НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ШАБОЗОВ Мирганд Шабозович

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ И ФУНКЦИОНАЛОВ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

КИЕВ — 1996

Работа выполнена в Инс

Научный консультант: член-корр
математич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
ЛИГУН А.А.
доктор физико-математических наук
КОНОВАЛОВ В.Н.
доктор физико-математических наук, профессор
ШЕВЧУК И.А.

Ведущая организация: Днепропетровский государственный университет.

Защита диссертации состоится 21 января 1997 г.
в ___ $^{00}$ час. на заседании специализированного совета Д.01.66.01
при Институте математики НАН Украины по адресу:
252601, Киев-4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института.

Автореферат разослан 12 декабря 1996 г.

Учёный секретарь
специализированного совета
доктор физ.-мат. наук Гуса ГУСАК Д.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. К настоящему времени в теории приближения глубоко и тщательно исследованы задачи, связанные с аппроксимацией функций одной переменной (одномерный случай). По этой тематике, берущей своё начало от основополагающих работ К.Ф.Вейерштрасса и П.Л.Чебышева, написаны десятки монографий. Особую роль сыграли работы А.Н. Колмогорова и С.М.Никольского, связанные с решением экстремальных задач о нахождении точной верхней грани погрешности приближения на заданом классе функций и указании для этого класса наилучшего аппарата приближения фиксированной размерности. Усилиями многих математиков, и в первую очередь учеников и последователей Колмогорова и Никольского, такие задачи решены в одномерном случае для наиболее употребляемых классов функций. Однако оказалось, что разработанные методы иногда существенно используют специфику одномерного случая и не пригодны при исследовании экстремальных задач на классах функций многих переменных. Поэтому естественно, что в последнее время внимание многих специалистов, работающих в области теории аппроксимации, обращено на экстремальные задачи приближения в многомерном случае.

Ещё одно направление, которое сейчас интенсивно разрабатывается, возникло на стыке теории приближения и численного анализа. Оно связано, во-первых, с оптимизацией приближённого интегрирования, и, во-вторых, с восстановлением значений $y=Ax$ оператора $A$, когда известна неполная информация об элементе $x$. Оказалось, что разработанные методы и полученные в теории приближения результаты позволяют находить в ряде случаев точное в том или ином смысле решение этих задач.

Среди актуальных задач теории приближения особое место занимают экстремальные задачи, связанные с приближением функций многих переменных и восстановлением значений линейных операторов и функционалов. Исследование многомерных экстремальных задач теории приближения значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем из-за появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. В частности, область, на которой осуществляется приближение, может иметь сложную структуру, что создаёт дополнительные трудности при описании дифференциально-разностных свойств функций. При этом усложняется и аппарат приближения. Поэтому в задачах аппроксимации функций многих переменных точные результаты известны в редких случаях, что делает исследование указанных экстремальных задач весьма актуальным.

Цель работы заключается в решении ряда конкретных экстремальных задач, связанных с:

- приближением функций двух переменных;
- восстановлением значений линейных операторов;
- оптимизацией приближённого интегрирования, то есть с оптимальным восстановлением линейного функционала.

Методика исследования. Методическую основу работы составляют методы решения экстремальных задач теории приближения функций, функционального анализа, теории сплайнов и теории квадратур.

Научная новизна. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми. В частности:

- найдены точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных интерполяционными билинейными сплайнами на классах функций, задаваемых модулями непрерывности;
- найдены точные значения квазипоперечников компактов для некоторых функциональных классов и разработан метод оптимизации кубатурных формул для многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта, основанный на теории квазипоперечников;
- решена задача восстановления решения краевых задач Дирихле и Неймана с помощью тригонометрических полиномов в метрике $L_p$ и найден наилучший линейный метод восстановления решения указанных краевых задач в метрике $L_p$ при $p=1$ и $p=\infty$;
- решена задача оптимального кодирования и восстановления операторов решений краевых задач по информации о граничных функциях;
- решена задача о нахождении наилучших квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью на классах функций малой гладкости;
- решена задача о нахождении наилучших квадратурных формул для классов функций, задаваемых модулями гладкости.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит в основном теоретический характер. Полученные в ней результаты могут служить основой для дальнейших теоретических исследований в теории функций, теории краевых задач, функционального и численного анализа.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на: Республиканской конференции по экстремальным задачам теории приближения и их приложениям (Киев,1990); IV Международной научной конференции имени академика М.Ф.Кравчука (Киев, 1995); Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ" (Москва, 1995); Международной конференции "Теория приближения и численные методы", посвящённой 100-летию со дня рождения Е.Я. Ремеза (Ровно, 1996); Международной конференции по теории приближения функций, посвящённой памяти профессора П.П.Коровкина (Калуга, 1996). С сообщениями о результатах диссертации автор выступил на: семинаре "Оптимизация методов приближения" (руководитель член-кор. НАН Украины Н.П.Корнейчук, ИМ НАН Украины, ежегодно, 1993-1996 гг.); семинаре по теории приближения функций Днепропетровского госуниверситета (руководители проф. В.П.Моторный и проф. В.Ф.Бабенко; Днепропетровск, 1996); семинаре по теории функций Днепродзержинского индустриального института (руководитель проф. А.А.Лигун; Днепродзержинск, 1990).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в [1-14]. Работы [10-11] написаны в соавторстве с С.В.Вакарчуком, которому принадлежит постановка рассмотренных задач и выбор объекта исследований.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы, содержащего 127 наименований. Объём диссертации - 215 страниц машинописного текста.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткий обзор исследований, относящихся к рассматриваемым в диссертации задачам, даётся описание основных научных результатов. Обоснована актуальность темы диссертации.

В первой главе рассматриваются задачи одновременного приближения функций двух переменных и их частных производных билинейными интерполяционными сплайнами и их соответствующими производными. Указанные задачи рассмотрены на классах функций, задаваемых модулями непрерывности.

Пусть $f\in C(G)$, где $G=[0,1]\times[0,1]$. Через $C^{(r,s)}(G)$, где $r,s$-целые неотрицательные числа, обозначим класс функций $f(x,y)$, обладающих непрерывными частными производными $f^{(l,q)}(x,y)=\partial^{l+q}f/\partial x^l\partial y^q$, $l\leq r$, $q\leq s$. При $r=s=0$ полагаем $C^{(0,0)}(G)=C(G)$ с обычной нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(G)} = \max\{|f(x,y)|:(x,y)\in G\}.$$

Для функции $f\in C(G)$ запишем полный модуль непрерывности $\omega(f;t,\tau)=\sup\{|f(x',y')-f(x'',y'')|:\ |x'-x''|\leq t,\ |y'-y''|\leq\tau\}$, где $(x',y'),(x'',y'')\in G$. Модулем непрерывности $f$ также называют функцию

$$\omega_*(f;t,\tau)= \sup \{|f(x',y')-f(x',y'')-f(x'',y')+f(x'',y'')| : (x',y'),(x'',y'')\in G,\ |x'-x''|\leq t,\ |y'-y''|\leq \tau\}$$

Через $W^{(r,s)}H^{\omega}$ $(r,s=0,1,\ldots)$ обозначим класс функций, у которых производная $f^{(r,s)}(x,y)$ всюду в $G$ существует, кусочно-непрерывна, допускает перемену порядка дифференцирования и для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in G$ удовлетворяет неравенству

$$|f^{(r,s)}(x',y') - f^{(r,s)}(x'',y'')| \leq \omega(|x'-x''|,|y'-y''|),$$

где $\omega(t,\tau)$ - заданный полный модуль непрерывности.

