Інститут педагогіки і психології професійної освіти
Академії педагогічних наук України

На правах рукопису

ШУНДА НИКИФОР МИКОЛАЙОВИЧ

ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ ПРО ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

13.00.04 - професійна педагогіка

13.00.02 - методика навчання (спеціальних дисциплін)

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора педагогічних наук

Київ - 1996

378
378.8
377

Нв. 36. 483

Дисертаці[...]
Робота виконана у [...]
педагог[...]

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00760631 (N)

Офіційні опоненти: доктор педагогічних наук, професор, дійсний член Академії педагогічних наук України
Гончаренко С.У.

доктор педагогічних наук, професор
Бурда М.І.

доктор педагогічних наук, професор
Слєпкань З.І.

Провідна установа - Харківський державний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди

Захист відбудеться "15" січня 1997 р. о 14 год. на засаданні спеціалізованої вченої ради Д 01.61.01 в Інституті педагогіки і психології професійної освіти АПН України за адресою: 254060, м.Київ, вул.М.Берлинського, 9, зал засідань.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту педагогіки і психології професійної освіти АПН України (254060, м.Київ, вул. М.Берлинського, 9)

Авторефератрозісланий "14" грудня 1996 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.М.Цибульська

1. Загальна характеристика дослідження

Актуальність та ступінь досліджуваності проблеми

Світовий досвід реформування освіти свідчить, що головним у цьому процесі є оновлення змісту освіти. Сьогодні в його основі лежать світоглядні позиції людини, яка реалізовуватиме свій творчий потенціал в XXI столітті.

Перебудова української школи, започаткована Державною національною програмою "Освіта" ("Україна XXI століття") і підтверджена Законом України "Про освіту", передбачає значні завдання у цьому напрямку, зокрема щодо розробки та впровадження нової концепції математичної освіти, навчальних програм і підручників з математики. Це стосується не тільки загальноосвітньої або професійно-технічної школи, вищих навчальних закладів І-ІІ рівня акредитації, але й вищої школи ІІІ-ІV рівня акредитації, зокрема вищої педагогічної школи, де готують викладачів математики. Щоб цей процес не набув самочинного плину, щоб запровадження нового змісту математичної підготовки у різних навчальних закладах не мало суб'єктивно - інтуїтивного характеру, потрібні комплексні міжгалузеві психолого-педагогічні і методичні дослідження щодо визначення нового змісту освіти у школі і прогресивної підготовки учителя математики.

Вони повинні враховувати соціально-культурні тенденції розвитку суспільства на сучасному етапі, зокрема підвищення гуманітарного потенціалу людини в її спілкуванні з оточуючим середовищем, зростання технологічності виробництва на основі інформаційних технологій, глобальність екологічного мислення та ін.

У Законі України "Про освіту" зазначається, що педагогічною діяльністю можуть займатися особи з високими моральними якостями, які мають відповідну освіту, професійно-педагогічну підготовку, широку ерудицію, інтелігентність.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Тому на сучасному етапі розвитку суспільства одним із вагомих завдань освіти є удосконалення професійної підготовки учительських кадрів, а дослідження різноманітних теоретико-методологічних проблем змісту професійної підготовки вчителя математики є сьогодні досить актуальним.

Серед численних проблем змісту професійно-педагогічної підготовки вчителя математики чільне місце посідає проблема оновлення змісту освіти. Від належного розв'язання завдання "чому навчати?" насамперед залежить рівень підготовки вчителя. Проблема змісту освіти надзвичайно складна. З одного боку, необхідно, щоб навчальні програми, підручники і навчальні посібники на певний тривалий час зберегли певну стабільність, а з іншого - стрімкий розвиток науки і техніки, бурхливі процеси у суспільному житті вимагають їх постійного оновлення і вдосконалення. Зміни часткового характеру вносять при перевиданні програм і навчальної літератури.

Нині настав час, коли необхідні глибокі зміни. Це стосується навчальних планів і програм, а також підручників і навчальних посібників.

Для сучасного науково-технічного прогресу характерне значне підвищення ролі теоретичних знань, що дозволяє науці глибоко проникнути у пізнання явищ та процесів навколишнього світу. Тому одним з головних завдань сучасної педагогічної науки є пошуки шляхів підвищення теоретичного рівня вивчення фундаментальних та прикладних наук. В цьому плані орієнтація навчального процесу на підсилення пізнавальної активності студентів, на їх загальний розвиток має принципово важливе значення.

Сучасна вища педагогічна школа має загальновизнані здобутки в плані підготовки висококваліфікованих спеціалістів як щодо здійснення навчально-виховних функцій в цілому, так і з математичної підготовки зокрема.

Виділимо дослідження, в яких глибоко і всебічно висвітлені досвід і проблеми професійної підготовки майбутніх педагогів (О.О.Абдуліна, А.М.Алексюк, Ю.К.Бабанський, В.П.Беспалько, С.У.Гончаренко, В.А.Кан-

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Калік, Л.Г.Коваль, В.А.Козаков, В.В.Краєвський, Н.В.Кузьміна, М.Д.Нікандров, Н.Г.Ничкало, М.М.Скаткін, М.І.Шкіль, М.Д.Ярмаченко та ін.).

Питанням підготовки студентів до творчої педагогічної праці присвячені роботи В.І.Андреєва, Д.В.Вількеєва, В.І.Загв'язинського, І.А.Зязюна, Б.І.Коротяєва, Ю.М.Кулюткіна, В.Ф.Паламарчук, Г.О.Петрової, Л.І.Рувінського, Л.Ф.Спіріна, З.П.Шабаліної та ін.

Окремо слід відзначити роботи відомих вчених в галузі методики навчання математики, більшість з яких присвячена питанням удосконалення змісту і методики математики у навчальних закладах середньої ланки освіти (Г.П.Бевз, Н.Я.Віленкін, О.С.Дубінчук, В.А.Крутецький, Л.Д.Кудрявцев, З.І.Слепкань, А.А.Столяр, І.Ф.Тесленко, О.П.Фрідман та ін.).

Водночас, незважаючи на досить широкий спектр і вагомі результати досліджень у галузі шкільного курсу математики, а також деякі спроби пошуків у напрямку фахової підготовки студентів математичних відділень фізико-математичних факультетів до роботи в середніх навчально-виховних закладах, поза увагою дослідників залишились важливі питання теоретико-методологічних основ професійної підготовки саме майбутніх вчителів.

Насамперед це стосується проблеми формування знань студентів про елементарні функції. Наявність таких знань у майбутніх учителів математики важко переоцінити, бо їх глибоке, грунтовне знання дає можливість широко використовувати їх при вивченні інших питань математики та розв'язуванні прикладних задач з різних галузей науки. А введення одних і тих же функцій різними способами розвиває у студентів пошукову, пізнавальну діяльність.

Таким чином, актуальність теми нашого дослідження зумовлена як об'єктивними потребами суспільства нашої держави у підготовці кваліфікованих, професійно грамотних учителів математики в нинішніх умовах роботи вищої педагогічної школи, так і відсутністю концептуальних обгрунтувань в педагогічній науці цілісної системної науково-методичної підготовки майбутніх учителів математики. Це і зумовило вибір теми нашого дисертаційного дослідження.

Подана до захисту дисертація "Формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики" продовжує ті дидактичні і методичні дослідження, автори яких намагалися дати психолого-педагогічне і методичне обґрунтування змісту професійної освіти і, зокрема, змісту математичної освіти відповідно до вимог нового етапу розвитку суспільства.

Разом з тим вона пропонує власний підхід до професійної підготовки, що базується на критеріях і вимогах кваліфікаційної характеристики і сучасних уявлень про ідеї та зміст професійної підготовки учителя математики. Дисертація є підсумком більш як тридцятирічної, безпосередньо пов'язаної з темою нашого дослідження праці автора як викладача математики педінституту. Результати нашого пошуку знайшли відображення в опублікованих підручниках, навчальних і методичних посібниках, статтях і тезах наукових доповідей загальним обсягом 141 друкований аркуш.

<u>Об'єктом дослідження</u> є процес фахової, професійної підготовки майбутніх учителів математики у системі вищої педагогічної освіти.

<u>Предмет дослідження</u> - формування знань про елементарні функції у студентів математичних відділень фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів III-IV рівня акредитації.

<u>Мета дослідження</u> - науково-теоретичне обґрунтування ролі, місця, значення, сутності, історичної еволюції, закономірностей та особливостей процесу формування знань про елементарні функції у студентів, вироблення наукових технологічних основ викладання спеціальних дисциплін майбутнім учителям математики. У дослідженні ми виходили з <u>гіпотези</u> про те, що ефективність процесу професійної підготовки у педвузі значно підвищиться, якщо знання про елементарні функції будуть необхідною суттєвою складовою математичної освіти вчителя математики. Це передбачає:

1. Нову модифікацію змісту математичної освіти у педвузі, яка забезпечує єдність таких компонентів: знання про елементарні функції; вміння та навички досліджувати їх властивості, будувати графіки; досвід самостійної творчої діяльності, що орієнтує не тільки на засвоєння знань, формування умінь та навичок, але й на способи пізнавальної творчої діяльності, досвід емоційно-ціннісних ставлень до процесу засвоєння знань, умінь та навичок; результати пізнавальної діяльності, що створює умови для самореалізації, самоствердження особистості.

2. Організацію навчального процесу, яка забезпечує органічну інтеграцію знань про елементарні функції з різних розділів математичних курсів, а також відомості з педагогіки і методики навчання спеціальних дисциплін в навчальному процесі математичних відділень педвузів.

3. Науково-методичне забезпечення процесу професійної підготовки вчителя математики (навчальні програми, підручники, навчальні посібники, спецкурси, практикуми з розв'язання задач, методичні рекомендації тощо) як цілісної системи, у якій гармонійно поєднані цілі, завдання, зміст, форми, методи навчання та виховання майбутніх вчителів математики, зокрема в галузі знань про елементарні функції.

4. Наявність сучасної педагогічної технології формування у студентів знань про елементарні функції, яка органічно поєднує сучасні методи викладання і методичні прийоми, засоби навчання, форми організації навчального процесу, які забезпечують творче свідоме ставлення студентів до процесу засвоєння навчального матеріалу.

Відповідно до предмета, мети та гіпотези нашого дослідження були визначені такі його завдання:

1. Вивчити сучасний стан професійно-педагогічної підготовки учителя математики в педвузах і університетах.

2. Проаналізувати відомі підходи щодо формування у студентів знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики.

3. Обґрунтувати концепцію формування знань про елементарні функції у майбутніх вчителів математики.

4. Розробити систему методичного забезпечення процесу формування знань студентів про елементарні функції.

5. Створити методичні рекомендації щодо використання розроблених підручників та посібників студентами та викладачами в навчальному процесі.

Методологічна основа дослідження базується на провідних положеннях теорії пізнання про роль практики в пізнанні та перетворенні дійсності: про взаємозв'язок теоретичної і практичної діяльності; про діалектичний зв'язок об'єктивних і суб'єктивних факторів формування та розвитку особистості; про активність суб'єкта в процесі навчальної діяльності.

Теоретичну основу дослідження склали положення та висновки сучасних міждисциплінарних досліджень, що поєднує філософські, психолого-педагогічні, соціальні, методичні доробки, оскільки професійна педагогічна діяльність суб'єкта є багатогранним об'єктом аналізу, що відображає існуючий широкий спектр прояву її специфічних особливостей.

Крім цього, ми опиралися на методологію сучасної педагогіки, в якій обґрунтовано розвиток принципів і цілісності, комплексності, наступності, інтеграції, а також особистісно-діяльнісний і системно-цілісний підходи як інструментарій дослідження і оцінки педагогічної діяльності.

Для розв'язання поставлених завдань і перевірки гіпотези нами застосовувалися теоретичні та емпіричні методи науково-педагогічного дослідження, які використовувалися в суспільних науках. Серед них: теоретичні (аналіз, синтез, моделювання, порівняння, систематизація, узагальнення науково-теоретичних та дослідних даних), емпіричні (анкетування, інтерв'ю, контрольні тести, спостереження, самоспостереження, обговорення, експертні оцінювання-рейтинги, діагностичний та педагогічний експеримент, методи математичної статистики, комп'ютерна обробка даних експериментів).

