i<k+1} \max \left(-\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i^2}, \text{ де } x \in M \right)\right);$$

$$M_2 = \max \left(0, \max_{0<i,j<k+1} \max \left((k-1)\left| \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\sqrt{M_1+ \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i^2}} \sqrt{M_1+ \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_j^2}}, \text{ де } x \in M \right)\right).$$

Приклад 8. Нехай $M=S_0(R)= \{ x: |x|=R \}$ і $f(x) = - \sum_i a_i x_i^3$.

Тоді $M_1= 6R\max_i a_i$ і $M_2= 0$. Як бачимо, при зростанні R величина $M_1+ M_2$ прямує до нескінченності.

Умову на обмеженість множини M можно послабити таким чином. Ця умова випливає із скінченності константи $M_1+ M_2$, кожен з доданків якої є максимум неперервної функції по обмеженій множині і, отже, є скінченним для будь-якої функції T та будь-якої множини M. При знаходженні опуклих продовжень для конкретних функцій T умову на обмеженість опуклої множини M можно зняти, якщо

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|, 1 \le i \le j \le k, x \in M(T) \right\} < \infty,$$

і в цьому випадку $M=M(T)$, тобто множина M залежить від функції T.

Приклад 9. Нехай $T(x)= - \exp\left(\sum_i a_i x_i\right)$,

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j} = - a_i a_j \exp\left(\sum_i a_i x_i\right).$$

Візьмемо $M(T,R)= \{ x: \sum_i a_i x_i \le R \}$, як бачимо, $M(T,R)$ необмежена. Тоді

$$\left|\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le a_i a_j \exp(R), \ \forall x \in M(T,R).$$

Для необмежених опуклих множин теорема 2.7 має такий вигляд.

Теорема 10. Нехай $T(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ і $T(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ та $M(T)$ - опукла множина, така, що $S_1(0) \in M$ і

$$\max \left(\left| \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|, 1 \le i \le j \le k, x \in M(T) \right) < \infty.$$

Тоді $F(x) = T(x) + (M_1+M_2)n(x)/2 - (M_1+M_2)/2$ - опукла в

$M(T)$ функція, де

$$M_1 = \max\left(0, \max_{0<i<k+1} \max\left(-\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i^2}, \text{ де } x \in M(T)\right)\right);$$

$$M_2 = \max\left(0, \max_{0<i,j<k+1} \max\left((k-1)\left|\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_i^2}} \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x_j^2}}, \text{ де } x \in M(T)\right)\right).$$

Вдалося зняти умову на обмеженість частинних похідних другого порядку функції, що продовжується, у випадку опуклого продовження з гіперсфери в евклідів простір.

Перейдемо від функції $f(x)$, що продовжується, до функції

$$z = f(g(n(x))x) = f(g(n(x))x_1, g(n(x))x_2, \ldots, g(n(x))x_k).$$

Теорема 11. Якщо $f(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ і $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ - двічі неперервно диференційовна функція та $g(x): \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, де g задовольняє умови (1), тоді у функції $\Phi(x) = f(g(n(x))x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ всі її частинні похідні другого порядку обмежені в $\mathbb{R}^k$, та на $S_1(0)$ виконується рівність $f(x)=f(g(n(x))x)$.

Якщо за функцію $\Phi(x)$ в формулюванні теореми 6 взяти $f(g(n(x))x)$, яка за теоремою 11 має необхідні для цього властивості, то одержимо таку результуючу теорему.

Теорема 12. Нехай $f(x): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ і $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$ - двічі неперервно диференційовна функція і $g(x): \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $g(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, де g задовольняє умови (1). Тоді $F(x) = f(g(n(x))x) + (M_1 + M_2)n(x)/2 - (M_1+M_2)/2$ - опукла в $\mathbb{R}^k$ функція, де

$$M_1 = \max\left(0, \max_{0<i<k+1} \max\left(-\frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_i^2}, \text{ де } x \in \mathbb{R}^k\right)\right),$$

$$M_2 = \max\left(0, \max_{0<i,j<k+1} \max\left((k-1)\left|\frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_i^2}} \sqrt{M_1 + \frac{\partial^2 f(g(n(x))x)}{\partial x_j^2}}, \text{ де } x \in \mathbb{R}^k\right)\right).$$