Будем говорить, что функция $f(x,y)$ принадлежит классу $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}$, если она имеет кусочно-непрерывную производную $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющую для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in G$ условию

$$|f^{(r,s)}(x',y') - f^{(r,s)}(x'',y'')| \leq \omega_1(|x'-x''|) + \omega_2(|y'-y''|),$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ - заданные модули непрерывности.

Через $W^{(r,s)}H^{\omega,2}$ обозначим класс функций, у которых существует кусочно-непрерывная на $G$ производная $f^{(r,s)}(x,y)$, удовлетворяющая для любых двух точек $M'(x',y')$, $M''(x'',y'')\in G$ условию

$$|f^{(r,s)}(M') - f^{(r,s)}(M'')| \leq \omega[\rho(M';M'')],$$

где $\rho(M';M'') = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}$ - расстояние между точками $M'$ и $M''$, а $\omega(t)$ - заданный на отрезке $[0,\sqrt{2}]$ модуль непрерывности.

Через $W^{(r,s)}H^{\omega*}$ обозначим класс функций, у которых существует кусочно-непрерывная на $G$ производная $f^{(r,s)}(x,y)$,удовлетворяющая для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in G$ условию

$$|f^{(r,s)}(x',y')- f^{(r,s)}(x',y'')- f^{(r,s)}(x'',y')+ f^{(r,s)}(x'',y'')| \leq \omega_*(|x'-x''|,|y'-y''|),$$

где $\omega_*(t,\tau)$ - заданный модуль непрерывности.

Зададим в области $G$ сетку $\Delta_{mn} = \Delta^x_m \times \Delta^y_n$, где

$$\Delta^x_m : x_i = i/m\ (i=\overline{0,m});\quad \Delta^y_n : y_j = j/n\ (j=\overline{0,n}),$$

которой задаётся разбиение квадрата $G$ на ячейки

$$G_{i,j} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{j-1},y_j]\quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Сопоставим $f\in C(G)$ функцию $S_{1,1}(f;x,y)\in C(G)$, однозначно определённую

условиями: 1) на каждой ячейке $G_{i,j}$ $(i=\overline{1,m};j=\overline{1,n})$ функция $S_{1,1}(f;x,y)$ является алгебраическим многочленом первой степени по $x$ и по $y$;
2) $S_{1,1}(f;x_i,y_j) = f(x_i,y_j)$ $\quad (i=\overline{0,m};j=\overline{0,n})$.

Если $\mathfrak{M}^{r,s}(r,s=\overline{0,1})$-один из определённых выше классов функций, то требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}^{(l,q)}(\mathfrak{M}^{r,s}) \overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\|e^{(l,q)}(f)\|_C : f\in\mathfrak{M}^{r,s}\right\} \tag{1}$$

для $l\leqslant r$, $q\leqslant s$; $1\leqslant r+s\leqslant 2$, $r,s=\overline{0,1}$, где

$$e^{(l,q)}(f;x,y) = f^{(l,q)}(x,y) - S_{1,1}^{(l,q)}(f;x,y) \quad (l,q=\overline{0,1})$$

- погрешность интерполяции билинейными сплайнами.

Порядковые оценки величины, аналогичной (1), но для иных классов функций, имеются в монографиях по сплайнам. Оценки, связанные с наилучшим выбором точек интерполяции $f(x,y)$ многогранными линейными функциями, содержатся в работе В.Ф.Бабенко и А.А.Лигуна. Интерполяцию непрерывных отображений кусочно-линейными отображениями рассматривал В.Ф.Бабенко. Случай $r=s=0$ для всех приведенных выше классов функций в задаче (1) рассматривал В.Ф.Сторчай. С.Б.Вакарчуком найдено решение задачи (1) для класса $W^{(1,1)}H^{\omega}$ с произвольным полным модулем непрерывности $\omega(t,\tau)$. Таким образом, в двух крайних случаях задача (1) для класса $W^{(r,s)}H^{\omega}$ была решена. Оставалось найти точное решение указанной задачи в случаях $l=r=1$, $q=s=0$ и $l=r=0$, $q=s=1$ для класса $W^{(r,s)}H^{\omega}$ и при $l\leqslant r$, $q\leqslant s$; $1\leqslant r+s\leqslant 2$, $r=s=\overline{0,1}$ для остальных введенных выше классов функций. В ходе решения задачи (1) получены следующие

**Теоремы I.3.I и I.3.2.** *Пусть $\omega_1(t),\omega_2(\tau)$ и $\omega_*(t,\tau)$ - произвольные выпуклые модули непрерывности. Тогда для любых $m$ и $n$ справедливы равенства:*

$$\mathcal{E}\left[W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2} \cap W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}\right] = \frac{1}{4}\cdot\int_0^{1/m}\omega_1(t)dt + \frac{1}{4}\cdot\int_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau,$$

$$\mathcal{E}\left[W^{(1,1)}H^{\omega_*}\right] = \frac{1}{16}\cdot\int_0^{1/m}\int_0^{1/n}\omega_*(t,\tau)dtd\tau.$$

*Если же $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$- произвольные модули непрерывности, то*

$$\mathcal{E}\left[W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2} \cap W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}\right]$$

$$= \frac{\theta_\omega}{4}\cdot\int_0^{1/m} \omega_1(t)dt + \frac{\theta_\omega}{4}\cdot\int_0^{1/n} \omega_2(\tau)d\tau \quad (\tfrac{2}{3} \leq \theta_\omega \leq 1).$$

При получении точных значений величины (1) для $l \leq r$, $q \leq s$; $1 \leq r+s \leq 2$, $r=s=\overline{0,1}$ на перечисленных классах функций широко используются свойства разделённых разностей функций двух переменных. Эта техника даёт весьма удобное интегральное представление погрешности интерполяции частных производных функций соответствующими производными билинейного сплайна.

**Теорема I.4.I.** *Пусть $\omega(t,\tau)$ - выпуклый модуль непрерывности по переменной $\tau$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}^{(1,0)}\left[W^{(1,0)}H^{\omega}\right] = m\cdot\int_0^{1/m} \omega(t, 1/2n)dt.$$

*Если же $\omega(t,\tau)$ является выпуклым модулем непрерывности по переменной $t$, то*

$$\mathcal{E}^{(0,1)}\left[W^{(0,1)}H^{\omega}\right] = n\cdot\int_0^{1/n} \omega(1/2m, \tau)d\tau.$$

Одной из центральных в данной главе является

**Теорема I.4.2.** *Пусть $\omega(\delta)$ - произвольный модуль непрерывности. Тогда для любых $m$ и $n$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}^{(1,1)}\left[W^{(1,1)}H^{\omega,2}\right] = mn\cdot\int_0^{1/m}\int_0^{1/n} \omega\left[\sqrt{t^2+\tau^2}\right]dt d\tau.$$

*Если же $\omega(\delta)$ - выпуклый модуль непрерывности, то для любых $m$ и $n$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}^{(1,0)}\left[W^{(1,0)}H^{\omega,2}\right] = m\cdot\int_0^{1/m} \omega\left[\sqrt{t^2 + 1/4n^2}\right]dt,$$

$$\mathcal{E}^{(0,1)}\left[W^{(0,1)}H^{\omega,2}\right] = n\cdot\int_0^{1/n} \omega\left[\sqrt{1/4m^2 + \tau^2}\right]d\tau.$$

Во второй главе на основе блендинговых методов приближения (blending-approximation method) вычислены точные значения квазипоперечников некоторых классов функций. Интенсивное развитие смешанных (blending) методов приближения функций многих переменных в работах А.И.Вайндинера, Н.П.Корнейчука и С.В.Переверзева, О.Н.Литвина, С.Б.Вакарчука, W.Gordon, W.Haußmann, K.Jetter, B.Steinhaus, J.Resperss, E.Cheney и других позволило расширить рамки применения названных методов и эффективно использовать их при решении задач оптимизационного содержания. Определение понятий различных квазипоперечников компактов на основе блендинг-методов дало возможность перейти к изучению тех экстремальных задач теории приближения, круг которых для обычных $n$-поперечников очертил А.Н.Колмогоров.

Пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ - некоторые линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$V_m = \{v_\mu(x)\}_{\mu=0}^{m}, \quad U_n = \{u_\nu(y)\}_{\nu=0}^{n}$$

-их конечномерные подпространства, то есть $V_m \subset X$, $U_n \subset Y$.

Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\mu=0}^{m} v_\mu(x)\cdot\phi_\mu(y) + \sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x)\cdot u_\nu(y),$$

где $\{\varphi_\nu(x)\}_{\nu=0}^{n}$ и $\{\phi_\mu(y)\}_{\mu=0}^{m}$ - наборы произвольных функций, принадлежащих соответственно пространствам $X$ и $Y$, назовём обобщённым полиномом, порождённым подпространствами $V_m$ и $U_n$.

Известно, что обобщённые полиномы указанного вида образуют подпространство

$$G(V_m,U_n) \overset{\mathrm{df}}{=} V_m \oplus Y + X \oplus U_n,$$

где операции "$\oplus$" и "+" обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}(f,G(V_m,U_n))_Z \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\{\|f-g_{m,n}(f)\|_Z : g_{m,n}\in G(V_m,U_n)\}, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M},G(V_m,U_n))_Z \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\{\mathcal{E}(f,G(V_m,U_n))_Z : f\in\mathfrak{M}\}. \tag{3}$$

Величина (2) характеризует наилучшее приближение фиксированного элемента $f\in\mathfrak{M}$ множеством $G(V_m,U_n)$, а величина (3) - отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G(V_m,U_n)$ в нормированном пространстве $(Z,\|\cdot\|_Z)$.

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M}\subset Z$ величину

$$\mathrm{d}_{m,n}(\mathfrak{M},Z) = \inf\{\mathcal{E}(\mathfrak{M},G(V_m,U_n))_Z : V_m\subset X,\ U_n\subset Y\} \tag{4}$$

называют квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ по Колмогорову.

Величины, аналогичные (4), изучались в работах В.Н.Темлякова и М.-Б.А.Бабаева. Точные значения квазипоперечников некоторых функциональных классов найдены С.Б.Вакарчуком.

Пусть $\mathbb{N}$ -множество натуральных чисел, $\Delta=[0,2\pi]$, $\Delta^2=\Delta\times\Delta$, $L_2(\Delta^2)$ - множество $2\pi$-периодических по каждой переменной функций $f(x,y)$, для которых

$$\|f\|_2 = \left[ \iint\limits_{\Delta^2} |f(x,y)|^2 dxdy \right]^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{r,s}(\Delta^2)$ $(r,s\in\mathbb{N})$ обозначим множество функций $f\in C(\Delta^2)$, у которых $f^{(\nu,\mu)}(x,y)\in C(\Delta^2)$ $(\nu=\overline{0,r-1},\ \mu=\overline{0,s-1})$, производные $f^{(r,\mu)}$ $(\mu=\overline{0,s-1})$, $f^{(\nu,s)}(\nu=\overline{0,r-1})$ всюду на $\Delta^2$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, а $f^{(r,s)}(x,y)\in L_2(\Delta^2)$.

Для произвольной функции $f\in L_2(\Delta^2)$ определим модуль гладкости

$$\omega_k(f;\delta_1,\delta_2) = \sup\{\|\Delta^{k,k}_{t,\tau} f(x,y)\|_2 : |t|\leq\delta_1, |\tau|\leq\delta_2\},$$

где

$$\Delta^{k,p}_{t,\tau} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{\mu=0}^{p} (-1)^{\nu+\mu} \binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu t, y+\mu\tau).$$

Пусть $\Phi_j(x)$ $(x>0; j=1,2)$- положительные неубывающие функции, удовлетворяющие условию $\lim\limits_{x\to 0}\Phi_j(x)=\Phi_j(0)=0$. Через $W^{r,s}_{2,k}(\Phi_{1,2})$ $(r,s\in\mathbb{N})$ обозначим множество функций $f\in L_2^{r,s}(\Delta^2)$, для которых $f^{(r,s)}$ при $0<u,v\leq 2\pi$ удовлетворяют условию

$$\frac{\pi^2}{4uv}\cdot \int\limits_0^u \int\limits_0^v \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)\cdot \sin\frac{\pi t}{u}\cdot\sin\frac{\pi\tau}{v}\cdot dt d\tau \leq \Phi_1^2(u)\cdot\Phi_2^2(v).$$

Обозначим $\quad (1-\cos nt)_*^m \overset{df}{=} \begin{cases} (1-\cos nt)^m, & nt\leq\pi; \\ 2^m & , nt>\pi. \end{cases}$

**Теорема 2.2.1.** *Пусть функции $\Phi_j(x)$ $(j=1,2)$ удовлетворяют условия*

$$\Phi_j^2\left(\frac{x}{\mu}\right)\cdot\int\limits_0^{\pi\mu} (1-\cos t)_*\cdot\sin(t/\mu)dt \leq 2\mu\cdot\Phi_j^2(x)$$

*при любых $x\in(0,2\pi]$ и $\mu>0$. Тогда при всех $m,n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}\left[W^{r,s}_{2,k}(\Phi_{1,2}), L_2(\Delta^2)\right] = \frac{\Phi_1^k(\frac{\pi}{m})\cdot\Phi_2^k(\frac{\pi}{n})}{2^k\cdot m^r\cdot n^s}.$$

Пусть $\Psi_j(x)$ $(x>0; j=1,2)$- произвольные выпуклые возрастающие функции, для которых $\lim\limits_{x\downarrow 0}\Psi_j(x)=\Psi_j(0)=0$. Через $W^{r,s}_{2,k}(\Psi_{1,2})$ $(r,s\in\mathbb{N})$ обозначим класс функций $f\in L_2^{r,s}(\Delta^2)$, удовлетворяющих при $0<u,v\leqslant 2\pi$ условию

$$\int\limits_0^u\int\limits_0^v \omega_k^2(f^{(r,s)};t,\tau)dtd\tau \leqslant \Psi_1^2(u)\cdot\Psi_2^2(v).$$

**Теорема 2.2.2.** *Пусть для любого заданного* $\mu\in(0,1]$ *и для всех* $\lambda>0$, $x\in(0,\pi]$ *функции* $\Psi_j(x)$ $(j=1,2)$ *удовлетворяют условиям*

$$\Psi_j(\mu x)\cdot\int\limits_0^{\pi\lambda}(1-\cos t)_*^k dt \leqslant \Psi_j(\lambda x)\cdot\int\limits_0^{\pi\mu}(1-\cos t)^k dt.$$

*Тогда для любых* $m,n\in\mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$d_{2m-1,2n-1}\left[W^{r,s}_{2,k}(\Psi_{1,2}),L_2(\Delta^2)\right] =$$

$$= \frac{\Psi_1(\frac{\mu\pi}{m})\cdot\Psi_2(\frac{\mu\pi}{n})}{2^k\cdot m^r\cdot n^s}\cdot\left[\int\limits_0^{\pi\mu/m}(1-\cos mt)^k dt\right]^{-1/2}\cdot\left[\int\limits_0^{\pi\mu/n}(1-\cos n\tau)^k d\tau\right]^{-1/2}.$$

Через $W^{r,s}_\infty(\Delta^2)$ $(r,s\in\mathbb{N})$ обозначим множество функций $f\in C^{r-1,s-1}(\Delta^2)$, у которых частные производные $f^{(r,\mu)}$ $(\mu=\overline{0,s})$, $f^{(\nu,s)}$ $(\nu=\overline{0,r})$ всюду на $\Delta^2$ существуют, кусочно-непрерывны, причём

$$\left\|f^{(r,s)}\right\|_\infty = \sup\left\{|f^{(r,s)}(x,y)|:\ (x,y)\in\Delta^2\right\} \leqslant 1,$$

а $\widetilde{W}^{r,s}_\infty(\Delta^2)$ означает класс функций, тригонометрически сопряжённых по обеим переменным с функциями $f\in W^{r,s}_\infty(\Delta^2)$.