Експериментальною базою дослідження є Вінницький державний педагогічний інститут. Поряд з цим вивчався досвід науково-методичної та викладацької роботи фізико-математичних факультетів Українського державного педагогічного університету ім. М. Драгоманова, Житомирського, Кам'янець-Подільського, Полтавського, Тернопільського педінститутів, Харківського педагогічного університету, Волинського державного університету (Україна), Санкт-Петербурзького ім. 0.Герцена, Костромського та Калузького педінститутів (Росія), Келецької Вищої школи педагогічної (Польща) та ін.

В експериментальному дослідженні брали участь понад 1800 студентів і викладачів математичних кафедр педагогічних вузів України.

Дослідження проводилося протягом 1970-1995 років і охоплювало кілька етапів наукового педагогічного пошуку.

Перший етап (1970-1980 р.р.) - аналітико-констатуючий. Вивчення стану досліджуваної проблеми в теорії і на практиці: моделювання процесу дослідження: вивчення філософської, соціальної, психолого-педагогічної і методичної літератури, обгрунтування проблеми дослідження; вивчення педагогічного досвіду стану підготовки учителя математики в педвузі, конструювання цілеспрямованих задач і завдань.

Другий етап (1980 - 1985 рр.) - аналітико-пошуковий. Детальна обробка обраної для дослідження проблеми, визначення мети, завдань, предмета, гіпотези, категоріального апарату дослідження, вивчення провідних чинників процесу професійної підготовки вчителя математики, на основі чого проектувався і складався "робочий" образ явища, що досліджувалося. Це дало нам можливість здійснити порівняльний аналіз професійної підготовки вчителя математики за різними напрямками та методиками і виявити найбільш ефективні шляхи поліпшення цього процесу.

Третій етап (1985 - 1990 рр.) - формуючий експеримент, мета якого полягала у розробці цілісної дидактичної системи формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики в педвузі на основі використання сучасних підходів до технології навчання.

Четвертий етап (1990 - 1995 рр.) - завершально-узагальнюючий. Розв'язання досліджуваної проблеми в теоретичному і практичному планах, підбиття підсумків роботи, узагальнення отриманих даних, осмислення концептуальних положень дослідження.

Проводилася апробація основних висновків дослідження та впровадження їх у процесі професійної підготовки вчителя математики у вищих педагогічних навчальних закладах України.

Наукова новизна дослідження полягає в обгрунтуванні наукової концепції формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики; у визначенні змісту, структури, умов та закономірностей створення навчальної літератури для забезпечення процесу підготовки вчителя; в створенні та обгрунтуванні структурно-функціональної моделі спецкурсів і спецпрактикумів для підготовки вчителя математики до роботи в школі; у формуванні наукових засад підготовки кадрів у системі вищої педагогічної освіти.

Теоретичне значення дослідження полягає в науковому осмисленні основних можливостей застосування властивостей елементарних функцій до вивчення інших питань математики, виявленні концептуальних завдань математичної освіти у педвузах на підставі аналізу тенденцій розвитку освітніх систем в країнах СНД та в Україні; в з'ясуванні сутності навчального пізнання студентів на різних рівнях засвоєння знань про елементарні функції і створенні методичної системи для забезпечення цього процесу, у визначенні теоретичних і методичних основ і базового понятійно-термінологічного апарату певних розділів математичної освіти майбутніх вчителів математики.

Практичне значення дослідження полягає в розробці програми, змісту і методики формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики, що апробовано в педагогічному процесі вищого навчального закладу; у визначенні місця освітнього цензу певної дисципліни у системі професійної підготовки вчителя; в обгрунтуванні умов функціонального апарату в підготовці фахівця у педвузі; у розробці системи навчальних посібників з математичних дисциплін, що забезпечують професійну підготовку вчителя математики.

Результати нашого дослідження можуть бути використані при складанні нових програм, підручників та навчальних посібників з математичних дисциплін, а також у процесі викладання та вивчення вузівських курсів з математики, її методики, проведенні науково-педагогічних досліджень.

Вірогідність отриманих результатів та її обгрунтування підтверджується адекватністю обраних методів науково-педагогічного дослідження меті і завданням дослідження, широкою апробацією основних положень нашої роботи в педагогічному експерименті та практиці викладання математичних дисциплін у навчальному процесі, практичною реалізацією наших підручників і посібників в навчанні майбутніх вчителів математики в педвузах, тривалістю експериментальної роботи, можливістю відтворення експериментів і зіставлення результатів з масовим педагогічним досвідом, з науковими даними.

На захист виносяться:

- концептуальні основи формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики в педагогічних навчальних закладах;

- система науково-методичного забезпечення процесу математичної освіти: підручники, навчальні посібники, методичні розробки та рекомендації;

- сучасна педагогічна технологія оволодіння майбутніми вчителями продуктивними методами розв'язування математичних задач і завдань.

Апробація і впровадження результатів дослідження здійснювалися шляхом публікацій науково-методичних та педагогічних праць дисертанта, виступів з доповідями і науковими повідомленнями на науково-практичних конференціях різного рівня, семінарах.

В опублікованих роботах автора викладені основні концептуальні підходи до формування знань про елементарні функції у професійно-педагогічній підготовці вчителя математики, якими користуються викладачі вищих педагогічних навчальних закладів, студенти математичних відділень, слухачі курсів підвищення кваліфікації інститутів післядипломної освіти.

Особиста участь здобувача в одержанні наукових результатів адекватно відображена в багаточисленних публікаціях: "Практикум розв'язування задач з математики", який виданий у 1975 р. видавництвом "Вища школа" з грифом Міністерства освіти України як посібник для педвузів і перевиданий із змінами і доповненнями у 1978, 1989 рр. Автором написано §§ 3, 6, 8 (розділ I), розділ II (повністю), стор. 318, 319, 336-339, 349-372. Крім теоретичного матеріалу, тут вміщено 680 тематичних змістовних задач і вправ, сконструйованих дисертантом і спрямованих на професійну підготовку вчителя математики. До складних і нестандартних задач дані короткі вказівки.

Дисертантом одноосібно написаний посібник "Функції та їх графіки", який вийшов у видавництві "Радянська школа" у 1976 і 1983 рр. обсягом відповідно 10 і 12 д.а. В ньому глибоко і широко розкриваються властивості елементарних функцій і показано їх застосування до побудови графіків, до розв'язування рівнянь і нерівностей. Посібник містить 1480 вправ і задач, переважна частина яких складена автором. Вони покликані допомогти вчителям і студентам оволодіти функціональним апаратом. Значна частина з них вимагає творчого підходу, кмітливості і винахідливості. При їх виконанні студент має можливість перевірити глибину своїх теоретичних знань, вони спонукають їх до роздумів і пошуків, стимулюють інтерес до теоретичного матеріалу.

Посібник дістав позитивну оцінку серед вчителів, студентів, викладачів вищої школи.

Дисертантом одноосібно підготовлені посібники "Тригонометричні рівняння" (Вінниця, 1991, 2,4 д.а.), "Тригонометричні нерівності" (Вінниця, 1994, 2,6 д.а.), в яких широко використовуються властивості елементарних функцій (адже питання розв'язування тригонометричних нерівностей грунтовно ніде не розроблено). "Розв'язування рівнянь, пов'язаних з оберненими тригонометричними функціями" (Вінниця, 1995, 2 д.а.) (це питання також є надто складним, а в навчально-методичній літературі воно висвітлено недостатньо).

Розроблено одноосібно вкрай необхідний для студентів (та й учителів) спецкурс "Розв'язування рівнянь, пов'язаних з функціями: ціла частина дійсного числа і дробова частина дійсного числа" (Вінниця, 1996, 3,5 д.а.).

Подібних розробок немає, а необхідність у ньому чимала, оскільки на математичних олімпіадах юним математикам пропонують рівняння, які містять знаки згаданих вище функцій. Спецкурс дістав високу оцінку серед математиків.

У "Вступному курсі математики" мною написано розділ про елементарні функції.

Протягом 20 років дисертант читає курс математичного аналізу для студентів спеціальності "Математика та фізика". Тому в "Практикумі з математичного аналізу (вступ до аналізу, диференціальне числення)", 1993 р. і "Практикумі з математичного аналізу (інтегральне числення, ряди)", 1995 р., які видані видавництвом "Вища школа" з грифом Міністерства освіти України, особлива увага приділена формуванню знань у студентів з елементарних функцій і застосуванню їх властивостей до інших питань математики, а також конструюванню елементарних функцій з наперед прогнозованими властивостями.

Багаточисленні розробки і статті також присвячені елементарним функціям і використанню їх властивостей до розв'язування рівнянь та нерівностей тощо.

2. Основний зміст дослідження.

Розвиток суспільства, науки, техніки, культури зумовлює необхідність внесення певних змін у зміст освіти. Досягнення психолого-педагогічних наук дають можливість впроваджувати нові методи, способи, прийоми навчання молоді.

Не становить винятку і математика, яка за останні три століття розвивалася плідно і швидкими темпами. Вже в кінці XIX і на початку XX століття відомі математики піднімали питання і робили спроби модернізувати шкільний курс математики. Особливого розмаху перебудова (модернізація) шкільного курсу математики у всіх розвинених країнах світу набула у 50-ті та 60-ті роки нашого століття.

Зрозуміло, що в різних країнах було своє бачення модернізації математичної освіти. Разом з тим усі сходилися в одному: в курс шкільної математики необхідно ввести елементи диференціального та інтегрального числення.

У 1968 році була затверджена нова програма з математики.

Основні мотиви її введення - необхідність вивчення традиційного матеріалу.на основі деяких ідей сучасної математики та включення до неї нових питань, необхідних як для успішного продовження навчання у вищому навчальному закладі, так і для практичної діяльності. Похідна та її застосування (45 год.) була внесена в програму IX класу, а інтеграл (12 год.) - в програму X класу.

При введенні в середню школу елементів математичного аналізу відомі математики і провідні методисти наголошували на тому, що диференціальне та інтегральне числення не повинно бути добудовою (доповненням) до традиційного шкільного курсу, а надбудовою, на яку повинен бути розрахований фундамент усієї будови.

В основу вивчення питань алгебри і початків аналізу слід покласти таке фундаментальне поняття як функцію.

Тому одночасно з введенням елементів вищої математики були здійснені певні кроки щодо виконання цієї умови: ліквідовано самостійний курс тригонометрії, внаслідок чого тригонометричні функції вже розглядалися нарівні з лінійними, квадратними, показниковими, логарифмічними функціями; розв'язування рівнянь і нерівностей тісніше пов'язувалося з властивостями відповідних функцій; дослідження властивостей функцій за допомогою похідної; посилилась увага до функціональної пропедевтики тощо.

Проте і на сьогоднішній день викладання шкільної математики не переведено в повній мірі на "функціональні рейки". В підручниках і посібниках ще недостатній багаж задач і вправ на використання властивостей функцій, на глибоке їх розуміння.

Введення в шкільний курс математики елементів вищої математики призвели до певних змін в навчальних планах педінститутів.

З навчальних планів були вилучені курси елементарної алгебри, елементарної геометрії, елементарної тригонометрії. Це зразу ж призвело до зниження якості підготовки майбутніх вчителів. Не математиків, а саме вчителів математики.

Отже, зміни відбулися не на краще щодо їх професійної підготовки для роботи в школі.

Зрозуміло, що фундаментальну підготовку в педінституті майбутньому вчителеві забезпечують такі курси, як математичний аналіз, алгебра, геометрія, теорія ймовірностей, теорія чисел та ін.

Автори, вилучаючи з навчальних планів і програм елементарні курси, виходили з того, що фундаментальні курси, курс методики викладання математики, педагогічна практика повністю забезпечать підготовку висококваліфікованого спеціаліста для роботи в школі.

Проте така гіпотеза не виправдала себе. Склалася така ситуація, коли нерідко випускники фізико-математичного факультету успішно справляються із задачами і вправами диференціального та інтегрального числення, але не можуть розв'язати трансцендентне рівняння або нерівність середньої трудності.

Отже, виявилося, що фундаментальні курси не забезпечуть в повній мірі студентів знаннями для продуктивної професійної діяльності.

