

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ**

**Сумський Державний Університет**

**На правах рукопису**

**Харченко Дмитро Олегович**

**ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ В СИСТЕМАХ  
З МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМ ШУМОМ**

**спеціальність 01.04.02 - теоретична фізика**

**АВТОРЕФЕРАТ**

**дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук**



**Суми 1996**

330.1

AB 36.528

Дисертацією є рукопис  
Робота виконана в Сумському державному університеті  
Науковий керівник

ЛНБ України ім.В.Стефаника



00760714 (P)

доктор фізико-математичних наук

професор Олемської Олександр Іванович

Офіційні опоненти

доктор фізико-математичних наук,

академік АНУ Пелетмінський Сергій Володимирович

доктор фізико-математичних наук,

Клепиков Вячеслав Федорович

Ведуча організація

Харківський державний університет

Захист відбудеться "29" січня 1997 р. о 14<sup>00</sup> год.

на засіданні спеціалізованої вченої ради Д.02.11.02

при Інституті монокристалів НАН України

310001 м.Харків, пр.Леніна, 60

Інститут монокристалів НАН України

зал засідань

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці

Інституту монокристалів НАН України

Автореферат розісланий " " \_\_\_\_\_ 1996р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради

Атрощенко Л.В.

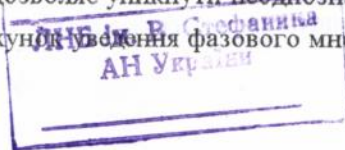
## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність роботи.** Відомою особливістю теорії стохастичних систем є залежність від вибору числення (Іто, Стратоновича та інші). На відміну від неоднозначності потенціалу калібровочного поля, що не проявляється при переході до напруженості, яка вимірюється у експерименті, неоднозначність у опису стохастичної системи приводить до значних змін у розподілі ймовірності мікростану стохастичної системи при переході від одного числення до другого. Характерно, що така неоднозначність проявлюється тільки при наявності мультиплікативного шуму, який представляє зовнішній вплив флуктуюючого середовища на стохастичну систему. На відміну від внутрішніх флуктуацій, які представляють адитивний шум, дія зовнішніх шумів може привести до зміни виду стаціонарної функції розподілу мікростану стохастичної системи. Більше того, вона може набувати сингулярного характеру, що обумовлює порушення ергодичності типу, який спостерігається при склюванні рідини. В останній час з'явилися також роботи, що вказують на можливість втрати симетрії стохастичної системи. Разом з тим, послідовна теоретична схема, що дозволяє в рамках єдиного підходу представити статистичний опис стохастичної системи, до цього часу була відсутня. В зв'язку з цим стає актуальною задача побудови послідовної схеми опису стохастичної системи з довільним мультиплікативним шумом, в якій можливі ефекти порушення симетрії та ергодичності.

**Метою роботи** є теоретичне дослідження характеру поведінки стохастичної системи з довільним мультиплікативним шумом та наявності міжчасткової взаємодії.

### Наукова новизна

- Вперше побудована схема калібровочного перетворення стохастичної системи, яка дозволяє уникнути неоднозначності її ймовірносного опису за рахунок введення фазового множника у



функцію розподілу, з одного боку, та перенормування синергетичного потенціалу, з другого.

- Вперше розроблено підхід, який дозволяє самоузгодженим способом представити порушення симетрії та ергодичності стохастичної системи з довільним мультиплікативним шумом та міжчастковою взаємодією.
- Вперше розглянуто вплив внутрішнього шуму на поведінку синергетичної системи, для якої супідрядність гідродинамічних мод приводить до трансформації адитивного шуму в мультиплікативний.

### **Наукові положення, що виносяться на захист**

1. Однозначний опис стохастичної системи досягається за рахунок калібровки розподілу ймовірності, що дозволяє компенсувати появлення фіктивної сили, пов'язаної з вибором числення.
2. Область визначення стохастичної системи в фазовому просторі має фрактальний характер, розмірність якої обмежено значеннями 0, 2. При малих значеннях фрактальної розмірності стохастична система може зазнавати втрату ергодичності, при великих – порушення симетрії.
3. В силу принципу супідрядності для ступенів вільності синергетичної системи адитивні шуми управляючого параметру та спряженого поля трансформуються в мультиплікативні, а для параметру порядку адитивний шум залишає свою природу.