Сформулируем основной результат из параграфа 2.3.

**Теоремы 2.3.I и 2.3.2.** *При любых* $m,n,r,s\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$d_{m,n}\left[W^{r,s}_\infty(\Delta^2),C(\Delta^2)\right] = K_r\cdot K_s\cdot\left[\frac{m+1}{2}\right]^{-r}\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]^{-s},$$

$$d_{m,n}\left[\widetilde{W}^{r,s}_\infty(\Delta^2),C(\Delta^2)\right] = \widetilde{K}_r\cdot\widetilde{K}_s\cdot\left[\frac{m+1}{2}\right]^{-r}\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]^{-s},$$

*где* $[b]$ *- целая часть числа* $b$; $K_p$, $\widetilde{K}_p$ *- константы Фавара.*

В параграфе 2.4 второй главы рассмотрена задача построения кубатурных формул для приближённого вычисления многомерных сингулярных интегралов с ядрами Гильберта. Предложен метод оптимизации кубатурных формул, основанный на теории квазипоперечников и аналогичных идеях конструктивной теории функций. Отметим, что изложенный оптимизационный подход к приближённому вычислению сингулярных интегралов ранее нигде не рассматривался. Все известные автору результаты, в основном работы В.Г.Габдулхаева и его учеников, касались лишь построения конкретных кубатурных формул на определённых классах функций.

Пусть $X_s$ – банахово пространство вещественных функций $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_s)$ $2\pi$-периодических по каждой из переменных $x_j\,(j=\overline{1,s})$; $X_s^{(j)}$ – банахово пространство функций $f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_s)$;

$U_{m_j}^{(j)} \subset X_1$ $(m_j \in \mathbb{N})$ – подпространство размерности $m_j$ с базисом $\left\{\varphi_k^{(j)}(x_j)\right\}_{k=0}^{m_j-1}$ $(j=\overline{1,s})$. Полагаем

$$G_s\left[U_{m_1}^{(1)},\ldots,U_{m_s}^{(s)}\right] = X_{s-1}^{(1)} \oplus U_{m_1}^{(1)} + \ldots + X_{s-1}^{(s)} \oplus U_{m_s}^{(s)},$$

где операции "$\oplus$" и "+" обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Элементы множества $G_s$ можно представить в виде обобщённых полиномов порядка $\mathbb{m}_s = (m_1,m_2,\ldots,m_s)$ ранга $s-1$, линейно зависящих от функций $s-1$ переменных

$$g_{\mathbb{m}_s}^{(s-1)}(x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k_j=1}^{m_j} \varphi_{k_j}^{(j)}(\bar{x}_s - x_j)\cdot\phi_{k_j}^{(j)}(x_j),$$

где $\varphi_{k_j}^{(j)} \in X_{s-1}^{(j)}$; $\bar{x}_s - x_j = (x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_s)$.

Пусть $\mathfrak{L}_{\mathbb{m}_s}^{(s-1)} = \left\{L_{\mathbb{m}_s}^{(s-1)}\right\}$ – множество непрерывных операторов, переводящих $X_s$ в $G_s$. В многомерном сингулярном интеграле Гильберта

$$I_s f = I_s(f,x) = \frac{1}{(2\pi)^s}\int_{\Omega_s} f(\sigma)\cdot\prod_{j=1}^{s}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_j - x_j}{2}\,d\sigma,$$

где $\Omega_s = \prod_{j=1}^{s}[-\pi,\pi]$, $d\sigma = \prod_{j=1}^{s} d\sigma_j$, понимаемом в смысле главного значения по Коши, аппроксимируем его плотность $f$ различными выражениями вида

$\mathcal{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}(f)$. За кубатурную формулу для $I_s f = I_s(f,x)$ принимаем выражение $\mathring{I}_{\mathbb{M}_s} f = \mathring{I}_{\mathbb{M}_s}(f,x) = I_s\left[\mathcal{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}(f),x\right]$. Для характеристик качества квадратурной формулы $\mathring{I}_{\mathbb{M}_s} f$ для $I_s f$ на множестве $\mathfrak{M}\subset X_s$ примем величину

$$R_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)= \inf_{U_{m_j}^{(j)}\ (j=\overline{1,s})}\ \inf_{\mathcal{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}\in\mathfrak{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}} R\left[\mathfrak{M};G_s\left\{(U_{m_j}^{(j)})_{j=1}^{s}\right\};\mathcal{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}\right]_{X_s},$$

где $R\left[\mathfrak{M};G_s\left\{(U_{m_j}^{(j)})_{j=1}^{s}\right\};\mathcal{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}\right]_{X_s} = \sup\left\{\left\|I_s f - \mathring{I}_{\mathbb{M}_s} f\right\|_{X_s} : f\in\mathfrak{M}\right\}$.

В случае, когда множество $\mathfrak{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}$ состоит только из линейных непрерывных операторов, отображающих $X_s$ в $G_s$, вместо $R_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)$ пишем $\mathring{R}_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)$. Если же $\mathfrak{L}_{\mathbb{M}_s}^{(s-1)}$ есть множество всех линейных непрерывных проекторов, переводящих $X_s$ в $G_s$, то используем обозначение $\dot{R}_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)$.

Пусть $\bar{\mathfrak{M}}\subset X_s$ - класс функций, тригонометрически сопряжённых к элементам класса $\mathfrak{M}\subset X_s$, а $\tilde{\mathfrak{M}}\subset X_s$ - класс функций, тригонометрически сопряжённые к которым входят в $\mathfrak{M}$. Символами $d_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)$, $\delta_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)$, $\pi_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s)$ обозначим соответственно колмогоровский, линейный и проекционный квазипоперечники [11].