Математики. методисти, освітяни неодноразово піднімали питання про усунення цієї прогалини. В результаті був знайдений ніби компромісний варіант. В навчальні плани було введено практикум з розв'язування задач. Його програма складається з чотирьох частин:

- практикум з алгебри;
- практикум з тригонометрії;
- практикум з геометрії;
- практикум з розв'язування задач підвищеної трудності.

В пояснювальній записці сказано, що вміння розв'язувати задачі є одним з важливих елементів математичної підготовки майбутнього вчителя. Таке вміння виробляється тільки в тому випадку, коли протягом всього періоду навчання в інституті, а не тільки на завершальних семестрах, студент розв'язує задачі різної складності і різного змісту".

В практикум з алгебри, тригонометрії і геометрії включений матеріал, який недостатньо поданий у фундаментальних курсах. Зокрема, практикум з алгебри і тригонометрії представлений тотожностями, тотожними нерівностями, рівняннями і нерівностями зі змінними.

Розв'язуванню рівнянь і нерівностей у програмі відведена значна частина часу тому, що це традиційні теми шкільної математики, з якими учні мають справу протягом 5-6 років навчання в школі.

Проте в пояснювальній записці нічого не сказано про функціональну спрямованість при розв'язуванні рівнянь і нерівностей, доведенні тотожностей.

Очевидно, і практикум не може до кінця вирішити проблему професійної підготовки вчителя математики. Необхідно викладання фундаментальних курсів якомога тісніше пов'язувати з професійною підготовкою спеціаліста.

Для цього слід добре знати проблеми, турботи середньої школи, зміст шкільної математики, основні тенденції її розвитку, мати певні методичні напрацювання.

Зараз, як ніколи, гостро стоїть проблема підготовки вчителя математики. Зміна соціально-економічного курсу в Україні породила чимало престижних спеціальностей (фінанси, економіка, бізнес, управління, інформація тощо).

Талановита, добре підготовлена молодь в основному вступає у відповідні навчальні заклади. Престиж учителя останнім часом значно впав через економічні негаразди. Крім того, навчатися на спеціальності математика надто важко. Нелегко відбувається адаптація студентів першого курсу. Тому конкурси на фізико-математичні спеціальності останніми роками невисокі.

Оскільки зараз функціонує чимало різних навчальних закладів, що дають середню освіту (загальноосвітня середня школа, коледж, ліцей, ПТУ, приватна школа, колегіум), то вимоги до підготовки вчителя математики зросли.

Без широкої математичної ерудиції, без творчого розуміння різних підходів до навчання математиці в залежності від суб'єкта учитель не може розраховувати на успішне виконання своїх професійних обов'язків

З 1970 року велись дослідження щодо поліпшення підготовки майбутніх вчителів математики для роботи у середніх навчальних закладах. З цією метою виявлявся рівень, широта і оперативність знань студентів, які закінчили вивчення курсу математичного аналізу, вчителів, які проходили підвищення кваліфікації при інституті з питань, що мають безпосереднє відношення до їхньої професії.

Виявилося, що студенти і вчителі не мають глибоких знань з елементарних функцій, не говорячи про вміння застосовувати їх властивості до вивчення традиційних питань шкільної математики.

Це підтверджують дані анкетування, опитування, контрольні заміри.

Так, протягом 1970-1972 рр. студентам III-IV курсів (після вивчення курсу математичного аналізу) пропонувалися завдання такого змісту:

"Не проводячи дослідження, вказати, яка з нижченаведених функцій періодична, і, якщо періодична, то чому дорівнює період

1. $y=sin^2x$;
2. $y=\cos\sqrt{x}$;
3. $y=tg \log_2 x$;
4. $y=\sqrt{\sin 5x}$;
5. $y=2^{\cos 2x}$;
6. $y=\log_3 \sin\sqrt{2}\, x$;
7. $y=\sin\frac{\pi}{10}$;
8. $y=\sin\sqrt{5}\,x+\cos 2\sqrt{5}\,x$;
9. $y=tg\sqrt{3}\,x+ctg\sqrt{5}\,x$;
10. $y=\sin(\frac{1}{2}\pi x-\frac{\pi}{3})+1$;
11. $y=\sin 2x+\sin 4x+\sin 8x$;
12. $y=\sin^{50}+\cos^{50}x$.

Результати зведені в таблицю

№№ завдань	правильні відповіді	неправильні відповіді	частково правильні відповіді
1.	156	112	40
2.	48	260	---
3.	60	248	---
4.	128	180	---
5.	128	180	---
6.	92	176	40
7.	---	256	52

8.		12	248	48
9.		---	308	---
10.		136	132	40
11.		136	132	40
12.		---	---	308

Частково правильні відповіді - це ті, якими стверджувалася періодичність функцій, але неправильно вказувався її період.

Виявилося, що студенти, закінчуючи інститут і працюючи в школі, мають загалом надто обмежені знання щодо періодичності функцій.

Вони в переважній більшості не знають, як знайти період функції, що є сумою тригонометричних функцій, у яких перед аргументами стоять різні цілі числа, раціональні числа, коли така функція буде періодичною, якщо перед аргументами стоять різні ірраціональні числа, а коли вона не буде періодичною?

А не знаючи цього, не можна серйозно говорити про розв'язування тригонометричних нерівностей.

Здебільшого майбутні вчителі не знають, у якому випадку період складеної функції збігається з періодом внутрішньої функції, якщо внутрішня функція періодична.

А коли було дано завдання назвати відомі їм періодичні функції, то відповідь обмежувалась декількома функціями.

Не кращими були відповіді студентів і при виконанні такого завдання:

"Не користуючись похідною, вказати проміжки зростання та спадання таких функцій:

1. $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;   7. $y=2^{|\mathrm{arctg}\, x|}$;

2. $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2+1}$;   8. $y=\sqrt[4]{\log_3|x|}$;

3. $y=2^{\cos x}$;   9. $y=\sqrt[3]{\sin x+\cos x}$;

4. $y=\log_2|x^2-4|$;   10. $y=\mathrm{arcctg}\,(x^2-1)$;

5. $y=\arcsin\frac{1}{x}$;   11. $y=\arccos(\arccos x)$;

6. $y=\arccos(\cos x)$;   12. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|\arcsin x|}$."

Тому виникла необхідність ознайомити студентів з теоремою про монотонність складеної функції $y = f(\varphi(x))$, тим більше - для випадку, коли зовнішня функція строго монотонна, не підлягає сумніву. Справді, вона озброює їх дійовими, оперативними знаннями знаходження проміжків зростання та спадання елементарних функцій. Знання теореми дозволяє усно і без особливої затрати часу розв'язувати вправи заданого вище типу.

Значна частина студентів старших курсів визначають парність та непарність за зовнішніми ознаками, без врахування області визначення, що нерідко приводить до прикрих помилок. Наприклад, функцію $s=\pi r^2$, яка виражає площу круга через радіус, вони часто називають парною (зовнішня ознака). Знову ж тут не доводиться говорити про вміння студентів застосовувати властивості парних та непарних функцій до розв'язування рівнянь та нерівностей.

Дані констатуючого експерименту засвідчили, що студенти не обізнані з тим, як, користуючись поняттям множини значень функції, сформулювати достатні умови відсутності коренів рівняння $f(x)=\varphi(x)$, а отже, сформулювати необхідні умови існування коренів для даного рівняння. Або, які достатні умови існування коренів рівняння $f(x)=a$, $a\in R$, які достатні умови відсутності коренів цього ж рівняння. Тобто знову ж таки студенти не вміють застосовувати поняття множини значень функції до традиційних питань математики.

Перелік цих невмінь можна було б продовжити і підтвердити результатами тестування. Але, мабуть, в цьому немає потреби. Наведені дані засвідчують, що при такій підготовці майбутні вчителі не зможуть перевести викладання традиційних тем шкільної математики на "функціональні рейки".

У зв'язку з цим на початку 70-х років нами була поставлена така проблема: яким чином за рахунок введення в навчальні плани практикуму з розв'язування задач поліпшити професійну підготовку майбутніх вчителів математики. Експериментальні дані засвідчили, що розв'язування рівнянь і нерівностей шляхом хаотичного їх набору (взятих із збірників конкурсних задач, з варіантів завдань, що пропонувались вступникам на іспитах в різні вищі навчальні заклади) та ще традиційними способами бажаних результатів не дають. При такому підході студенти не бачать сповна органічного зв'язку функції з рівняннями та нерівностями, того спільного і відмінного, що має місце між рівняннями і нерівностями.

На основі експериментальних даних , багаторічного педагогічного досвіду нами була розроблена нова концепція в підході до розв'язування рівнянь і нерівностей: в основу їх розв'язування покладено широке використання властивостей елементарних функцій (область визначення, множина значень, обмеженість, неперервність, монотонність, проміжки знакосталості, періодичність, парність, непарність та ін.) із залученням теоретико-множинного апарату. Вона також передбачає інтенсифікацію навчального процесу за рахунок синхронного (паралельного, одночасного) розв'язування значної частини рівнянь та нерівностей.

Це вимагало створення чималої кількості нових цілеспрямованих задач, в тому числі змістовних, нестандартних. Усе це згодом знайшло своє відображення в посібниках для студентів пединститутів (1), (2), (3). Нами написано весь практикум з тригонометрії, перетворення показникових та логарифмічних виразів, показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх системи.

Тут, зокрема, здійснено такий підхід: розглядаються дві елементарні функції дійсної змінної $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ з областями визначення відповідно X_1 та X_2. Тоді для будь-якого $x \in X = X_1 \cap X_2$ функції $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ набувають певних числових значень, які можуть знаходитись між собою тільки в одному з трьох можливих відношень: дорівнює, більше, менше. По-новому ставиться завдання: для яких значень $x \in X$ числові функції $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ знаходяться між собою у відношенні дорівнює? більше? менше?

Для цього необхідно розв'язати відповідне рівняння і дві нерівності (синхронне розв'язування рівнянь та нерівностей).

При такому підході стає природним введення поняття області визначення рівняння та нерівності (а не області допустимих значень), бо важливо, що різні об'єкти (функція, рівняння, нерівність) розглядаються з однієї і тієї ж позиції.

Доцільно позначити множину розв'язків рівняння (1) через X^0, а через X^+, X^- відповідно розв'язки нерівностей.

Після цього студенти самостійно доходять висновку, що $X = X^0 \cup X^+ \cup X^-$, $X^0 \cap X^+ = \varnothing$, $X^0 \cap X^- = \varnothing$ $X^+ \cap X^- = \varnothing$. А з цього випливає, що коли відомі множина X і будь-які дві множини з трьох X^0, X^+, X^-, то третя визначається за допомогою операцій над множинами.

Оскільки практикуми (1) - (3) в основному містять задачі і вправи та зразки їх розв'язування, то виникла потреба водночас написати посібник (4), (5), в якому детальніше висвітлити питання використання властивостей функцій до розв'язування рівнянь і нерівностей. Так, якщо множинами значень функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ будуть відповідно Y_1 і Y_2, а x_1 є коренем рівняння $y = \varphi(x)$, то виконуватиметься числова рівність $f(x_1) = \varphi(x_1)$, і тому $f(x_1) \in Y_1$, $\varphi(x_1) \in Y_2$. Тоді множини Y_1, Y_2 мають спільний елемент, тобто $Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$. Звідси і випливає необхідна умова існування коренів рівняння. Якщо ж $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, то рівняння коренів не має, а отже маємо достатню умову відсутності коренів. Для рівняння $f(x)=a$, $a\in R$ необхідною і достатньою умовою існування кореня є умова $a\in Y$, де Y - множина значень функції $f(x)$. Якщо ж $a\notin Y$, то рівняння коренів не має. Наведені міркування дозволяють майбутнім вчителям ще у студентські роки навчитись самостійно конструювати так звані нестандартні рівняння, а отже вміти їх розв'язувати і навчити цього учнів, особливо в спеціалізованих навчальних закладах з поглибленим вивченням математики.

Так, наприклад, рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+14}=3$ розв'язку не має, бо $Y=[4;+\infty)$, а $3\notin Y$. А як його розв'язують учні і студенти? Не вникаючи глибоко в суть справи, вони поступово звільняються від радикалів і в кінцевому результаті дістають сторонні корені.