### **Практична цінність**

Одержано формули, що виражають найбільш ймовірне значення реалізації стохастичної системи, а також параметри скловання та дальнього порядку в залежності від інтенсивності та характеру мультиплікативного шуму. Вони дозволяють прогнозувати властивості конденсованого середовища, далекого від стану рівноваги, що спостерігаються в експериментах.

## **Апробація роботи**

За матеріалами дисертації опубліковано 7 наукових робіт. Основні результати були повідомлені на X зимовій школі з механіки суцільних середовищ (Пермь, 1995); III Черкаському семінарі країн співдружності "Актуальні питання дифузії, фазових структурних перетворень в сплавах" (Сокірне, 1995); науково-технічній конференції "Техніка та фізика електронних систем та пристроїв" (Суми, 1995); науково-практичній конференції молодих вчених Республіки Хакасія "Молодь і наука – третє тисячоріччя" (Абакан, 1995); конференції по міцності та пластичності (Барнаул, 1996); наукових семінарах ХДУ (м.Абакан) та СумДУ (м.Суми).

## **Особистий внесок автора**

У всіх роботах внесок дисертанта оцінюється 50%. В роботі [1] участь автора зводилась до аналітичного рішення задачі, що була поставлена науковим керівником дисертанта. В останніх роботах проводилось як аналітичне, так і числене рішення задач.

## **Структура та обсяг роботи**

Дисертаційна робота складається з вступу, чотирьох глав, висновку та списку літератури. Обсяг дисертаційної роботи складає 123 сторінки, враховуючи 15 малюнків та бібліографію з 70 найменувань.

## **Основний зміст роботи**

У вступі обґрунтована актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовані мета та задачі дослідження, а також основні положення, які виносяться на захист.

**Розділ 1**, що несе оглядовий характер, присвячений вислову математичного апарату, який використовується при опису стохастичної системи. В розділі 1.1 приведено стандартну схему одержання стохастичного рівняння Ланжевена. Було показано, що зовнішній шум не зводиться до зникаючих у термодинамічній границі внутрішніх флуктуацій. Розділ 1.2 присвячений викладанню схеми, що веде до різних числень. З'ясовано, що вибір числення задається способом визначення

похідної від часової залежності координати стохастичної частки. Показано, що неоднозначність визначення цієї похідної приводить до появи фіктивної сили, яка залежить від роду числення. Ця сила додається до реальної детерміністичної складової, що входить до рівняння Фоккера–Планка. В численні Іто фіктивна сила зводиться до нуля, при переході до числення Стратоновича з'являється додаток, пропорційний інтенсивності шуму та похідній від ефективного коефіцієнту дифузії. В кінетичній формі Клімонтовича величина цього додатку подвоюється. Доведено, що множина можливих числень є континуальною, і таким чином реалізується континуальний набір можливих силових додатків. Характерно, що вони істотно входять в рішення рівняння Фоккера–Планка, в результаті чого статистична схема стає неоднозначно визначеною. В розділі 1.3 показано, що вказана довільність при виборі числення відбивається не тільки на рівнянні Фоккера–Планка, але й на вигляді генеруючого функціоналу, на використанні якого побудовані сучасні польові теорії. Виявляється, що при переході від одного числення до іншого лагранжиан, також як і сила придбаває довільний додаток. Розділ 1.4 присвячений вислову різних способів виводу рівняння Фоккера–Планка та його рішення. В розділі 1.4.1 стохастичне рівняння руху представлено без допомоги похідної, а в диференційній формі Іто. Було показано, що в межах такого наведення довільна сила з'являється вже в самому рівнянні руху. Безумовно, ця сила залишається також при переході до відповідного рівняння Фоккера–Планка (при цьому використовується метод, побудований на розгляданні величин, посереднених по розподілу, що є рішенням цього рівняння). У розділі 1.4.2 висловлена схема переходу від стохастичного рівняння руху до рівняння Фоккера–Планка, яка заснована на кінетичному підході Клімонтовича. У розділі 1.4.3 рівняння Фоккера–Планка виводиться із управляючого рівняння. Це дозволяє найбільш прямим способом з'ясувати математичну природу фіктивної сили. Заключний розділ 1.4.4 присвячений дослідженню випадків, коли рівняння Фоккера–Планка має аналітичне рішення. Показано, що така ситуація реалізується у стаціонарному

випадку, або в автомоделному режимі, де часова залежність вміщується тільки у характерному значенні стохастичної змінної, що відіграє роль масштабу.