**Теорема 2.4.1.** *Пусть $X_s$ – одно из пространств $L_p(\Omega_s)$, $1<p<\infty$, или $C(\Omega_s)$, класс $\mathfrak{M}\subset X_s$ и соответствующие ему классы $\bar{\mathfrak{M}}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ являются компактными, а оператор $I_s$ действует в пространстве $X_s$. Тогда*

$$R_{\mathbb{M}_s}\left[\mathfrak{M},X_s\right] = d_{\mathbb{M}_s}(\bar{\mathfrak{M}},X_s), \qquad R_{\mathbb{M}_s}\left[\tilde{\mathfrak{M}},X_s\right] = d_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s),$$

$$\mathring{R}_{\mathbb{M}_s}\left[\mathfrak{M},X_s\right] = \delta_{\mathbb{M}_s}(\bar{\mathfrak{M}},X_s), \qquad \mathring{R}_{\mathbb{M}_s}\left[\tilde{\mathfrak{M}},X_s\right] = \delta_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s),$$

$$\dot{R}_{\mathbb{M}_s}\left[\mathfrak{M},X_s\right] = \pi_{\mathbb{M}_s}(\bar{\mathfrak{M}},X_s), \qquad \dot{R}_{\mathbb{M}_s}\left[\tilde{\mathfrak{M}},X_s\right] = \pi_{\mathbb{M}_s}(\mathfrak{M},X_s),$$

*где $\mathbb{M}_s = (m_1,\ldots,m_s)$; $m_j\in\mathbb{N}$ $(j=\overline{1,s})$.*

Следствие 2.4.1. *Справедливы равенства*

$$R_{\mathfrak{M}_s}\left[\tilde{W}_\infty^{r^s}(\Omega_s),C(\Omega_s)\right] = \mathring{R}_{\mathfrak{M}_s}\left[\tilde{W}_\infty^{r^s}(\Omega_s),C(\Omega_s)\right] = \prod_{j=1}^{s}\tilde{K}_{r_j}\left[(m_j+1)/2\right]^{-r_j},$$

$$R_{\mathfrak{M}_s}\left[\tilde{W}^{r^s}(\Omega_s),C(\Omega_s)\right] = \mathring{R}_{\mathfrak{M}_s}\left[\tilde{W}^{r^s}(\Omega_s),C(\Omega_s)\right] = \prod_{j=1}^{s}K_{r_j}\left[(m_j+1)/2\right]^{-r_j},$$

*где* $[\cdot]$ *- целая часть числа, а* $K_{r_j}$, $\tilde{K}_{r_j}$ *- константы Фавара.*

В третьей главе диссертации, состоящей из восьми параграфов, рассмотрен вопрос оптимального кодирования и восстановления решения краевых задач по информации о граничной функции. Краевая задача Дирихле для бигармонического уравнения формулируется следующим образом: требуется найти бигармоническую в единичном круге $D=\{(x,y):x^2+y^2=\rho^2<1\}$ функцию $u(\rho,t)$ $(0\leq\rho<1,\ 0\leq t\leq2\pi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta^2 u = \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]^2 u(\rho,t) = 0, \tag{5}$$

для которой

$$u(\rho,t)|_{\rho=1} = g(t),\quad \frac{\partial u(\rho,t)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1} = 0. \tag{6}$$

Решение задачи (5)-(6) существует и задаётся формулой

$$u(\rho,t) =: u(g,\rho,t) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}K_\rho(t-u)g(u)du,$$

где ядро $K_\rho(t)$ определяется равенством

$$K_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)^2(1-\rho\cos t)}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)^2} = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+(1-\rho^2)k/2\right]\rho^k\cos kt.$$

Краевая задача Неймана для уравнения Лапласа ставится следующим образом: найти гармоническую в единичном круге $D$ функцию $u_1(\rho,t)$ $(0\leq\rho<1,\ 0\leq t\leq2\pi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u = \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_1(\rho,t) = 0 \tag{7}$$

и двум граничным условиям

$$\frac{\partial u_1}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=1} = \varphi(t),\qquad \int_0^{2\pi}\varphi(t)dt = 0. \tag{8}$$

Решение задачи (7)-(8) определяется с точностью до постоянной и задаётся формулой:

$$u_1(\rho,t) =: u_1(\varphi;\rho,t) = C_1 + \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\Phi_\rho(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad C_1 = \mathrm{const},$$

где $\quad \Phi_\rho(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos kt, \quad 0\leqslant\rho<1.$

Отметим, что для выяснения дифференциальных свойств бигармонических и гармонических в единичном круге функций, с целью приложения к теоремам вложения краевые задачи (5)-(6) и (7)-(8) были исследованы Т.И.Амановым и Я.С.Бугровым.

В диссертации рассмотрен вопрос нахождения точных значений наилучших приближений ядра и решения краевых задач Дирихле и Неймана тригонометрическими полиномами. По заданной информации о граничных функциях находится наилучший линейный метод восстановления решения указанных задач в метрике $L_p$ при $p=1$ и $p=\infty$. Пусть

$$\mathfrak{M}^T_{2n-1} = \left\{T_{n-1}(t): T_{n-1}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt)\right\}$$

Величина $E_n(\varphi)_p = \inf\{\|\varphi-T_{n-1}\|_p: T_{n-1}\in\mathfrak{M}^T_{2n-1}\}$ есть наилучшее приближение функции $\varphi(t)$ множеством $\mathfrak{M}^T_{2n-1}$ в метрике $L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

В ходе изучения вопроса о восстановлении решений указанных краевых задач тригонометрическими полиномами важную роль играет

**Теорема 3.3.I.** *Для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\rho\in(0,1)$ справедливы равенства*

$$E_n(K_\rho)_1 = 4\operatorname{arctg}\rho^n + 2(1-\rho^2)n\rho^n(1+\rho^{2n})^{-1},$$

$$E_n(\Phi_\rho)_1 = \frac{4}{n}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\cdot\frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^2} = 4\cdot\int_0^\rho\frac{\operatorname{arctg}r^n}{r}dr.$$

**Теорема 3.3.2.** *Для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\rho\in(0,1)$ при $p=1$ и $p=\infty$ имеют место соотношения*

$$\sup_{\|g\|_p\leqslant1} E_n\left[u(g,\rho,\cdot)\right]_p = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\rho^n + \frac{4}{\pi}(1-\rho^2)n\rho^n(1+\rho^{2n})^{-1},$$

$$\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant1} E_n\left[u_1(\varphi,\rho,\cdot)\right]_p = \frac{4}{\pi}\cdot\int_0^\rho\frac{\operatorname{arctg}r^n}{r}dr.$$

Аналогичные утверждения в параграфе 3.4 доказаны для наилучших односторонних приближений ядер и решений указанных краевых задач.

В §3.5 рассмотрены вопросы восстановления решения задач (5)-(6) и (7)-(8) тригонометрическими полиномами вида

$$T_{n-1}(u(\varphi;\rho,\cdot),\lambda,t) = \frac{a_o\cdot\lambda_o}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k(a_k\cos kt + b_k\sin kt) \qquad (9)$$

в метрике $L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, когда известны значения первых $2n-1$ коэффициентов Фурье граничной функции $\varphi(t)$: $a_k(\varphi)$ $(k=\overline{0,n-1})$, $b_k(\varphi)$ $(k=\overline{1,n-1})$. Приведём, например, результаты, полученные для задачи Неймана.

**Теорема 3.5.3.** *Для погрешности восстановления решения $u_1(\varphi;\rho,t)$ задачи Неймана (7)-(8) тригонометрическим полиномом (9) в метрике $L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ справедлива оценка*

$$\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1}\inf_{\lambda}\|u_1(\varphi;\rho,\cdot) - T_{n-1}(u_1(\varphi;\rho,\cdot),\lambda)\|_p =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1}\|u_1(\varphi;\rho,\cdot) - T_{n-1}(u_1(\varphi;\rho,\cdot),\mu^o)\|_p \leqslant \frac{4}{\pi}\int_0^\rho\frac{\operatorname{arctg} r^n}{r}dr, \qquad (10)$$

*где вектор $\mu^o = (\mu_o^o,\mu_1^o,\ldots,\mu_{n-1}^o)$ определен равенствами*

$$\mu_o^o = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{\rho^{2sn}}{sn} = \frac{1}{n}\cdot\ln(1+\rho^{2n}),$$

$$\mu_k^o = \frac{1}{k} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s\cdot\left(\frac{\rho^{2sn+k}}{2sn+k} + \frac{\rho^{2sn-k}}{2sn-k}\right) =$$

$$= \frac{1}{k} + \int_0^\rho\frac{r^{2n+k-1}+r^{2n-k-1}}{1+r^{2n}}\,dr \quad (k=\overline{1,n-1}).$$

*Неравенство (10) неулучшаемо при $p=1$ и $p=\infty$.*

Использование тригонометрического полинома (9) позволяет получить также следующее утверждение

**Теорема 3.5.4.** *Справедлива более тонкая оценка*

$$E_n\big[u_1(\varphi;\rho,\cdot)\big]_p \leqslant \left[\frac{4}{\pi}\cdot\int_0^\rho\frac{\operatorname{arctg} r^n}{r}dr\right]\cdot E_n(\varphi)_p. \qquad (11)$$

*Существует функция $\varphi_o\in L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ с нормой $\|\varphi_o\|_p\leqslant 1$, для которой в (11) при $p=1$ и $p=\infty$ имеет место знак равенства.*

В параграфе 3.6 рассматривается вопрос восстановления решения задач Дирихле и Неймана по усреднённым значениям граничных функций.