Нерідко на олімпіадах і вступних іспитах до престижних вищих навчальних закладів пропонують для розв'язування нестандартне рівняння $f(x) = \varphi(x)$, корені якого вдається знайти, якщо його звести до вигляду $g^2(x)+\chi^2(x)=0$. А воно рівносильне системі двох рівнянь $\begin{cases} g(x)=0 \\ \lambda(x)=0 \end{cases}$, тобто нуль повинен належати множині значень функції $(x) = g^2(x)+ \chi^2(x)$.

Цим самим дається майбутньому вчителю технологія конструювання нестандартних рівнянь, бо для нього достатньо рухатись у зворотньому напрямку: від системи до рівняння $g^2(x)+ \chi^2(x) = 0$, а від нього до рівняння $f(x) = \varphi(x)$.

Після розв'язування таких рівнянь (вони є в (1) - (3)) кожному студенту дається завдання самостійно сконструювати 5-6 рівнянь такого типу.

Ознайомившись з міркуваннями щодо використання множини значень функції, студенти без будь-яких труднощів розв'язують нестандартні рівняння, наприклад, $3^x+3^{-x}=1+\cos 4x$. Оскільки $Y_1=[2;+\infty)$, $Y_2=[0;2]$, то $Y_1\cap Y_2=\{x\}$. Отже, коренем рівняння можуть бути тільки ті x, для яких обидві функції одночасно набувають значення 2. Але функція $f(x)=3^x+3^{-x}$ набуває цього значення тільки для $x=0$. Виявляється, що і $\varphi(0)=2$. Отже, коренем рівняння є 0.

Мало того, область зміни елементарної функції застосовують і при розв'язуванні окремих рівнянь, які містять не одну, а декілька змінних.

Наведені міркування щодо застосування множини значень функцій до розв'язування окремих рівнянь проводяться і застосовуються до розв'язування нестандартних нерівностей. Посібники (1) - (5) містять значну кількість оригінальних рівнянь і нерівностей на застосування множини значень функції, що дозволяє студентам набути необхідних навичок.

Саме розв'язування таких нестандартних рівнянь і нерівностей дозволяє їм виявити свій особистий творчий потенціал, шукати і знаходити оптимальні ефективні шляхи та методи для досягнення мети.

Не менш доцільно й ефективно слід застосовувати властивості парних та непарних функцій при розв'язуванні рівнянь і нерівностей. Насамперед зі студентами необхідно розглянути очевидні факти про:

- алгебраїчну суму скінченного числа парних (непарних) функцій;
- добуток парних (непарних) функцій;
- добуток (частка) парної і непарної функцій;
- складену функцію $y=f(\varphi(x))$, де $\varphi(x)$- парна функція;
- складену функцію $y=f(\varphi(x))$, у якої f- парна, а φ - непарна;
- складену функцію $y=f(\varphi(x))$, у якої f і φ - непарні функції та інші.

Оскільки парні та непарні функції мають симетричну відносно нуля область визначення, то для парних функцій маємо: якщо для $x=f(m) \gtrless 0$, то і для $x=-m$ $f(-m) \gtrless 0$.

Звідси студенти роблять висновок: для того, щоб знайти множину розв'язків рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ - парна функція, достатньо спочатку знайти множину всіх невід'ємних (недодатніх) коренів, скласти множину з коренів симетричним знайденим і об'єднати ці множини. Якщо необхідно перевірити корені рівняння, то, зрозуміло, перевіряється тільки один із двох симетричних. Очевидно, розв'язки нерівності $f(x)>0$ ($f(x)<0$) будуть симетричними відносно нуля, тому їх достатньо спочатку знайти для $x \geq 0$ або $x \leq 0$. Після цього студенти самостійно роблять висновки про корені рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ - непарна функція. Вони такі ж, як і для парної функції.

Необхідно звернути увагу студентів на той факт, що коли функція $f(x)$ - непарна і визначена для $x=0$, то нуль є коренем рівняння $f(x)=0$. Їм ставиться питання: яким чином можна використати властивості непарної функції при розв'язуванні нерівності $f(x)>0$ ($f(x)<0$). Студенти самостійно роблять правильний висновок: якщо дана нерівність виконується в проміжку $<a; b>$, де $a>0$, $b>0$, то вона не виконується в симетричному проміжку $<-b; -a>$, і, навпаки, якщо нерівність не виконується в проміжку $<c; d>$, де $c>0$, $d>0$, то на проміжку $<-d; -c>$ нерівність буде виконуватись.

Це особливо доцільно застосовувати до розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.

У посібниках (4), (5) пропонується велика кількість творчих вправ на закріплення знань студентів про парні та непарні функції та застосування їх властивостей до розв'язування рівнянь і нерівностей та тотожностей.

У посібниках (1) - (3) достатньо вправ, для розв'язання яких значний ефект дає використання парних та непарних функцій. Є і вправи, які вимагають творчого підходу.

Наприклад, дано, що рівняння $8\sin^6x+3\cos2x+2\cos4x+1=0$ на проміжку $[0; \frac{\pi}{2}]$ має лише один корінь $x=\frac{\pi}{4}$. Записати розв'язки даного рівняння та відповідних нерівностей:

$$8\sin^6x+3\cos2x+2\cos4x+1>0,$$

$$8\sin^6x+3\cos2x+2\cos4x+1<0.$$

Для його розв'язування необхідно скористатися парністю і періодичністю функції, що в лівій частині рівняння. На студентів це справляє сильне враження, бо за одним коренем дістаємо інформацію про загальний розв'язок рівняння і двох нерівностей. А все це завдяки глибокому розумінню властивості функції.

Такого плану вправи сприяють розвитку функціонального мислення, що є пріоритетним на завершальному етапі професійної підготовки майбутніх вчителів математики. Саме при цьому усвідомлюються логічні та інші зв'язки між окремими компонентами знань.

Як уже зазначалось, у студентів викликають значні трудноші завдання на знаходження проміжків монотонності для складеної функції $y=f(\varphi(x))$, де f і φ - елементарні функції і f - строго монотонна. В той же час відомо, що при розв'язуванні рівнянь і нерівностей властивість монотонних чи кусково монотонних функцій відіграє основну роль. Тому ми даємо студентам таку теорему:

Складена функція $y=f(\varphi(x))$, зростає, якщо функції f і φ змінюються в одному напрямку, і спадає, якщо вони змінюються в протилежних напрямках.

Доведення її просте як за допомогою похідної, так і на основі означення зростаючої (спадної) функції. Досвід і експеримент показує, що її доведення на основі означення зростаючої (спадної) функції доступне учням старших класів.

Звертаємо увагу студентів також на те, як знаходити проміжки зростання (спадання) складеної функції у випадку, коли f - зростаюча або спадна, а φ - кусково-монотонна функції.

Наведена теорема широко використовується не тільки при розв'язуванні рівнянь і нерівностей, але і при побудові графіків складених функцій.

Крім того, не можна обминути питання про проміжки зростання (спадання) суми будь-якого скінченного числа функцій, що змінюються в одному напрямку, про зміну в протилежних напрямках функцій $y=f(x)$ і $y=-f(x)$ та $y=f(x)$ і $y=f(-x)$.

Властивості зростаючих (спадних) та кусково-монотонних функцій знаходять широке застосування при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.

Треба добитися того, щоб студенти (та й учні) чітко розуміли такі очевидні факти:

- якщо функція $y = f(x)$ зростаюча (спадна), то рівняння $f(x) = f(x_0)$, де x_0 належить області визначення рівняння, має єдиний корінь x_0;

- якщо функція $y = f(x)$ кусково-монотонна, то рівняння $f(x) = f(x_0)$ може мати не тільки кілька коренів, але й нескінченну їх множину;

- якщо функція $y = f(x)$ зростаюча (спадна) в області її визначення, то рівняння $f(x) = a$ не може мати більше одного кореня і буде його мати, якщо $a \in Y$.

- якщо ж функція $y = f(x)$ кусково-монотонна, то рівняння може мати декілька коренів і навіть нескінченну їх множину, як це має місце при розв'язуванні тригонометричних рівнянь. Це твердження часто використовується при розв'язуванні рівнянь з параметрами; якщо функції $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ змінюються в протилежних напрямках, то рівняння $f(x) = \varphi(x)$ не може мати більше одного кореня.

Усі ці твердження слід ілюструвати на графіках, що забезпечує міцні знання.

Аналогічні міркування з графічними ілюстраціями проводимо для нерівностей.

Доцільно також ознайомити студентів з теоремою про рівносильність

рівнянь $$f(x) = \varphi(x)$$

$$F(f(x))=F(\varphi(x))$$

та нерівностей $$f(x) \gtrless \varphi(x),$$

$$F(f(x)) \gtrless F(\varphi(x)),$$

$$F(f(x)) \lessgtr F(\varphi(x))$$

у випадку, якщо функція F строго монотонна. Така теорема звільняє студента від вивчення і запам'ятовування цілої низки теорем про рівносильність рівнянь.

Посібники (1) - (5) містять широкий вибір змістовних вправ, складених дисертантом на знаходження проміжків зростання та спадання функцій, на застосування властивостей монотонних функцій до розв'язування рівнянь і нерівностей. Наприклад, довести, що рівняння $\log_a(bx+c) + \log_a(kx+l) = d$, де b, k одного знаку, а $a \mid a - 1| > 0$ має один і тільки один корінь.

Розв'язати нерівність $2^{2x-1} + 4^{2x-1} + 6^{2x-1} + 8^{2x-1} < 4$.

Нерівність розв'язується усно.

Студент повинен чітко розуміти, що рівняння $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = \ell$, де a і c одного знаку, не може мати більше одного кореня, і якій умові повинно задовольняти l, щоб цей корінь існував, а при якій був відсутній. Розроблена технологія використання властивостей монотонних і кусково-монотонних функцій для розв'язування рівнянь та нерівностей спрямована на розвиток у студентів функціонального мислення, пошукових здібностей, на творче застосування набутих знань з фундаментальних дисциплін, зрештою, на безпосередню професійну підготовку майбутніх вчителів.

Чи не найслабші знання мають учні і студенти щодо періодичних функцій. Досвід свідчить, що крім означення періодичної функції вони мало що про них знають. А ознайомлення з такими поняттями, як період рівняння $f(x) = \varphi(x)$ нерівності $f(x) \gtrless \varphi(x)$ не передбачає жодна програма. Мало того, у свій час окремі автори статей стверджували, що введення поняття періоду рівняння (нерівності) є не що інше, як псевдонауковість. З таким твердженням категорично не можна погодитись, бо як же можна розв'язувати складні тригонометричні нерівності без поняття їх періоду. В науково-методичних статтях, присвячених періодичним функціям, деякі автори означають період рівняння $f(x) = \varphi(x)$ як спільний період функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$. Це неправильно, бо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ можуть бути неперіодичними, а рівняння має період. Так, наприклад, в журналі "Математика в школі" № 5 (1985 р.) подано розв'язання рівняння $[x + \frac{1}{2}] = [2x] - [x]$.

Автори помилково стверджують, що в обох частинах рівняння маємо періодичні функції з періодом T=1. Насправді ні функція $f(x) = [x+\frac{1}{2}]$, ні функція $\varphi(x) = [2x] - [x]$ не є періодичними, а от рівняння дійсно має період T=1, бо після відповідних перетворень дістанемо рівняння $\{2x\} - \{x + \frac{1}{2}\} - \{x\} + \frac{1}{2} = 0$, з якого видно, що в лівій його частині маємо періодичну функцію з періодом T=1 , і, отже, вихідне рівняння має цей період.

Розглянемо інший приклад.

В нерівності $\cos 4x + \cos x > \cos 8x + \cos x$ спільний період для функцій лівої і правої частин буде 2π ($T_1 = 2\pi$, $T_2 = 2\pi$), а періодом нерівності є $T=\frac{\pi}{2}$.