Зазначимо, що умову на двічі неперервну диференційовність функції $f(x)$ можна послабити, якщо функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \max\left(f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots, f_n(x) \mid i=1,\ldots,n\right),$$

де $f_i(x) \in C^2(\mathbb{R}^k)$, $i=1,\ldots,n$. Тоді $F(x)$ - опукле продовження функції $f(x)$ і $S_1(0)$ в евклідів простір - можно шукати, як

$$F(x) = \max (F_1(x),\ldots,F_i(x),\ldots,F_n(x) \mid i=1,\ldots,n),$$

де $F_i(x)$ - опукле продовження двічі неперервно диференційовної функції $f_i(x)$ з гіперсфери $S_1(0)$ в евклідів простір $\mathbb{R}^k$.

У третьому розділі модифіковано метод покриваючих симплексів для мінімізації (максимізації) угнутих (опуклих) функцій на евклідових комбінаторних множинах, які збігаються з вершинами деякого опуклого многогранника M. Цей метод з відомим критерієм суміжності вершин запропоновано Ємцем О.О.

Алгоритм методу грунтується на тому, що глобальний мінімум угнутої функції на опуклому многограннику досягається в вершині цього многогранника.

У процесі реалізації алгоритму методу покриваючих симплексів для угнутої функції $f(x)$ в вершинах опуклого многогранника M були здійснені модифікації, направлені на збільшення швидкодії для випадку, коли $M=\Pi_{kn}(G)$- загальний переставний многогранник. Наведемо опис алгоритму методу покриваючих симплексів, який було реалізовано.

Етап I. 1) Починаючи з довільної вершини, користуючись критерієм суміжності вершини, шукаємо x_0 - вершину M, в якій досягається локальний мінімум на множині вершин. Тобто, для всіх вершин x_i, $i \in J_k = \{ i \in \mathbb{N}: i=1,\ldots,k\}$, які суміжні з x_0, виконується $f(x_0) \le f(x_i)$. Позначимо $f_{min} = f(x_0)$, $x_{min}=x_0$.

2) Знаходимо точку x_i', яка належить променю $[x_0,x_i)$, таку, що

а) x_i' лежить поза відрізком $[x_0,x_i]$, б) $f(x_i')=f_{min}$.

Іншими словами, знаходимо число $\lambda_i' > 1$, таке, що $x_i'=\lambda_i'(x_i- x_0)+x_0$.

3) Знаходимо коефіцієнти рівняння гіперплощини $c_0(x)=0$, яка проходить через $\{ x_i' \}$, $i \in J_k$.

4) Змінимо, якщо треба, знак коефіцієнтів рівняння гіперпло-

щини так, щоб $c_0(x_0) < 0$.

5) Розв'язуємо таку задачу лінійного програмування: знайти точку y_0 - вершину M, найбільш віддалену від знайденої гіперплощини і таку, що $c_0(y_0) > 0$. Позначимо цю задачу z_1.

6) Якщо $f(y_0) < f_{min}$, то позначимо $f_{min} = f(y_0)$, $x_{min} = y_0$.

7) Введемо нову цілочислову змінну $Ind=1$.

8) Якщо точки y_0, яка задовольняє умову $c_0(y_0)>0$, не існує, то задача розв'язана. Інакше кажучи, перейдемо на етап II, записуючи інформацію про розглянуту задачу у список, до якого заносимо координати точок y_0, $\{x_i'\}$, $i \in J_k$, рівняння гіперплощини $c_0(x)=0$, число Ind.

Етап II. На цьому етапі користуємось списком, в якому міститься інформація про точки та гіперплощини $\{ y_j, \{ x_i^j\}, i \in J_k, c_j(x)=0, Ind \}$.

1) Зчитуємо зі списку інформацію про записану в нього останню задачу, нехай її номер - m. Утворюємо k множин точок $I_n = \{x_i^m\} \setminus x_n^m$ і для кожної множини I_n виконуємо кроки 2) - 8) етапу I з наступними змінами, $n \in J_k$.

2) Знаходимо точку w_n^m, яка належить променю $[x_n^m, y_m)$, таку, що а) w_n^m лежить поза відрізком $[x_n^m, y_m]$, б) $f(w_n^m) = f_{min}$. Тобто, знаходимо число $\lambda_n^m > 1$, таке, що $w_n^m = \lambda_n^m (y_m - x_n^m) + x_n^m$.