В параграфе 3.7 рассмотрена задача оптимального кодирования и восстановления значений операторов, общая постановка которой принадлежит Н.П.Корнейчуку. В другой постановке, задачи оптимального восстановления линейных операторов и функционалов рассматривались в работах С.Б.Стечкина, Н.С.Бахвалова, Ю.Н.Субботина, В.В.Арестова, А.Г.Марчука, К.Ю.Осипенко, В.Л.Великина, А.А.Лигуна, А.А.Женсыкбаева, А.И.Гребенникова, В.А.Морозова, С.Б.Вакарчука и других. Задача оптимального кодирования в общей постановке сформулирована в монографии В.М.Тихомирова.

Пусть $X$ и $Y$ -линейные нормированные пространства, $A$ -линейный непрерывный оператор из $X$ в $Y$, $M_N$ -набор заданных на $X^*$ линейных непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$, где $X^*$ -пространство, сопряжённое к $X$. Каждому $x \in X$ сопоставим вектор информации

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_N(x)\}, \tag{12}$$

который можно рассматривать как кодирование элемента $x$ точкой из $\mathbb{R}^N$. Если $\mathfrak{N}$ - некоторое ограниченное множество в $X$, то положим

$$G(\mathfrak{N}, A, M_N)_Y = \sup\{\|Ax - Ay\|_Y : x, y \in \mathfrak{N},\ T(x, M_N) = T(y, M_N)\}.$$

$$\lambda^N(\mathfrak{N}, A, Y) = \inf\{G(\mathfrak{N}, A, M_N)_Y : M_N \subset X^*\}.$$

Если $\mathfrak{N}$ - выпуклое центрально-симметричное множество в $X$, то

$$G(\mathfrak{N}, A, M_N)_Y = 2 \cdot \sup\{\|Ax\|_Y : x \in \mathfrak{N},\ T(x, M_N) = 0\}. \tag{13}$$

Пусть $A = A_K$ -оператор свёртки с $2\pi$-периодическим ядром $K(t)$.

Полагаем $f = A_K\varphi = K * \varphi$, если

$$f(t) =: A_K\varphi(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} K(t-\tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau. \tag{14}$$

Как правило, априорная информация о функции $\varphi(t)$ задаётся классом

$$\mathcal{M}_p(K_1) = \{\varphi : \varphi = K_1 * \phi,\ \|\phi\|_p \leq 1\},$$

где $K_1$ - некоторое другое ядро. Очевидно, что $\mathcal{M}_p(K_1)$- выпуклое центрально-симметричное множество. Пусть вектор информации (12) имеет вид

$$T(\varphi, M^F_{2n-1}) = \{a_0(\varphi), a_1(\varphi), \dots, a_{n-1}(\varphi), b_1(\varphi), \dots, b_{n-1}(\varphi)\}.$$

Тогда согласно (13)

$$G\left[\mathcal{M}_p(K_1), A_K, \mathbb{M}^T_{2n-1}\right]_p = \frac{2}{\pi}\sup\left\{\left\|\int_0^{2\pi} K(\cdot-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\|_p : \varphi\in\mathcal{M}_p(K_1),\ \varphi \perp \mathfrak{M}^T_{2n-1}\right\}.$$

Если $K_1(t) = B_r(t)$ – многочлен Бернулли, то, как известно,

$$\mathcal{M}_p(K_1) = \mathcal{M}_p(B_r) = W^r_p \ (r=1,2,\ldots,\ 1\leqslant p\leqslant\infty).$$

В случае $K=K_\rho$ и $K=\Phi_\rho$ справедлива следующая

Теорема 3.7.1. *Для всех $r=1,2,\ldots$; $\rho\in[0,1)$ при $p=1$ и $p=\infty$ справедливы неравенства*

$$\lambda^{2n-1}\left[W^r_p,\ A_{K_\rho},\ L_p\right] \leqslant G\left[W^r_p,\ A_{K_\rho},\ \mathbb{M}^T_{2n-1}\right]_p =$$

$$= \frac{8}{\pi^2\cdot n^r}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+1}} + \frac{4}{\pi^2 n^{r-1}}(1-\rho^2)\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^r},$$

$$\lambda^{2n-1}\left[W^r_p, A_{\Phi_\rho}, L_p\right] \leqslant G\left[W^r_p, A_{\Phi_\rho}, \mathbb{M}^T_{2n-1}\right]_p = \frac{8}{\pi^2 n^{r+1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{(2\nu+1)^{r+2}}.$$

В этом же параграфе рассматривается интерполяционный метод $\mathbb{M}^I_{2n}$ восстановления в метрике $L_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ свёртки (14), где $K(t)$ есть любое из ядер $K_\rho(t)$ или $\Phi_\rho(t)$ по информации

$$T(\varphi, \mathbb{M}^I_{2n}) = \left\{\varphi(k\pi/n + \alpha)\right\}_{k=1}^{2n}, \quad \varphi\in W^r_p.$$

Теорема 3.7.2. *Для всех $r=1,2,\ldots$, $\rho\in[0,1)$, и $1\leqslant p\leqslant\infty$ справедливы неравенства*

$$\lambda^{2n}\left[W^r_\infty,\ A_{K_\rho},\ L_p\right] \leqslant G\left[W^r_\infty,\ A_{K_\rho},\ \mathbb{M}^I_{2n}\right]_p \leqslant 2\cdot\|\varphi_{n,r}\|_p,$$

$$\lambda^{2n}\left[W^r_\infty,\ A_{\Phi_\rho},\ L_p\right] \leqslant G\left[W^r_\infty,\ A_{\Phi_\rho},\ \mathbb{M}^I_{2n}\right]_p \leqslant 4\cdot\ln\frac{1}{1-\rho}\cdot\|\varphi_{n,r}\|_p,$$

*где $\varphi_{n,r}(t)$ – идеальный сплайн Эйлера.*

*При $r=1$ и $p=\infty$ справедливы более точные результаты:*

$$\lambda^{2n}\left[W^1_\infty,\ A_{K_\rho},\ C\right] \leqslant G\left[W^1_\infty,\ A_{K_\rho},\ \mathbb{M}^I_{2n}\right]_C =$$

$$= \frac{\pi}{2n} + \frac{2}{\pi}\cdot(1-\rho^2)\cdot\ln\frac{1+\rho^{2n}}{1-\rho^{2n}} + \frac{4}{\pi}\cdot\int_0^\rho \frac{1}{r}\cdot\ln\frac{1+r^{2n}}{1-r^{2n}}dr,$$

$$\lambda^{2n}\left[W^1_\infty,\ A_{\Phi_\rho},\ C\right] \leq G\left[W^1_\infty,\ A_{\Phi_\rho},\ W^I_{2n}\right]_C = \frac{2}{\pi n^2}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{(2\nu+1)2n}}{(2\nu+1)^3}.$$

В последнем параграфе 3.8 главы 3 результаты о приближении функций билинейными сплайнами из главы 1 используются при восстановлении решения краевой задачи Дирихле для шара. При этом доказывается, что погрешность восстановления решения указанной задачи совпадает с погрешностью приближения билинейными сплайнами.