Експеримент і досвід свідчать, що перед тим, як перейти до розв'язування рівнянь і нерівностей, пов'язаних з тригонометричними або іншими періодичними функціями, необхідно дещо розширити і систематизувати знання студентів про періодичні функції. Насамперед вони повинні знати таке:

- якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то і функція $y = f(kx+b)$, де k>0 періодична з періодом $T_1=\frac{T}{k}$. Періоди функцій $y= \sin(kx+b)$, $y = \cos(kx+b)$ маємо за формулою $T= \frac{2\pi}{|k|}$ (|k| тому що для цих функцій завжди можна зробити k>0, а для функцій $y=tg(kx+b)$, $y=ctg(kx+b)$-за формулою $T=\frac{\pi}{|k|}$,

- якщо функція $\varphi(x)$ періодична з періодом T, то і складена функція $y = f(\varphi(x))$ буде періодичною і T буде слугувати її періодом. Але період T може виявитись не основним для складеної функції. Це можна показати студентам на простому прикладі: період функції $\varphi(x) = \sin x$ дорівнює 2π, а період функції $y = \cos(\sin x)$ дорівнює π . Це зумовлено в даному випадку тим, що зовнішня функція парна а отже, кусково-монотонна.

Студентам пропонується довести: якщо функція f строго монотонна, а функція $\varphi(x)$ періодична, то періоди функцій $y = \varphi(x)$ і $y=f(\varphi(x))$ збігаються. Наприклад, функції $y = 2^{\cos 4x}$, $y = (\sin \frac{1}{2}x)^5$, $y = \log_2 tgx$ мають такі періоди, як і періоди відповідних внутрішніх функцій;

якщо дві або будь-яке скінченне число функцій мають період T, то T буде періодом функції, що є алгебраїчною сумою, добутком, часткою цих функцій. Проте період таким чином утвореної функції може виявитись меншим за період T. Так, наприклад, функції $y = \sin^4 x$, $y = \cos^4 x$ мають період π, а період функції $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ $T = \frac{\pi}{2}$. Функція, яка є алгебраїчною сумою, добутком, часткою двох або декількох функцій з різними періодами, може виявитись неперіодичною. Наприклад, функції $y = \cos ax + \cos bx$, $y = \sin ax + \cos bx$, $y = \frac{\cos ax}{\sin bx}$, $y = tg ax + tg bx$ будуть періодичними, якщо $\frac{a}{b}$ є раціональне число, і неперіодичними, якщо це відношення є ірраціональне число. Так, функція $y = \cos 3\sqrt{3}x + \cos 6\sqrt{2}x$ періодична, а функція $y = \cos 3\sqrt{3}x + \cos\sqrt{2}x$ неперіодична, хоч кожна з функцій додатків періодична. В цьому неважко переконатися, скориставшись поняттям несумірності відрізків (не можна вказати відрізок, у якому вмістилося б ціле число разів відрізки довжини $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$).

Студентам обов'язково даємо формули для знаходження періоду функції

$f(x) = c_1 \sin n_1 x + ... + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + ... + \cos m_j x$, $T = \frac{2\pi}{D(n_i, m_j)}$, де c_i і d_j - дійсні числа, а $n_i, m_j \in N$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,s}$, аналогічно для функції, що є сумою тангенсів котангенсів з тією різницею, що ділимо π на D.

Бажано познайомити студентів з формулами для знаходження періоду таких функцій, де коефіцієнти при аргументі - раціональні числа, а також навчити їх конструювати періодичні функції з будь - якої функції, що визначена на певному проміжку.

Щоб установити, що дана функція неперіодична, достатньо показати, що вона не повторює принаймі ні одну із своїх властивостей.

А щоб установити неперіодичність складеної функції $y = f(\varphi(x))$, у якої f - періодична, а $\varphi(x)$ - неперіодична, достатньо переконатися в тому, що функція $\varphi(x)$ змінюється нерівномірно при рівномірній зміні аргумента x. Це дає можливість студентам без додаткових досліджень стверджувати, що, наприклад, функції $y = \cos 2^x$, $y = \sin x^3$ - неперіодичні.

Після цього вводимо поняття періоду рівняння (нерівності) $f(x) \gtreqless \varphi(x)$.

За період рівняння (нерівності) приймається таке число T, яке є основним періодом функції $g(x) = f(x) - \varphi(x)$ або, що те саме, - функції $h(x) = \varphi(x) - f(x)$.

Період рівняння та нерівності плідно застосовуємо для їх розв'язування.

Так, якщо рівняння (нерівність) має період T, то достатньо спочатку знайти його (її) розв'язки на відрізку, довжина якого дорівнює періоду, а після до них додати nT, $n \in Z$

Період використовуємо й у випадку, коли виникає необхідність переконатися в тому, що одержані різними способами загальні розв'язки рівняння (нерівності) виражають одну і ту ж множину, а також тоді, коли загальні розв'язки рівняння виражаються декількома серіями і треба визначити, чи не містять вони спільних елементів.

А при розв'язуванні тригонометричних нерівностей загальним способом без періоду нерівності взагалі не обійтись. Мало того, тут треба навчити студентів діставати із серій загальних розв'язків відповідного рівняння ті, що належать обраному відрізку, довжина якого дорівнює періоду рівняння.

Викладене про властивості елементарних функцій та їх застосування до розв'язування рівнянь і нерівностей знайшло своє безпосереднє відображення при складанні дисертантом вправ і задач практикуму (1) - (3).

Крім того, значна їх частина конструювалась з таким розрахунком, щоб трансцендентні рівняння і нерівності розв'язувались тими ж прийомами, що і алгебраїчні. Це, як показує експериментальна робота, дозволяє забезпечити студентам міцні знання щодо розв'язування трансцендентних рівнянь і нерівностей.

Так, розв'язування значної частини трансцендентних рівнянь (нерівностей) зводиться до квадратних відносно певної трансцендентної функції, тобто маємо конструкцію $af^2(x) + bf(x) + c = 0$ ($af^2(x) + bf(x) + c \gtrless 0$), де f(x)-трансцендентна функція, але така, що розв'язки рівняння $f(x) = l$ можна знайти.

Та й взагалі, конструюємо рівняння (нерівності), які зводяться до цілих, раціональних, ірраціональних рівнянь (нерівностей) відносно певної трансцендентної функції. Наприклад, при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь виду $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ застосовувалась підстановка $x = t - \frac{a+b}{2}$. Тепер конструюємо рівняння $(f(x) + a)^4 + (f(x) + b)^4 = c$ - трансцендентна функція, зокрема, показникова, логарифмічна, тригонометрична тощо, для розв'язування яких застосовуємо підстановку $f(x)=t-\frac{a+b}{2}$.

Або розв'язування алгебраїчного рівняння виду $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b+x}=c$ зводиться до розв'язування системи $\begin{cases} u+\upsilon=c, \\ u^3+\upsilon^3=a+b, \end{cases}$ де $u=\sqrt[3]{a-x}, \upsilon=\sqrt[3]{b-x}$

Знову конструюємо рівняння $\sqrt[3]{a-f(x)}+\sqrt[3]{b-f(x)}=c$, де f(x) - трансцендентна функція, яка розв'язується знову ж таки за допомогою тієї ж системи рівнянь.

Тригонометричний матеріал практикуму є надзвичайно сприятливим для того, щоб показати, як "працюють" в комплексі властивості тригонометричних функцій при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.

В той же час студенти, не кажучи про випускників середніх шкіл, мають надто низькі знання саме з цих питань.

Розглядаючи різні способи розв'язування тригонометричних рівнянь з шкільному курсі математики та в різноманітних посібниках, автори роблять спробу провести їх класифікацію в залежності від того, які при цьому в основному формули застосовуються. Зрозуміло, що така класифікація виправдана в шкільному курсі математики з дидактичної і методичної точок зору, бо рівняння пропонується розв'язувати в міру встановлення нових формул. Але така класифікація (типізація) не досконала і недоцільна в інституті. Та й чи можна її взагалі провести, зважаючи на те, що відсутній загальний спосіб (окрім наближеного) для їх розв'язування. Крім того, при розв'язуванні одного і того ж рівняння можуть застосовуватися декілька різних формул. Ті ж рівняння, що пропонуються у збірниках задач - це лише їх деякий клас.

Тому доцільно вести мову про типи рівнянь, до яких в кінцевому результаті (після певних перетворень) зводяться тригонометричні рівняння.

Ми виділяємо в (1) - (3), (16) п'ять типів рівнянь: найпростіші, алгебраїчні відносно тригонометричних функцій, ліва частина представляє собою добуток тригонометричних функцій, а права - нуль, ліва частина представляє собою частку двох функцій, а права - нуль і нестандартні рівняння.

До таких же типів зводяться відповідно тригонометричні нерівності (1) - (3), (17).

Важливо показати студентам, що для тригонометричних рівнянь (нерівностей) їх типізація є умовною, бо одне і те ж рівняння (нерівність) можна звести в кінцевому результаті і до різних типів. А це в свою чергу (в залежності від вибору способу розв'язання) нерідко призводить до різних за формою загальних відповідей, що викликає невпевненість у студентів (учнів) у достовірності цих відповідей. Експеримент показав, що треба розглянути це питання з самого початку на конкретному рівнянні, наприклад,

$$\sin x + \cos x = 1$$

За допомогою доповняльного кута воно зводиться до найпростішого відносно синуса (косинуса) і дістаємо відповідь:

$$\{-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z\},\quad (\{\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ n\in Z\}).$$

Якщо застосовувати універсальну підстановку, то дістанемо алгебраїчне рівняння відносно $tg\frac{x}{2}$, і його розв'язки запишуться $\{2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2n\pi, k, n\in Z\}$

За допомогою половинного аргументу це рівняння можна звести до вигляду, в якому ліва частина є добутком функцій, а права - нуль. Крім того, дане рівняння можна розглядати як нестандартне, тобто розв'язки дістати нестандартним способом, виходячи безпосередньо з означення косинуса і синуса. Справді, тривіальним розв'язком будуть дві серії значень x: $2k\pi$, $\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $k, n\in Z$, бо цим значенням відповідають точки одиничного кола з координатами відповідно (1; 0) , (0; 1).

Залишається переконатися, що інших коренів рівняння не має.

Дійсно, якщо $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, то координати точок одиничного кола, що відповідають цим значенням x, будуть додатними і виражати довжини катетів, а тому їх сума буде більшою за величину гіпотенузи, яка дорівнює 1.

Якщо $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < 2\pi+2k\pi$, то принаймні одна із координат точок одиничного кола буде від'ємною і, отже, їх сума менша 1.

Знайдені в такий спосіб розв'язки рівняння дають можливість студентам зразу ж записати розв'язки відповідних нерівностей

$$\sin x + \cos x > 1 \qquad (2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z),$$

$$\sin x + \cos x < 1 \qquad (\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<2\pi+2k\pi,\ k\in Z).$$

Тепер студентам ставиться завдання: довести, що одержані розв'язки рівняння різними способами вирізняються між собою лише за формою. Студенти пропонують зробити перевірку знайдених розв'язків підстановкою у рівняння. Треба їм показати хибність такого підходу, бо якщо одним способом дістали множину розв'язків А, а іншим - множину В, то може виявитися, що $A \subset B$ або $B \subset A$, і підстановкою загальних розв'язків у рівняння ми цього можемо не виявити.

Ось тут знову таки природно приходимо до необхідності введення поняття періоду і рівняння.

Оскільки $T=2\pi$, то із одержаних серій розв'язків знаходимо ті,що належать проміжку $[0;2\pi)$, або будь-якому іншому проміжку, довжина якого дорівнює 2π.

Знаходження коренів рівняння, що належить певному проміжку із загальних розв'язків , становить, як показує досвід, певні труднощі для окремих студентів і переважної більшості випускників середніх шкіл, які вступають на фізико-математичний факультет. А в тестових завданнях 1994 р. якраз значна частина завдань тригонометричного матеріалу пропонувалася на знаходження коренів рівняння, що належить певному проміжку.

Що ж досягається таким підходом до розв'язування тригонометричних рівнянь з педагогічної та методичної точок зору?

По-перше, важливо, що один і той же об'єкт (рівняння) розглядається з різних альтернативних позицій, що сприяє усуненню односпрямованості мислення, його "лінійності".

По-друге, природно зумовлює потребу введення поняття періоду рівняння, тобто практичне завдання призводить до розширення теоретичних знань.

По-третє, дає можливість студентам зрозуміти зв'язок і відмінність між типом рівняння і способом його розв'язування. По-четверте, посилюється професійна спрямованість.