3) Знаходимо коефіцієнти рівняння гіперплощини $c_n^m(x)=0$, яка проходить через x_n^m, I_n.

4) Змінимо, якщо треба, знак коефіцієнтів рівняння гіперплощини так, щоб $c_n^m(y_m) < 0$.

5) Розв'язуємо задачу z_n^m лінійного програмування: знайти точку y_n^m - вершину M, найбільш віддалену від гіперплощини з рівнянням $c_n^m(x)=0$ і таку, що $c_n^m(y_n^m)>0$. Будемо вважати, що y_n^m - розв'язок задачі z_n^m.

6) Збільшимо Ind на одиницю, значення Ind можно

інтерпретувати як номер кроку задачі z_n^m.

7) Якщо y_n^m - розв'язок задачі z_n^m - існує, то у випадку виконання нерівності $f(y_n^m) < f_{min}$ позначимо $f_{min} = f(y_n^m)$, $x_{min} = y_n^m$, записуємо інформацію про розв'язок задачі z_n^m у список.

8) Якщо список не вичерпано, то перейдемо на початок етапу II.

9) Якщо список вичерпано, то вихідна задача розв'язана, f_{min} - мінімальне значення функції f на vertM, x_{min} - точка, в якій досягається це значення.

Даний метод можно інтерпретувати таким чином. Як відомо, в $\mathbb{R}^k$ симплекс - це невироджений многогранник з $k+1$ вершиною. Тоді на кроці 2) (етапу I чи II) знаходимо симплекс S_1 чи S_n^m, вершинами якого є $\{x_0, \{x_i'\}\}$, чи $\{\{x_i^m\}, w_n^m\}$. На кроках 3), 4) знаходимо рівняння гіперплощини, якій належить грань симплексу, що розглядається , котра перерізає M. На кроці 5) перевіряємо умову $\mathrm{vert}M \subset \cup S_n^m$, де S_n^m - всі знайдені симплекси: якщо у задачі z_n^m, що розглядається, є розв'язок y_n^m, то це означає, що $\mathrm{vert}M \not\subset \cup S_n^m$, і розв'язування продовжуємо, інакше кажучи задача розв'язана. Цією інтерпретацією пояснюється назва методу - метод покриваючих симплексів.

Розглянемо задачу z_j, яка виникає на кроці 5) (етапу I або II) і яка полягає в знаходженні точки x_j, такої, що $x_j \in \mathrm{vert}M$ і

$$c_j(x_j) = \max_{\mathrm{vert}M} c_j(x), \qquad c_j(x_j) > 0, \tag{4}$$

де C_j - гіперплощина з рівнянням $c_j(x)=0$, яку для z_j шукаємо на кроці 3) етапу I чи II наведеного алгоритму.

Будемо користуватись такими позначеннями. Введемо поняття дерева задач. Вершини дерева - задачі z_{ij} вигляду (4), де i - номер кроку, на якому містяться задачі (i - значення Ind в опису алгоритму, j - порядковий номер на цьому кроці задачі z_{ij}). Дуги дерева задач об'єднують одну з вершин дерева - задачу z^* кроку n - з іншою вершиною - задачею z^{**} кроку $(n+1)$, де z^{**} знайдено за задачею z^* відповідно до наведеного алгоритму.

Нехай z', z^* - вершини дерева задач $z'=z_{im}$, $z^*=z_{jn}$, $i>j$. Якщо в дереві задач існує шлях, який об'єднує вершини z' і z^* і містить в собі тільки по одній точці кожного кроку t, $j<t<i$, то z^* будемо називати попередником z', а z' - наступником z^*.

Модифікація. Нехай $d(C,x)$ - відстань від точки x до гіперплощини C. Накладемо на задачу z^* вигляду (4) в алгоритмі додаткові умови:

$$c_j(x^*) > 0, \tag{5}$$

$$d(C_j,x^*) < d(C_j,x_j), \tag{6}$$

де z_j - попередник задачі z^*, x_j - розв'язок z_j, x^* - розв'язок z^*.

Доведено, що наведений алгоритм методу покриваючих симплексів з модифікацією є глобальний та скінченний.

У третьому розділі також наведено метод покриваючих симплексів для задачі оптимізації цільової функції на гіперсфері W (як відомо, $vert\Pi_{kn}(G)$ лежить на деякій гіперсфері W).