Четвёртая глава диссертации посвящена экстремальным задачам теории квадратур. Пусть $\mathfrak{M}$ - некоторый класс функций $f(t)$, определённых на отрезке $[a,b]$; $q(t)$ - положительная суммируемая на $[a,b]$ функция, удовлетворяющая условиям: 1) $q(t)$ непрерывна на интервале $(a,b)$; 2) $q(t)$ монотонна в окрестностях точек $a$ и $b$, если она там неограниченна. Набор узлов $T=\left\{t_k\right\}_{k=1}^{n}$; $a\leq t_1<t_2<\ldots<t_n\leq b$ и коэффициентов $P=\left\{p_k\right\}_{k=1}^{n}$ определяет квадратурную формулу

$$\int_a^b q(t)\cdot f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k\cdot f(t_k) + R_n(f;q;T,P), \tag{15}$$

Величина

$$R_n(\mathfrak{M};q;T,P) = \sup\left\{\left|R_n(f;q,T,P)\right| : f\in\mathfrak{M}\right\} \tag{16}$$

определяет наибольшую погрешность квадратурной формулы (15) на функциях класса $\mathfrak{M}$. Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q) = \inf_{(T,P)} R_n(\mathfrak{M};q;T,P), \tag{17}$$

а также указать векторы узлов и коэффициентов

$$T^* = \left\{t^*_k\right\}_{k=1}^{n},\qquad P^* = \left\{p^*_k\right\}_{k=1}^{n},$$

для которых в (17) достигается точная нижняя грань, то есть

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q) = R_n(\mathfrak{M};q;T^*,P^*).$$

Постановка этой задачи и первые основополагающие результаты принадлежат С.М.Никольскому. Задача (17) в случае $q(t)\equiv 1$ для различных классов функций исследовалась многими авторами. Наиболее существенные результаты принадлежат Н.П.Корнейчуку, Н.Е.Лушпаю, В.П.Моторному, А.А.Женсыкбаеву, А.А.Лигуну, Б.Д.Боянову, В.Ф.Бабенко, К.И.Осколкову и многим другим. Результаты этих и других исследований приведены Н.П.

Корнейчуком в дополнении к книге С.М.Никольского. Тем не менее, существует ещё много классов функций и определённых интегралов, для которых задача (17) не решена. К их числу относится, например, задача о нахождении оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью следующего вида:

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^s}dt \quad (0<s\leq 1) \tag{18}$$

на классах $W^{(r)}L_p =: W^{(r)}L_p(1;0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Для интеграла (18), желая указать зависимость квадратурной формулы (15) и погрешность (17) от параметра $s$ $(0<s\leq 1)$, запишем их в виде

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^s}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot f(t_k) + R_n^{(s)}(f), \tag{19}$$

$$\mathcal{E}_n^{(s)}(\mathfrak{M};q) = \inf_{(T,P)} R_n^{(s)}(\mathfrak{M};T,P)$$

Пусть $H^1 =: H^1(1;0,1)$ – класс функций, удовлетворяющих на отрезке $[0,1]$ условию $|f'(t)-f(t'')| \leq |t'-t''|$, $t',t'' \in [0,1]$. Ясно, что $W_\infty^1 = H^1$. В следующей теореме для интеграла (19) при $s=1$ на классе $H^1$ найдена оптимальная квадратурная формула с фиксированными узлами на концах отрезка интегрирования (квадратурная формула типа Маркова).

Теорема 4.2.I. *Пусть $s=1$. Тогда среди квадратурных формул типа Маркова оптимальной для класса $H$ является формула*

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t}dt = \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot \ln\frac{k+1}{k} \cdot f\left[\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right] + \ln\frac{n+1}{n} \cdot f(1) + R_n^{(1)}(f),$$

*погрешность которой равна*

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(H^1) = \mathcal{E}_n^{(1)}(W^1L_\infty) = \ln(1+\tfrac{1}{n}).$$

Для произвольной положительной весовой функции $q(t)$ и $\mathfrak{M} = W_1^{(1)}$ доказано следующее общее утверждение.

Теорема 4.3.I. *Среди всех квадратурных формул вида (15) наилучшей для класса $W^{(1)}L(1;0,1)$ является формула*

$$\int_0^1 q(t)f(t)dt = \frac{1}{n} \cdot F(0) \cdot \sum_{k=1}^{n} f(t_k) + R_n(f;q),$$

*где узлы* $t_k$ *определяются из системы*

$$F(t_k) = \frac{2n-2k+1}{2n}\cdot F(0), \quad (k=\overline{1,n}); \quad F(t) = \int_t^1 q(u)du.$$

*При этом,* $\mathcal{E}_n\left[W^{(1)}L;q\right] = \frac{F(0)}{2n} = \frac{1}{2n}\cdot\int_0^1 q(t)dt.$

**Теорема 4.3.2.** *Среди квадратурных формул вида (19) при* $q(t)=t^{-s}$, $0\leqslant s<1$, *наилучшей на классе* $W^{(1)}L$ *является квадратурная формула*

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t^s}dt = \frac{1}{(1-s)n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left[\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{1-s}}\right] + R_n^{(s)}(f),$$

*погрешность которой равна* $\mathcal{E}_n^{(s)}\left[W^{(1)}L\right] = \frac{1}{2(1-s)n}$.

Аналогичные утверждения доказываются и для весовых функций $q(t)=(1-t^2)^{-1/2}$, $q(t)=[t(1-t)]^{-s}$, $0\leqslant s<1$, и результаты всех одномерных теорем соответствующим образом обобщаются на двумерный случай.

В параграфе 4.5 рассматривается вопрос оптимизации квадратурных формул для регулярных интегралов на классах функций, задаваемых модулями гладкости. Пусть $\omega_2(\delta)$ – заданная положительная функция, удовлетворяющая условиям:

$$\omega_2(0) = 0, \quad 0 \leqslant \omega_2(\delta_1) \leqslant \omega_2(\delta_2), \quad 0\leqslant\delta_1\leqslant\delta_2 \; ; \tag{20}$$

$$0 \leqslant \omega_2(\delta_2) - \omega_2(\delta_1) \leqslant \omega_2(\delta_2-\delta_1), \quad 0\leqslant\delta_1\leqslant\delta_2 \; ; \tag{21}$$

$$\left|\omega_2(\delta_1) + \omega_2(\delta_2) - 2\cdot\omega_2\left[\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right]\right| \leqslant 2\cdot\omega_2\left[\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\right]. \tag{22}$$

Будем говорить, что функция $f(t)\in H^{\omega_2}[a,b]$, если её модуль гладкости $\omega_2(\delta,f) = \sup\limits_{|h|\leqslant\delta}\left\|f(t+h) - 2\cdot f(t) + f(t-h)\right\|_{C[a,b]}$ удовлетворяет условию $\omega_2(\delta,f) \leqslant \omega_2(\delta)$, где $\omega_2(\delta)$– заданный модуль гладкости, удовлетворяющий условиям (20)-(22). Соответствующий класс $2\pi$-периодических функций обозначим $\tilde{H}^{\omega_2}$. Заметим, что если $\omega_2(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant1$, то класс $H^{\omega_2}$ совпадает с классом Зигмунда $Z^{\alpha} = Z^{\alpha}[a,b]$, $0<\alpha\leqslant1$.