У (16) детально викладена теорія і методика розв'язування тригонометричних рівнянь у відповідності з прийнятою типізацією і концепцією . Значна увага приділена розв'язуванню нестандартних рівнянь, а також втраті і появі сторонніх коренів, вилученню спільних коренів із серій загальних розв'язків рівняння.

Якщо у випускників і студентів є певні знання з розв'язування рівнянь, то тригонометричні нерівності вони розв'язувати практично не вміють. Скільки-небудь ґрунтовних навчально-методичних розробок з цього питання немає. Як правило, в навчально-методичній літературі після розгляду тригонометричних рівнянь подаються зразки розв'язування лише двох-трьох простеньких нерівностей за допомогою систем.

Тому зрозуміло, що при такому недостатньому методичному і дидактичному забезпеченні не можна сподіватись на ґрунтовні знання студентів з даного питання.

Експериментальні дослідження підтверджують доцільність постановки завдання перед студентами в такому ракурсі: якщо студенти вміють знайти область визначення нерівності $f(x) \gtrless \varphi(x)$, його період, корені відповідного рівняння $f(x) = \varphi(x)$ на відрізку, що дорівнює довжині періоду . то вони зобов'язані знайти розв'язки нерівності загальним споообом (спосіб проміжків). Така постановка задачі ще раз переконує студентів у доцільності синхронного (паралельного) розв'язування рівнянь і нерівностей. введення поняття періоду рівняння та нерівності і навіть поняття кратних коренів для трансцендентної функції.

Дані дослідження підтверджують, що загальний спосіб повинен стати домінуючим при розв'язуванні тригонометричних нерівностей. Саме його застосування дозволяє студентам подолати психологічний бар'єр невпевненості з цього складного питання. сповна застосовувати властивості тригонометричних функцій.

У (1) - (5) є широкий вибір цілеспрямованих вправ і задач, сконструйованих дисертантом на різні мотиви, а в (17) розроблена методика розв'язування тригонометричних нерівностей.

Рівняння, пов'язані з оберненими тригонометричними функціями, зустрічаються на практиці не так уже і часто. Тому їм не знаходиться місця у шкільному курсі математики, хоча пропонуються вправи на виконання певних дій над числовими виразами, що містять обернені тригонометричні функції.

Але майбутній вчитель повинен володіти прийомами розв'язування рівнянь і нерівностей, пов'язаних з оберненими тригонометричними функціями.

Розв'язування таких рівнянь і нерівностей має свої особливості і труднощі, які зумовлені властивостями обернених тригонометричних функцій (обмеженість області визначення і множини значень для обернених синуса і косинуса, обмеженість множини значень обернених тангенса і котангенса). Крім того, значна частина рівнянь розв'язується взяттям від обох частин рівняння, що містить знаки обернених функцій, однієї з тригонометричних функцій, що може призвести до наслідкового рівня, отже, до появи сторонніх коренів, оскільки тригонометричні функції є кусково-монотонними.

У (18) розроблена детальна методика розв'язування рівнянь, пов'язаних з оберненими тригонометричними функціями. Розглянуто таких чотири основних типи: найпростіші рівняння, ті, що розв'язуються взяттям від обох його частин однієї тригонометричної функції, рівняння, що зводяться до алгебраїчних відносно обернених функцій, нестандартні рівняння (останні два типи рівнянь у збірниках майже відсутні) .

Нерівності, знову ж таки, доцільно розв'язувати загальним способом і синхронно з рівняннями.

Лише глибоке знання властивостей обернених тригонометричних функцій може забезпечити студентам грунтовні знання з даного питання.

В окремих випадках їх застосування звільнює студентів від зайвих досліджень.

Особливу увагу студентів звертаємо на використання монотонності та множини значень обернених . тригонометричних функцій при розв'язуванні рівнянь і нерівностей. Набір розв'язаних прикладів у (18) дає можливість студентам самостійно конструювати ці об'єкти.

Не секрет, що вузівські фундаментальні курси математики значно відрізняються від шкільного курсу своєю складністю. Якщо врахувати ще й перехід на нові форми навчальної діяльності, то стане зрозумілим, якої ваги набуває проблема адаптації першокурсників. У них оволодіння новими формами навчальної діяльності відбувається повільно, оскільки основні зусилля спрямовані в першу чергу на засвоєння змісту матеріалу, його формальне запам'ятовування, а не на розуміння методів одержання нових математичних знань. Відсутність уміння прогнозувати результати ускладнюють швидке засвоєння, не дає змоги розібратись у різних варіантах систематизації, а тим більше "імпровізувати" в рамках здобутих знань.

Тому в (6) було поставлено одне із важливих завдань - допомогти першокурсникам систематизувати знання шкільної математики і виробити та закріпити на цьому матеріалі необхідні навчально - дослідні навички. У зв'язку з цим у посібнику на першому плані подано не інформацію з шкільного курсу математики, а способи діяння з нею, прийоми організації її в систему.

Увага зосереджується не на строгості викладу заради неї самої, а на суті понять, методів. Коментуються провідні ідеї математики, демонструється логіка одержання нових математичних знань.

Деякі означення вводяться формально, а більшість з'являється в процесі обговорення. Строгими є лише окремі доведення.

Таким чином, систематичність викладу досягається не за рахунок внутрішньої логіки пропонованого матеріалу, а завдяки його методологічному і методичному аналізу.

Посібник може бути використаний як збірник задач, причому значна частина з них складена авторами.

Як показують наші дослідження, в підготовці майбутнього вчителя математики чільне місце повинні зайняти цілеспрямовані на їх професійну підготовку спецкурси (безумовно, поряд із спецкурсами з фундаментальних наук).

Впродовж останніх 15 років ми пропонуємо студентам невеликий за обсягом спецкурс на побудову графіків функції, який вони з інтересом сприймають.

Основний зміст спецкурсу викладено в (4), (5) (розділ II). Особлива увага приділяється конструюванню, з'ясуванню властивостей та побудові графіків складених функцій.

Сконструйовано понад 420 таких функцій, а всього в цьому розділі їх нараховується понад 680. Причому технологія їх конструювання проста, доступна для кожного студента. Більше того, їм дається завдання конструювати функції з наперед прогнозованими властивостями, що дуже важливо.

Здавалось би, для чого студентам такий спецкурс, коли вони в курсі математичного аналізу детально розглядали питання дослідження функцій, зокрема за допомогою похідної.

Виявляється, що для практичного застосування до розв'язування рівнянь і нерівностей в такій деталізації немає необхідності. Дійсно, щоб намітити план розв'язування деяких рівнянь і нерівностей, особливо нестандартних або з параметрами, достатньо вміти побудувати ескіз графіка функції, що входить до них, а отже вміти за аналітичним заданням функції "читати" її властивості. Лише при цій умові традиційні питання практикуму з алгебри і тригонометрії можна значно оживити функціональним змістом.

При встановленні властивостей складених функцій $y=f(\varphi(x))$ здебільшого немає потреби слідувати відомій схемі їх дослідження. Краще скористатися властивостями функцій $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$.

Спочатку робимо загальні зауваження щодо області визначення, парності, непарності, періодичності, проміжків монотонності складеної функції.

Далі знайомимо студентів із загальним способом геометричної побудови складеної функції. А це викликає у них значний інтерес, оскільки без обчислень і таблиць вони можуть вказати кожній точці з області визначення складеної функції точку її графіка.

Після цього знайомимо студентів із загальним підходом до побудови графіків складених функцій, у яких зовнішня функція фіксована і її властивості відомі, а внутрішня функція будь-яка, але така, графік якої відомий або може бути побудованим, а отже відомі її властивості. В такий спосіб розглядаємо побудову графіків функцій $y = f^r(x)$, $y = a^{f(x)}$, $y = \log_a f(x)$, y=sin f(x), y=cos f(x), y= tg f (x), y = ctgf(x), y = arcsin f (x), y=arccos f(x), y=arctgf(x), y=arcctg f(x), у яких зовнішні степенева, показникова, логарифмічна, тригонометрична, обернено тригонометричні функції, а внутрішня - будь-яка функція графік, а отже властивості якої відомі. Розглянемо, наприклад, побудову графіка функції y = arcsin f (x).

Область визначення шукаємо з умови $-1 \le f(x) \le 1$. Якщо ж відомий графік функції y= f(x), то треба провести прямі y=-1, y=1 і для побудови шуканого графіка використати точки, що не виходять за смугу, утворену цими прямими. Враховуючи, що $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, то шуканий графік не вийде за межі смуги, утвореної прямими $y=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$. Звідси випливає, що шуканий графік не може мати ні вертикальних, ні похилих асимптот. Ще простіше вирішується питання парності, непарності та періодичності даної функції.

Нулі функцій f(x) і y=arcsin f(x) збігаються, тобто точки перетину графіка функції f(x) з віссю абсцис будуть і точками перетину шуканого графіка.

Для тих x, для яких f(x)=-1 $\arcsin f(x) = -\frac{\pi}{2}$, для тих x, для яких $f(x)=1$ $\arcsin f(x)=\frac{\pi}{2}$.

Оскільки обернений синус - функція зростаюча, то проміжки зростання (спадання) складеної функції збігаються в області її визначення з проміжками зростання (спадання) функції f(x). Враховуємо також, що для $0<x\leq 1$ $x<\arcsin x$, а для $-1\leq x<0$ $x>\arcsin x$. Отже, для тих x, для яких $0<f(x)\leq 1$ $f(x) < \arcsin f(x)$ (шуканий графік розташований вище відомого). Якщо ж $-1\leq f(x)<0$, то $f(x)>\arcsin f(x)$ (шуканий графік буде розташований нижче графіка функції f(x)). Після цього будуємо графік.

Тепер можемо конструювати цілу низку складених функцій, у яких зовнішня функція є обернений синус, а внутрішня - будь-яка елементарна, і на основі загального підходу будувати їх графіки.

В цьому ж спецкурсі розглядаємо з студентами побудову графіків інших функцій, зокрема тих, аналітичні вирази яких доцільно попередньо спростити (ними добре ілюструвати розширення чи звуження областей визначення рівняння та нерівностей при виконанні певних перетворень) або можна подати у вигляді суми чи добутку двох функцій, що містять знак модуля. Розглядаємо також побудову графіків деяких складених функцій, у яких зовнішня або внутрішня функції є не елементарними, побудову графіків рівнянь, що містять дві змінні.

Такий спецкурс не переобтяжений інформативно і в той же час формує продуктивне оперативне мислення, привчає до логічного аналізу, до узагальнень і конкретних висновків.

Впродовж багатьох років на учнівських олімпіадах різного рівня і форм все частіше пропонуються для розв'язування рівняння, пов'язані з функціями: ціла частина дійсного числа та дробова частина дійсного числа.

Розв'язання таких рівнянь має свої особливості і труднощі. Разом з тим вузівські програми їх вивчення не передбачають. І тому переважна частина випускників не має ніякого уявлення щодо їх розв'язування . Очевидно, це в якійсь мірі зумовлено і тим, що воно не розроблене ні теоретично, ні методично.

Тому постало актуальне завдання - розробити і впровадити спецкурс для студентів математичних відділень: "Розв'язування рівнянь, пов'язаних з функціями типу "ціла частина дійсного числа та дробова частина дійсного числа". Такий спецкурс (12) нами розроблено.

З точки зору сучасної технології навчання методично і дидактично виправдано спочатку ретельно розглянути властивості функцій $y=[x]$, $y=\{x\}$, побудувати їх графіки. Після цього розглянути побудову графіків складених функцій $y=f([x])$, $y=[f(x)]$, $y=f(\{x\})$, $y=\{f(x)\}$.

Вони допоможуть у пошуках загальних підходів до розв'язування окремих типів рівнянь. Зазначимо, що побудова графіків такого типу функцій з ілюстраціями на конкретних прикладах подана детально в (4), (5). Там же пропонується 70 вправ на побудову графіків функцій, сконструйованих дисертантом.

У спецкурсі розглянуто розв'язування таких типів рівнянь:

1. $f([x]) = 0$, $f([\varphi(x)]) = 0$.

2. $[f(x)] = \varphi(x)$.

3. $[f(x)] = [\varphi(x)]$.