У четвертому розділі наведено відомі практичні задачі геометричного проектування та їх розв'язання за допомогою розроблених в дисертації методів. За їх прикладом показано можливості та особливості застосування одержаних результатів.

Наведемо відому модель задачі максимізації зваженої довжини зв'язуючої сітки при лінійному розташуванні прямокутників, яка розв'язувалась за допомогою методу покриваючих симплексів.

Нехай є k прямокутників однакового розміру $a \times b$, які необхідно розташувати на координатній площині XOY вздовж осі OX так, щоб сторони довжини a були суміжні, а центр симетрії лівого прямокутника збігався з початком координат. Задано, що центри симетрії прямокутників з'єднуються між собою сіткою з вагами a_{ij}, $a_{ij} > 0$, $i, j \in J_k$, $i \neq j$. Необхідно знайти таке розташування прямокутників, при якому значення довжини зв'язуючої сітки є максимальним.

Якщо здійснити занурення множини переставлень з перших k натуральних чисел $P_k(J_k)$ в $\mathbb{R}^k$, а саме $f(P_k(J_k)) \subset \mathbb{R}^k$: $j=(j_1,\ldots,j_k) \in E_k(J_k)$, тоді можна взяти за модель цієї задачі задачу евклідової комбінаторної оптимізації.

Функція $F(x)$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ вигляду

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{m=j+1}^{k} a_{im} \mid x_i - x_m \mid$$

є продовженням в $\mathbb{R}^k$ функції $F(J)$, яка задана на множині $E_k(J_k)$. З іншого боку, $F(x)$ - опукла в $\mathbb{R}^k$ ($\tilde{F}(x)= - F(x)$- угнута).

Таким чином, методом покриваючих симплексів розв'язувалась задача: знайти

$$\tilde{F}(J^*)=\min(\tilde{F}(J),\ J \in E_k),$$

де невід'ємні числа $\{a_{ij}\}$ є елементами матриці вагів зв'язку.

Результати числових експериментів. 1) k=30. Невід'ємні елементи матриці $A = \{ a_{ij} \}$ наведені в дисертації. Мінімальне значення F=-27464 досягається в точці (15, 5, 14, 6, 10, 1, 7, 8, 19, 9, 16, 13, 4, 30, 20, 11, 18, 3, 2, 12, 17, 22, 21, 28, 23, 29, 24, 26, 27, 25).

2) k=50. Невід'ємні елементи матриці $A=\{a_{ij}\}$ наведені в дисертації. До цієї задачі застосовувалась декомпозиція на дві аналогічні задачі вимірності $k_1 = k_2 = 25$ і i=1, j=50, I_i'= (2, 5, 4, 3, 44, 22, 34, 9, 14, 11, 12, 28, 10, 15, 37, 38, 18, 46, 27, 48, 40, 45, 25), I_j' =(7, 20, 13, 29, 30, 6,32, 33, 8, 35, 36, 16, 17, 39, 23, 15, 42, 43, 31, 24, 19, 47, 21, 49).

Обидві задачі розв'язувались методом покриваючих симплексів, для першої задачі мінімальне значення F_1= -16184, для другої - F_2= -15729. Мінімальне значення F_1+F_2- 11×49 досягається в точці (4, 5, 11, 3, 38, 9, 12, 25, 14, 1, 10, 15, 18, 48, 22, 37, 2, 27, 46, 40, 45, 34, 28, 44, 26, 36, 6, 7, 8, 17, 19, 20, 13, 15, 24, 32, 16, 47, 29, 39, 21, 23, 49, 35, 30, 42, 50, 31, 43, 33).

В цьому розділі також наведено відому модель задачі найкращого урівноваження диска з розташованими на його периферії вагами, до цільової функції якої було застосовано метод опуклого продовження з гіперсфери в евклідів простір, після чого продовжена функція була оптимізована методом покриваючих симплексів.

Задача про урівноваження ізольованого робочого ступеня турбомашини полягає в наступному. Ступінь має вигляд диску, який вважаєм урівноваженим. На цьому диску з рівним кутовим кроком розміщені робочі лопатки. Внаслідок технологічних особливостей процесу виготовлення лопаток такі їх параметри, як маса та статичний момент, мають деякий розкид значень навколо відповідного середнього значення. Тому при довільному розташуванні лопаток на диску може виникнути значний сумарний небаланс ступеня. Треба знайти таке розташування лопаток на диску, щоб сумарний небаланс ступеня був найменший.