В квадратурной формуле (15) полагаем $q(t)\equiv1$ и при вычислении величины (17) в качестве $\mathfrak{M}$ берём $H^{\omega_2}$ и $\tilde{H}^{\omega_2}$.

**Теорема 4.5.I.** *При $q(t)\equiv 1$ среди всех квадратурных формул вида (I5), для которых выполнены условия*

$$t_k = a + \sum_{i=1}^{k} p_i - p_k/2, \quad (k=\overline{1,n}), \qquad \sum_{k=1}^{n} p_k = b - a,$$

*наилучшей для класса $H^{\omega_2}$ является формула прямоугольника*

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left[a + \frac{b-a}{n}\cdot(2k-1)\right] + R_n(f).$$

*При этом*

$$\mathcal{E}_n\left[H^{\omega_2}\right] = n\cdot\int_0^{(b-a)/2n} \omega_2(t)dt = \int_0^{(b-a)/2} \omega_2(t/n)dt.$$

**Теорема 4.5.2.** *При $q(t)\equiv 1$ среди всех квадратурных формул вида (I5), для которых выполнены условия*

$$t_1 = 0, \; t_n = 2\pi, \; t_k = \sum_{i=1}^{k} p_i - p_k/2, \; (k=\overline{1,n}), \; p_1 = p_n, \; \sum_{k=1}^{n} p_k = 2\pi,$$

*наилучшей для класса $\tilde{H}^{\omega_2}$ является формула трапеций*

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{2\pi}{n-1}\cdot\left( \frac{f(0)+f(2\pi)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f\left[\frac{2\pi(k-1)}{n-1}\right] \right) + R_n(f).$$

*При этом* $\mathcal{E}_n\left[\tilde{H}^{\omega_2}\right] = \int_0^{\pi} \omega_2(\frac{t}{n-1})dt.$

Из теорем 4.5.1, 4.5.2 в качестве следствия при $\omega_2(t)=t^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$, получаем результаты работы М.В.Аксеня для класса $Z^{\alpha}$.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Найдены точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их частных производных билинейными интерполяционными сплайнами и их соответствующими производными на классах функций, задаваемых модулями непрерывности.

2. Найдены точные значения квазипоперечников для некоторых функциональных классов и разработан метод оптимизации кубатурных формул для многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта, основанный на теории квазипоперечников и аналогичных идеях конструктивной теории функций.

3. Решена задача восстановления решения краевых задач Дирихле и Неймана с помощью тригонометрических полиномов в метрике $L_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ и найден наилучший линейный метод восстановления решения указанных краевых задач в метрике $L_p$ при $p=1$ и $p=\infty$.

4. Решена задача оптимального кодирования и восстановления значений операторов решений краевых задач по дискретной информации о граничных функциях.

5. Решена задача о нахождении наилучших квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью на классах функций малой гладкости и для регулярных интегралов на классах функций, задаваемых модулями гладкости.

Основные положения диссертация опубликованы

в следующих работах:

1. Шабозов М.Ш. Об оценках погрешности квадратурных формул для некоторых классов функций// Укр.мат.журн.- 1991.- 43, №12.- С.1712-1716.

2. Шабозов М.Ш. Оценки погрешности кубатурных формул с весом для одного класса функций двух переменных//Докл. АН Тадж.ССР.- 1991.- №4.-С.221-225.

3. Шабозов М.Ш. О точности оценки погрешности квадратурных формул для некоторых классов функций// Докл. АН Респ.Таджикистан - 1994.- №2.- С.10-13.

4. Шабозов М.Ш. К вопросу о приближении функций билинейными сплайнами// Докл. АН Респ.Таджикистан - 1994.- №4.- С.216-220.

5. Шабозов М.Ш. О погрешности интерполяции билинейными сплайнами // Укр.мат.журн.- 1994.- 46, №11.- С.1554-1560.

6. Шабозов М.Ш. К вопросу интерполяции билинейными сплайнами// Доп. НАН Украïни. Сер.мат.тех.науки.- 1995.- №6.- С.30-32.

7. Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью// Укр.мат.журн.- 1995.- 47, №9.- С.1300-1305.

8. Шабозов М.Ш. Наилучшее и наилучшее одностороннее приближения ядра бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов// Укр.мат.журн.- 1995.-47, №11.-С.1549-1557.

9. Шабозов М.Ш. Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами// Мат.заметки.- 1996.- 59, вып.1.- С.142-152.

10. Шабозов М.Ш.,Вакарчук С.Б. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов// Укр.мат.журн.-1996.-48, №3. - С.301-308.

11. Шабозов М.Ш.,Вакарчук С.Б.Квазипоперечники и оптимизация методов смешанной аппроксимации многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта// Укр.мат.журн.- 1996.- 48, №6.- С.753-770.

12. Шабозов М.Ш. Асимптотическая оценка остатка при приближении дифференцируемых периодических функций двух переменных обобщёнными суммами Фурье// Доп. НАН України. Сер.мат.тех.науки.- 1996.-№6. - С.28-31.

13. Шабозов М.Ш. Об оптимальном восстановлении и кодировании некоторых конкретных линейных операторов решений краевых задач// Доп. НАН України. Сер.мат.тех.науки.-1996.-№9.-С.22-27.

14. Shabozov M.Sh. On recovery solution of boundary problem of Neyman// East Journal on Approximations.-1996.-2,№3.-P.369-379.

Шабозов М.Ш. "Приближение функций двух переменных и задачи восстановления значений операторов и функционалов". Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01.-математический анализ. ИМ НАН Украины, Киев, 1996.

Диссертация посвящена исследованию некоторых конкретных экстремальных задач, связанных с приближением функций двух переменных, восстановлением значений линейных операторов, определяющих решение краевых задач и оптимизацией приближённого интегрирования. Найдены точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных интерполяционными билинейными сплайнами на классах функций, задаваемых модулями непрерывности. Вычислены точные значения квазипоперечников некоторых функциональных классов. Решена задача восстановления решения краевых задач с помощью тригонометрических полиномов в метрике $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и указаны наилучшие методы восстановления при $p=1$ и $p=\infty$. Найдены оптимальные квадратурные формулы для сингулярных и регулярных интегралов на некоторых классах функций.

Shabozov M.Sh. "Approximation of functions of two vaiables and problem recovery of the values of operators and functionals". Thesis for a doctor of Physical and Mathematical sciences on speciality 01.01.01 - mathematical analysis. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

This thesis is devoted to the investigation of some concrete extremal problems connected with approximation of the functions of two variables, with recovery of the values of linear operators defining the solutions of boundary-value problems and with optimization of approximate integration for classes functions having small smoothness. For classes of functions defined by modulus of continuity the exact estimates of simultaneous approximation of functions of two variables and the its derivatives by bilinear interpolating splines are found. The exact values of quasiwidthes for some classes of functions are calculate. The problem of recovery of solutions of boundary-values problems by trigonometric polynomials is solved in $L_p$ and the best methods of recovery for $p=1$ and $p=\infty$ are indicated. For the some classes of functions the optimal quadrature formulas for singular and regular integrals are found.

Ключевые слова: билинейный сплайн, квазипоперечник, квадратурная формула, сингулярный интеграл.

Подп. в печ. 03.12.96. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать. Усл. печ. л. 1,39. Усл. кр.-отт. 1,39. Уч.-изд. л. 1,2. Тираж 100 экз. Зак. 233. Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики НАН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3