4. $f(\{x\}) = 0$, $f(\{\varphi(x)\}) = 0$.

5. $\{f(x)\} = \varphi(x)$.

6. $[f(x)] = \{\varphi(x)\}$.

7. $[f(x)] = \varphi([x])$.

Де f і φ - елементарні функції.

Розглянемо, наприклад, розв'язування рівняння $f([x]) = \varphi(\{x\})$.

Тут необхідно попередньо з'ясувати таке: якщо функція $y=f(x)$ визначена для цілого аргументу n, то функція $y=f([x])$ визначена на всьому проміжку $[n;n+1)$, а якщо не визначена для n, то $y=f([x])$ не визначена на ньому. Оскільки функція $y=\{\{x\}\}$ періодична з періодом T = 1, то це означає, що коли функція $y=\varphi(x)$ визначена для $x_0\in[0\ 1)$, то функція $y=\varphi(\{x\})$ визначена і для x_0+n, $n\in Z$, а якщо функція $y=\varphi(x)$ визначена і неперервна на проміжку $<a;в>$, то функція $y=\varphi(\{x\})$ визначена і неперервна на проміжках виду $<a+n;в+n>$, $n\in Z$.

Якщо функція $y=\varphi(x)$ відображає проміжок $<a;в>\in[0;1)$ в проміжок $[c;d>$, то функція $y=\varphi(\{x\})$ відображає проміжки виду $<a+n;в+n>$ також в проміжок $<c;d>$.

Тепер важливо знати, як записати функцію $y=\varphi(\{x\})$ на кожному з проміжків $<a+n;в+n>$ без знака функції: дробова частина від дійсного числа.

Очевидно, будемо мати $y=\varphi(x-n)$, $n\in Z$. Тут необхідне вміння зробити з будь-якої элементарної функції періодичну із заданим періодом.

Отже, на проміжку $<a+n;в+n>$ корені рівняння $f([x])=\varphi(\{x\})$ слід шукати з рівняння $f(n)=\varphi(x-n)$, $n\in Z$.

Зрозуміло, що в загальному випадку перебрати усі цілі значення n практично неможливо. Проте пропонований спосіб дозволяє знайти корені на будь-якому з проміжків$<a+n;в+n>$, який нас цікавить.

Очевидно, при розв'язуванні конкретних рівнянь можна визначити ті n, для яких рівняння $f(n)=\varphi(x-n)$ не має розв'язку.

Насамперед треба вилучити ті значення n , для яких функція $y=f(x)$ не визначена. Рівняння також не матиме розв'язку і для тих значень n , для яких $f(n)>d$ або $f(n)<c$, де c, $d\in R$. Для цього розв'язують сукупність двох нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} f(n) > d, \\ f(n) < c. \end{array}\right.$$

У (12) значна увага приділена практичному застосуванню теорії: детально розглянуто розв'язування 61 рівняння.

Немає сумніву, що такий спецкурс спрямований безпосередньо на професійну підготовку майбутнього вчителя для роботи в середніх навчальних закладах,особливо в класах з поглибленим вивченням математики.

Проекспериментовані різні підходи до викладання такого спецкурсу. В результаті ми дійшли висновку, що навчальний процес треба організувати так, щоб студенти залучалися до участі в розробці теорії розв'язування таких рівнянь, бо при цьому проявляється їх навчально-дослідницька діяльність. Студенти нерідко висловлюють полярні точки зору. Співставлення думок та їх аналіз самими студентами з участю викладача дає змогу глибше вникнути в суть справи і тим самим знайти правильне вирішення поставленого завдання.

Відомо, що тригонометричні функції в математиці відіграють важливу роль. Студенти вивчали їх в шкільному курсі математики і дещо поглиблюють відомості про них у курсі математичного аналізу в інституті. Означення тригонометричних функцій пов'язувалося з евклідовою геометрією (одиничне коло або коло довільного радіуса з центром в початку координат). М.І.Лобачевський скористався синусом і косинусом, означеними за допомогою степеневих рядів.

Очевидно, висновки математичного аналізу не повинні залежати від вибору геометрії. Тому доцільно ввести для студентів старших курсів спецкурс, присвячений різним підходам до означення тригонометричних функцій і побудови їх теорій (15).

У спецкурсі розглянуто таких чотири:

1. Аналітична теорія тригонометричних функцій, означених за допомогою степеневих рядів.

2. Введення тригонометричних функцій за допомогою рівняння $y''= -y$.

3. Аксіоматичне означення і теорія тригонометричних функцій.

4. Функціональне означення і теорія тригонометричних функцій.

Такий спецкурс має методологічне значення, професійну спрямованість, носить пізнавальний характер, дає можливість застосувати набуті знання з математичного аналізу для глибокого пізнання нового, подивитися на одні і ті ж об'єкти з різних точок зору, під різним кутом, переконатися в еквівалентності різних означень.

Широке застосування в математиці знаходять опуклі функції. Пропонований нами спецкурс (13), (14) для студентів присвячений дійсним опуклим функціям однієї змінної.

В ньому всебічно розглядаються різноманітні властивості опуклих функцій, значна частина яких є критеріями. Особлива увага приділяється застосуванню опуклих функцій до розв'язування багатьох змістовних нестандартних задач, доведенню нерівностей та ін. Причому чимало із них доступні навіть учням старших класів.

Детально розглянуті нерівності Ієнсена, оскільки вони є характеристичними властивостями опуклих функцій і тому широко застосовуються в теорії і практиці опуклих функцій. Студенти мають можливість опанувати ефективним методом застосування цих нерівностей при доведенні класичних та інших нерівностей. Вказується також на доступний для учнів середніх шкіл спосіб введення нерівностей Ієнсена.

Розглядається значна кількість задач на застосування нерівностей Ієнсена для дослідження екстремальних властивостей опуклих функцій, інтегральних нерівностей та інших аспектів.

Такий спецкурс відіграє важливу роль у підготовці майбутнього вчителя математики, оскільки спрямований на розширення як фундаментальної, так і професійної підготовки.

Одне з важливих завдань, яке ставить перед собою вища школа, - навчити студента працювати (здобувати знання) самостійно. Проте донедавна навчальний процес, зокрема з математичного аналізу, не був забезпечений ні методично, ні дидактично для вирішення цієї проблеми.

Практично були відсутні посібники, які б слугували студентам путівником для самостійного здобуття нових знань. Тому нами були створені посібники (9), (10), метою яких є заповнити вказану прогалину. В них подані теоретичні відомості до кожного параграфа, причому в залежності від складності матеріалу він з'ясовується або досить детально, або формулюється у вигляді задачі.

Наведені зразки розв'язування багаточисленних задач, діапазон яких досить широкий - від вправ тренувального характеру до задач з елементами творчості та задач для практичних занять і самостійного розв'язування.

Посібники містять не тільки систематизовані методи розв'язування задач, але й прийоми конструювання нових об'єктів, зразки фрагментів математичної теорії (математичні твори).

Червоною ниткою проходить у них ідея, що основним об'єктом математичного аналізу є функція, а основним методом дослідження є метод граничного переходу. Користуючись посібником (9), студенти мають можливість переконатись, що глобальним завданням теорії функцій є їх конструювання, знаходження функції за значенням аргументу, знаходження значення аргументу за значенням функції, з'ясування властивостей функції, заданої різними способами, знаходження функції за її властивостями, використання методів математичного аналізу для розв'язання задач з інших розділів математики і прикладних задач.

Одним з найважливіших розділів математичного аналізу є диференціальне числення, яке найбільш пов'язане з шкільною програмою. Тому в посібнику (8) йому приділяється значна увага. Крім теоретичних відомостей, тут наведено чимало розв'язаних прикладів і задач різного цільового призначення. Більшість з них - це нестандартні задачі, які вимагають значних зусиль студентів при знаходженні шляхів розв'язування.

Підбір прикладів і задач підпорядковано переважно професійній підготовці вчителя математики.

У посібнику вміщено також задачі проблемного характеру, які розв'язуються нестандартними прийомами, що дозволяє виробляти у студентів навички дослідницького характеру.

Матеріал посібника допоможе студентам розкрити прикладне значення загальних методів математики, пов'язаних з дослідженням функцій і застосуванням основних властивостей диференційованих функцій. На зразках розв'язування задач і на задачах для самостійного опрацювання виховується у студентів воля, наполегливість і відповідальність, аргументоване обґрунтування істин, естетичний смак до математики, тобто ті якості, які вкрай необхідні майбутньому вчителю математики в його практичній роботі.

Опубліковані нами розробки (19) - (38) спрямовані в першу чергу на:

- дидактичну обробку відповідного теоретичного матеріалу з метою розкриття робочих можливостей основних теорем і методів їх доведення;

- створення системи вправ, завданням яких є поглибити розуміння основних ідей і методів математичного аналізу;

- набуття студентами навичок формування банку задач, зокрема теоретичного і навчально - дослідницького характеру;

- систематизацію інформації навколо певного математичного факту;

- ознайомлення з комбінаціями різних методів і прийомів доведення певних положень;

- прогнозування результатів і методів їх досягнення;

- організацію навчально-дослідної роботи студентів як однієї з дійових форм підвищення якості підготовки спеціалістів, що в значній мірі стимулює їх самостійну навчально-пошукову діяльність;

- показ того, що найкращим засобом засвоєння теоретичних знань, методів і способів є використання їх в конкретній діяльності;

- вміння самостійно конструювати головний об'єкт математичного аналізу - функції, побудову фрагментів математичної теорії.

Висновки

1. Дослідження засвідчили, що якісне дидактичне і методичне забезпечення математичних курсів, в тому числі і з фундаментальних дисциплін, дозволяє значно підвищити теоретичний і методичний рівень знань студентів, сприяє виробленню у них уміння застосовувати їх для розв'язання практичних завдань.

2. У педагогічно-математичній літературі неодноразово піднімалося питання про роль задач в навчанні математики, при цьому наголошувалося на незадовільне його вирішення. Запропонована нами система вправ на дослідження властивостей функцій та побудову їх графіків, на розв'язування рівнянь та нерівностей, в тому числі і синхронне, сприяє позитивному його вирішенню з відповідних розділів математики.

3. Запропонована нами система щодо функціональної спрямованості при вивченні практикуму з алгебри і тригонометрії дозволяє значно підвищити якість підготовки майбутніх учителів до роботи в різних типах навчальних закладів.

4. Викладання курсів з фундаментальних дисциплін необхідно тісніше пов'язувати з професійною підготовкою майбутнього вчителя математики. Так, при вивченні диференціального числення слід більше уваги приділити глибокому і широкому з'ясуванню властивостей елементарних функцій та застосуванню їх до інших тем і питань математики.

Сучасні ж програми і підручники передбачають лише поверховий їх огляд. Підбір задач і вправ повинен також бути підпорядкований професійній підготовці майбутнього вчителя.

5. Синхронне розв'язування рівнянь і нерівностей з практикуму значно інтенсифікує навчальний процес, розширює при цьому діапазон застосування властивостей функцій, дає можливість студентам зрозуміти те спільне і відмінне, що є між ними. Водночас вони опановують загальними методами розв'язування рівнянь і нерівностей.

6. Підтверджена доцільність функціонального підходу до вивчення багатьох питань математики, зокрема рівнянь і нерівностей, бо при цьому оживає в руках студента один із потужних математичних апаратів, дає їм можливість проявити елементи творчості, виводить їх на рівень широких узагальнень і теоретичних осмислень.

7. Експеримент показав, що при запропонованому нами підході до організації навчального процесу з практикуму і з врахуванням спецкурсу щодо вивчення властивостей функцій та побудови їх графіків дозволяє в значній мірі забезпечити майбутнім учителям підготовку до переходу на "функціональні рейки" при викладанні математики в навчальних закладах середньої ланки.

8. Підтверджено, що поряд з впровадженням спецкурсів з фундаментальних дисциплін слід впроваджувати спецкурси, які "працюють" безпосередньо на школу. Причому їх доцільно вводити вже на 2-3 курсах.

Досвід показує, що широке впровадження актуальних спецкурсів сприяє швидшому становленню у студентів аналітичного і методичного мислення.