Як відомо, функціонал, що оптимізується, можна записати як:

$$M = \left(\left(\sum_i M_i \cos m_i p_i\right)^2 + \left(\sum_i M_i \sin m_i p_i\right)^2 \right)^{1/2},$$

де $M_i > 0$, $m_i = 2\pi /k$, $p=(p_1,\dots,p_k) \in E_k(J_k)$, тобто, як функціонал від переставлення.

Зануримо функціонал M в $\mathbb{R}^k$ та продовжимо його з множини переставлень на весь евклідів простір:

$$\dot{M}(x) = \left(\left(\sum_i M_i \cos m_i x_i\right)^2 + \left(\sum_i M_i \sin m_i x_i\right)^2 \right)^{1/2},$$

Зазначимо, що $M(x) \notin C^2(\mathbb{R}^k)$. Але

$$M^2(x) = \left(\sum_i M_i \cos m_i x_i\right)^2 + \left(\sum_i M_i \sin m_i x_i\right)^2 \in C^2(\mathbb{R}^k).$$

Розв'язувалась така задача: знайти переставлення p_m, на якому функціонал M^2 (отже і M) набуває мінімального значення.

Для функції $M^2(x)$ було знайдено опукле продовження $F(x)$ з гіперсфери $W = \{ x: | x - \tau | = R \}$, якій належить множина переставлень E_k, в евклідів простір $\mathbb{R}^k$, як для двічі неперервно диференційовної функції з обмеженими частинними похідними другого порядку, після чого методом покриваючих симплексів розв'язувалась задача мінімізації функції $F(x)$ на E_k. Оскільки функції F і M^2 збігаються на W, то і знайдений мінімум F збігається з мінімумом M^2 на E_k.

Для $k=23$ для констант m_i, які наведені у дисертації, для функції $M^2(x)$ була знайдена константа методу опуклого продовження з гіперсфери W -

$$(P_1 + P_2)/2 = 4261.09.$$

Таким чином, функція

$$F(x) = M^2(x) - (P_1 + P_2)(\ n(x-\tau) - R^2)/2 -$$

угнута в $\mathbb{R}^k$ і на гіперсфері W збігається з функцією $M^2(x)$. Для мінімізації на E_k угнутої функції F було застосовано метод покриваючих симплексів. Знайдено F_{min}=0.0063 в точці (7, 6, 5, 4, 2, 3, 1, 23, 21, 19, 12, 18, 13, 20, 22, 14, 16, 17, 8, 9, 10, 15, 11).

3. ВИСНОВКИ

1. Здійснено постановку задачі про опукле продовження двічі неперервно диференційовної функції з гіперсфери в евклідів простір.

2. Доведено існування опуклого продовження двічі неперервно диференційовної функції з обмеженими частинними похідними другого порядку з гіперсфери в евклідів простір.

3. Здійснено постановку задачі про опукле продовження двічі неперервно диференційовної функції в евклідів простір з межі деякої опуклої множини, що задовольняє додаткові умови.

4. Доведено існування опуклого продовження двічі неперервно диференційовної функції з обмеженими частинними похідними другого порядку в евклідів простір з межі деякої опуклої множини, що задовольняє додаткові умови.

5. Запропоновано та обгрунтовано метод опуклого продовження двічі неперервно диференційовної функції з гіперсфери в евклідів простір.

6. Запропоновано модифікації та реалізовано на ПЕОМ метод

покриваючих симплексів. Обгрунтовано модифікації методу покриваючих симплексів, якщо множина, де шукаємо оптимум, є гіперсферою.

7. Проведено числові експерименти на прикладних задачах, які показали працездатність розроблених методів.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ОПУБЛІКОВАНІ В ПРАЦЯХ:

1. Емец О.А. Валуйская О.А. Построение выпуклой в R^k функции, совпадающей на гиперсфере с заданной функцией // Тез.докл. 44 науч. конф. проф., преп., науч. работников, асп. и студентов ин-та / Минобразования Украины. Полт. инж.-строит. ин-т. - Полтава, 1992. - С.282.

2. Емец О.А., Валуйская О.А. К вопросу об оптимизации выпуклых функций на перестановочном многограннике // Тези доп. 45 наук. конф. проф., виклад., наук. працівників, асп. та студентів ін-ту. Частина 2 / Міносвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т. - Полтава, 1993. - С. 205.