9. У підготовці майбутніх учителів математики плідною виявилася ідея навчання студентів прийомам конструювання математичних об'єктів і особливо з наперед прогнозованими властивостями (створення банку задач, написання творів тощо). Це дозволяє проявити їм самостійну творчу працю, поглибити і розширити пізнавальну діяльність.

Основний зміст виконаного дослідження відображено в таких публікаціях автора:

Посібники

1. Практикум з розв'язування задач з математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педінститутів. - К.: Вища школа, 1975.-29 д.а. (у співавторстві, авторські §§ 3, 8 (розділ 1) , розділ II (повністю), стор. 318, 319, 336-339, 349-372) . Має гриф Міністерства освіти УРСР.

2. Практикум з розв'язування задач з математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педінститутів. Видання друге, перероблене і доповнене. - К.: Вища. школа, 1978. 31.- 28 д.а. (у співавторстві, авторські §§ 3, 8 (розділ 1), розділ II (повністю), стор. 346, 347, 363-369, 381-406) . Має гриф Міністерства освіти УРСР.

3. Практикум з розв'язування задач з математики: Навчальний посібник для студентів педвузів. Видання третє, перероблене і доповнене. - К.: Вища школа, 1989.- 32 д.а. (у співавторстві, авторські §§ 3,8 (розділ 1) , розділ II (повністю) , стор. 307, 308, 323-328, 339-365) . Має гриф Міністерства освіти УРСР.

4. Функції та їх графіки. Посібник для вчителів та студентів. - К.: Радянська школа, 1976.- 10 д.а.

5. Функції та їх графіки: Посібник для вчителів та студентів. Видання друге, доповнене. - К.: Радянська школа, 1983.-10,5 д.а.

6. Вступний курс математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педінститутів. - К.: Вища школа, 1990.- 8,0 д.а. (у співавторстві, авторських 2,5.- д.а.).

7. Збірник задач з алгебри для 6-8 класів: Методичний посібник.- К., Радянська школа, 1987.-10,08 д.а.

8. Диференціальне числення функції однієї змінної: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педінститутів. - К.: Вища

школа, 1991.-14,28 д.а. (у співавторстві, авторських - 7 д.а.). Має гриф Міністерства освіти УРСР.

9. Практикум з математичного аналізу (вступ до аналізу, диференціальне числення) . Затверджено Міністерством освіти України як навчальний посібник для студентів, що вивчають дисципліну "математичний аналіз". - К.: Вища школа, 1993.-22 д.а. (у співавторстві, авторських - 2 д.а.).

10. Практикум з математичного аналізу (інтегральне числення, ряди). Затверджено Міністерством освіти України як навчальний посібник для студентів педагогічних навчальних закладів. - К.: Вища школа. 1995.-32 д. а. (у співавторстві, авторських - 15 д.а.).

11. Елементарна математика. Алгебра для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. - К.: Вища школа, 1970.- 6 д.а. (у співавторстві, авторських - 4 д.а.) .

<u>Спецкурси</u>

12. Розв'язування рівнянь, пов'язаних з функціями: ціла частина дійсного числа і дробова частина дійсного числа. - Вінниця: ВДПІ, 1996.- 3,5 д.а.

13. Опуклі функції: Ч. І. - Вінниця: ВДПІ, 1993.- 4 д.а. (у співавторстві, авторських - 2 д.а.) .

14. Опуклі функції: Ч. ІІ - Вінниця: ВДПІ, 1995.- 3,5 д.а. (у співавторстві, авторских - 1,7 д.а.) .

15. Різні способи введення тригонометричних функцій. - Вінниця: ВДПІ, 1995.- 3 д.а. (у співавторстві, авторських - 1,5 д.а.) .

<u>Методичні розробки, рекомендації</u>

16. Розв'язування тригонометричних рівнянь (методична розробка). - Вінниця: ВДПІ, 1991.- 2,4 д.а.

17. Розв'язування тригонометричних нерівностей (методична розробка). - Вінниця: ВДПІ, 1994.- 2,6 д.а.

18. Розв'язування рівнянь, пов'язаних з оберненими тригонометричними функціями (методична розробка) . - Вінниця: ВДПІ, 1995.- 2 д.а.

19. Математика. Навчально-дослідна робота студентів (методичні рекомендації для студентів). - Вінниця: ВДПІ, 1990.-4,08 д.а. (у співавторстві, авторських - 2 д.а.) .

20. Математичний аналіз. Деякі питання програми державного екзамену з математики для студентів випускних курсів фізико - математичних факультетів. - Вінниця: ВДПІ, 1982.- 2,0 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,8 д.а.) .

21. Вступний курс математики. Методична розробка. Ч. І. - Вінниця: ВДПІ, 1983.- 2,6 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,8 д.а.) .

22. Вступний курс математики. Методична розробка: Ч. ІІ. - Вінниця: ВДПІ, 1983.- 2,6 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,8 д.а.).

23. Методика викладання математики: Контрольні роботи для студентів-заочників фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів. - К.: Навчально-методичний кабінет заочної освіти, 1970.-2,0 д.а. (у співавторстві, авторських -1 д.а.) .

24. Математичний аналіз. Основні властивості диференційовних функцій.- Ч. І.: Методична розробка для студентів фізико-математичного факультету. - Вінниця: ВДПІ.- 1984.- 2,77 д.а. (у співавторстві, авторських - 1,3 д.а.) .

25. Математичний аналіз. Основні властивості диференційовних функцій. Ч. ІІ. Методична розробка для студентів фізико-математичного факультету. - Вінниця: ВДПІ, 1984.- 2,7 д.а. (у співавторстві, авторських - 1,3 д.а.) .

26. Математичний аналіз. Самостійна робота. - Вінниця: ВДПІ, 1986.- 1,5 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,5 д.а.) .

27. Математичний аналіз. Самостійні роботи (ІІ семестр.) . - Вінниця: ВДПІ, 1987.- 1,2 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,4 д.а.) .

28. Математичний аналіз. Самостійні роботи (ІІІ семестр.).- Вінниця: ВДПІ, 1987.-1,9 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,6 д. а.).

29. Математичний аналіз. Метричні простори. - Вінниця: ВДПІ, 1987.- 2 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,7 д. а.) .

30. Математичний аналіз. Диференціальні рівняння, теорема існування.- Ч. І. - Вінниця: ВДПІ, 1988.- 2 д. а. (у співавторстві, авторських - 1 д.а.) .

31. Математичний аналіз. Самостійні роботи (IV семестр) - Вінниця: ВДПІ, 1988.-1,9 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,6 д. а.) .

32. Математичний аналіз. Самостійні роботи (V семестр.) . - Вінниця: ВДПІ, 1988.-1,8 д.а. (у співавторстві, авторських - 6,6 д.а.) .

33. Математичний аналіз. Самостійні роботи (VII семестр.). -Вінниця: ВДПІ. 1989.-2 д.в. (у співавторстві, авторських - 0,8 д.а.) .

34. Математичний аналіз. Диференціальні рівняння. Ч.ІІ. - Вінниця: ВДПІ, 1989.- 2,0 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,8 д.а.) .

35. Математика. Навчально-дослідна робота студентів. - Вінниця: ВДПІ, 1991.- 1,5 д.а. (у співавторстві. авторських - 0,5 д.а.) .

36. Елементи комбінаторики. - Вінниця: ВДПІ, 1996.- 4,4 д.а. (у співавторстві, авторських - 1,2 д.а.) .

37. Математичний аналіз. Навчально-дослідна робота студентів. - Вінниця: ВДПІ, 1984.- 2,0 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,7 д.а.) .

38. Математичний аналіз. Навчально-дослідна робота студентів других курсів. - Вінниця: ВДПІ, 1985.- 2,0 д.а. (у співавторстві, авторських - 0,8 д.а.) .

Статті

39. Побудова графіків деяких функцій // У світі математики. Науково-популярний збірник.- № 2. - К., Радянська школа, 1970.- 0,7 д.а.

40. Об использовании свойств функций при решении уравнений и неравенств // Математика в школе.-1970.- № 3.- 0,5 д.а.

41. Використання властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь і нерівностей // Методика викладання математики: Республіканський науково-методичний збірник. Вип. 6. - К.: Радянська школа, 1970.- 0,5 д.а.

42. Використання властивості монотонності елементарних функцій при розв'язуванні рівнянь і нерівностей // Методика викладання математики:

Республіканський науково-методичний збірник. - Вип. 7.- К.: Радянська школа, 1971.- 0.5 д.а.

43. Використання властивості парності та непарності функцій при розв'язуванні деяких рівнянь і нерівностей // Нове у викладанні математики: Збірник статей: - К.: Радянська школа, 1972.- 0,5 д.а.

44. Розв'язування деяких рівнянь і нерівностей на основі властивостей функцій // У світі математики: Науково-популярний збірник.- № 3. - К.: Радянська школа, 1972.- 0,5 д.а.

45. Алгоритм знаходження деяких складних тригонометричних функцій і його застосування до розв'язування нерівностей // Методика викладання математики. Республіканський науково-методичний збірник.- Вип, 6. - К.: Радянська школа, 1972.- 0,5 д.а.

46. Розв'язування деяких рівнянь, що містять знак функції антьє // Методика викладання математики: Республіканський науково-методичний збірник. Вип. 9. - К.: Радянська школа, 1974.- 0,5 д.а.

47. Розв'язування деяких рівнянь і нерівностей з параметрами // У світі математики: Науково-популярний збірник.- № 5. - К.: Радянська школа, 1974.- 0,5 д.а.

48. Дополнительные упражнения на исследование функций // Математика в школе.- № 3 - 1981.- 0,5 д.а.).

49. Деякі зауваження до "Практикуму з розв'язування задач" // Матеріали республіканської науково-практичної конференції "Проблема удосконалення навчального процесу в педагогічному вузі." - К.: 1975.- 0,2 д.а.

Шунда Н.Н. Формирование знаний об элементарных функциях в профессиональной подготовке учителя математики.

Диссертация в форме пособия на соискание ученой степени доктора педагогических наук по специальностям 13.00.04 - профессиональная педагогика и 13.00.02 - методика обучения (специальным дисциплинам).

Институт педагогики и психологии профессионального образования АПН Украины, Киев, 1997.

Защищается диссертация, в которой дано теоретическое обоснование необходимости формирования знаний об элементарных функциях в профессиональной подготовке учителей математики. Разработано её содержание, нашедшее отражение в пособиях, спецкурсах, методических рекомендациях, статьях. Указаны пути, формы, методы практического осуществления задачи и условия, способствующее её решению при подготовке учителей математики в пединституте.

Теоретические выводы базируются на значительном фактическом материале: изучении уровня знаний студентов и учителей, анкетировании, экспериментальной апробации.

Shunda N.N. Formation of the knowledge about elementary functions in the mathematics professional training.

Thesis in the form of manual for the degree of Doctor of Pedagogical Science on the specialities 13.00.04-Professional Pedagogies and 13.00.02-Methods for teaching (special disciplines). Institute of Pedagogies and Psychology of Professional Education of the Ukrainian Academy of Pedagogical Science , Kiev, 1997.

Present thesis gives theoretical grounds for the necessity of formation of the knowledge about elementary functions in the process of mathematics teacher professional training. Professional training content is worked out and reflected in manuals, methodial recommendations, special courses, articles. Ways, forms and methods for practical realization of said objective are indicated as well as conditions contributing to solving of this problem in the process of mathematics teacher professional training in pedagogical institute. Theoretical conclusions are based upon substatial actual material such as studying the level of students and teachers knowledge, guestionnaries, experimental verification.

Ключові слова: дидактичне і методичне забезпечення навчального процесу, професійна спрямованість, інтенсифікація навчального процесу, технологія навчання, конструювання об'єкта, співставлення, множина, функція та її властивості, рівняння, нерівність, синхронне розв'язування рівнянь та нерівностей, практикуми з математики, спецкурси, посібники, задачі та вправи.

ВИДРУКУВАНО З ОРИГІНАЛ-МАКЕТУ
В ЛАБОРАТОРІЇ КОПІЮВАЛЬНОГО ДРУКУ
ВІННИЦЬКОГО ДЕРЖАВНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО
ІНСТИТУТУ

Вінниця, вул. Острозького 32

Зам. 70 . Т. 100.

438969

AB 36.483