3. Емец О.А., Валуйская О.А. О методе евклидовой комбинаторной оптимизации с использованием выпуклого продолжения целевой функции и покрывающего множества симплексов / Полт. инж.-строит. ин-т. - Полтава, 1993. - 21 с. - Деп. в ГНТБ Украины 07.02.94, №255-Ук94.

4. Ємець О.О., Валуйська О.О. Метод опуклого продовження цільової функції з гіперсфери в евклідовий простір // Тези доп. 46 наук. конф. проф., виклад., наук. працівників, асп. та студентів ін-ту. Частина 1 / Міносвіти України. Полт. інж.-будів. ін-т. - Полтава, 1994. - С. 83.

5. Емец О.А., Валуйская О.А. Метод выпуклого продолжения дважды непрерывно дифференцируемой функции с гиперсферы в евклидово пространство/ Полт. техн. ун-т. - Полтава, 1994. - 8 с. - Деп. в ГНТБ Украины 14.12.94, №2430-Ук94.

6. Ємець О.О., Валуйська О.О. Про опукле продовження цільової функції з обмеженими частинними похідними першого та другого порядку// Тези доп. 47 наук. конф. проф., виклад., наук. працівників, асп. та студентів ін-ту. Частина 1 / Міносвіти України. Полт. техн. ун-т. - Полтава, 1995. - С. 64.

7. Емец О.А., Валуйская О.А. Изменения и дополнения метода выпуклого продолжения дважды непрерывно дифференцируемой функции с гиперсферы в евклидово пространство / Полт. техн. ун-т. - Полтава, 1995. - 8 с. - Деп. в ГНТБ Украины 10.05.95, № 1031-Ук95.

8. Емец.О.А., Валуйская О.А. Выпуклое продолжение дважды непрерывно дифференцируемой функции с гиперсферы в евклидово пространство // Тез. докл. 3-й международ. науч.-техн. конф. "Контроль и управление в технических системах" / Минобразования Украины. Вин. гос.ун-т.- Винница, 1995. - С. 116-117.

9. Ємець О.О., Валуйська О.О. Опукле продовження $C^2(\mathbb{R}^k)$ функції з гіперсфери в опуклі множини// Тези доп. 48 наук. конф. проф., виклад., наук. працівників, асп. та студентів ін-ту. Частина 1 / Міносвіти України. Полт. техн. ун-т. - Полтава, 1996. - С. 66.

10. Валуйська О.О. Оптимізація опуклих та опукло продовжених $C^2(\mathbb{R}^k)$ функцій на евклідових комбінаторних множинах спеціального вигляду// Там же. - С. 65.

Summary

Valujska O.O. The method of the convex extending for the modelling of the optimization problems in the geometric designing.

This dissertation is a manuscript being submitted for of Science Degree (Physics and Mathematics) in speciality 01.05.02 - mathematical modelling and numerical methods in scientific reseaches. Institute for Problems in Machinery of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkov, 1996.

The method of the convex extending of the double continual differential function from gipersphere to the euclidean space is presented. The existing of the convex extending of the double continual differential function from the boundary of the specific convex set to the euclidean space is proofed. The method of optimization of concave functions on the some euclidean combinatorial sets is investigated. Some applications in the geometric designing are considered.

Аннотация

Валуйская О.А. Метод выпуклого продолжения для моделирования задач оптимизации в геометрическом проектировании.

Диссертация является рукописью, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 - математическое моделирование и вычислительные методы в научных исследованиях. Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1996.

Изложен метод выпуклого продолжения дважды непрерывно дифференцируемых функций с гиперсферы в евклидово пространство. Обосновано существование выпуклого продолжения дважды непрерывно дифференцируемой функции с границы специальных выпуклых множеств в евклидово пространство. Исследуется метод оптимизации вогнутых функций на специальных евклидовых комбинаторных множествах. Рассмотрены некоторые приложения в геометрическом проектировании.

Ключові слова: геометричне проектування, опукле продовження, покриваючі симплекси.

Відповідальний за випуск Могилат О.Н.

Підписано до друку 10.12.96р. Формат 60х84 1/16. Папір друкарський.
Друк офсетний. умовн. друк. арк. 1. Замовлення №1001. Тираж 100 прим.
Безкоштовно. Дільниця оперативного друку статистичного управління Полтавської
Області. м. Полтава, вул. Пушкіна, 103.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]