**Розділ 2** присвячений дослідженню впливу довільного мультиплікативного шуму на характер поведінки стохастичної системи. Оскільки наш розгляд базується на стаціонарному рішенні рівняння Фоккера–Планка, то в розділі 2.1.1 проведене дослідження природи сили, що виникає за рахунок довільності у виборі числень. Доведено, що ця сила має бути скомпенсована, якщо вихідну густину ймовірності виразити через пернормовану функцію розподілу [1]

$$\tilde{P}(x,t) = P(x,t) \exp(-\alpha(x)), \quad (1)$$

що підпорядковується канонічному рівнянню Фоккера–Планка, одержаному із розкладання управляючого рівняння. Зіставлення еволюційного рівняння для вихідного розподілу  $P(x,t)$  з канонічним  $\tilde{P}(x,t)$  показує, що опис стохастичної системи стає однозначним при використанні вимог

$$\nabla \alpha - \nabla \ln \nabla \alpha = -2 \nabla V / T g^2 + 2 \lambda \nabla \ln g^2, \quad (2)$$

$$\nabla \alpha = \nabla (\tilde{V} - V) / T g^2 + \lambda \nabla \ln g^2, \quad (3)$$

де  $V$  – затравний синергетичний потенціал,  $\tilde{V}$  – перенормований,  $T$  – інтенсивність шуму,  $g(x)$  – мультиплікативна функція,  $\lambda$  – довільна константа, що задає вибір числення. Згідно (2), (3) розподіл фази дається виразом

$$\alpha(x) = \ln \int \exp\{U(x) / T\} dx \quad (4)$$

що задається виглядом ефективного синергетичного потенціалу

$$U(x) = 2 \int \frac{d\tilde{V}(x) / dx}{g^2(x)} dx. \quad (5)$$

Відповідний розгляд для зворотнього рівняння Колмогорова

(розділ 2.1.2) показує, що в рівнянні, розглянутим раніше, випадком прямого рівняння Колмогорова відміна калібровок (1) зводиться до зміни знаку перед показником експоненти.

Таким чином, у рамках наближення білого шуму потрібно використати не вихідне рівняння Фоккера–Планка для  $P(x,t)$ , рішення якого залежить від вибору числення, що виявляється значенням  $\lambda$ , а канонічну форму Іто для перенормованого розподілу  $\tilde{P}(x,t)$ . При цьому синергетичний потенціал  $\tilde{V}(x)$  розглядається як залежність, яка має первісний фізичний смисл, а  $V(x) = \tilde{V}(x) + \lambda T(g(x))^2$  – як не маючий його затравний потенціал. Така калібровка ймовірності знімає питання про вибір числення. З другого боку, вказаний показник експоненти виявляє характер поведінки стохастичної системи в усьому інтервалі її еволюції.

Центральне місце займає розділ 2.2, присвячений опису поведінки стохастичної системи в залежності від характеру мультиплікативного шуму, що представляється функцією  $g(x) = \sqrt{2}x^a$ , де  $a$  – довільний показник. Вихідний синергетичний потенціал  $\tilde{V}(x)$  прийнятий розкладанням Ландау. В розділі 2.2.1 досліджується перехід, індукований шумом при якому густина ймовірності якісно змінює свій вигляд, але не набуває сингулярності. Було показано, що найбільш ймовірні значення стохастичної змінної задаються рішенням рівняння

$$x^2 + (2a/\alpha)\Theta x^{-2(1-a)} + \Theta = 1, \quad (6)$$

де  $\alpha, T$  – параметри розкладання Ландау,  $\Theta \equiv T/T_c$  – безрозмірна інтенсивність шуму. Залежність температури переходу  $\Theta_0 \equiv T_0/T_c$  від показника мультиплікативної функції, задається рівнянням

$$\frac{(1 - \Theta_0)^{2-a}}{\Theta_0} = \frac{2a(2-a)^{2-a}}{\alpha(1-a)^{1-a}} \quad \Theta_0 \equiv \frac{T_0}{T_c}. \quad (7)$$

Виявляється, що перехід має неперервний характер тільки в граничних

випадках адитивного шуму ( $a=0$ ) та при лінійному характері мультиплікативної функції ( $a=1$ ).

Розділ 2.2.2 присвячений дослідженню стохастичної системи при значних швидкостях зростання мультиплікативної функції, коли густина ймовірності набуває неінтегруючу розбіжність. На основі аналізу можливих виглядів розподілу фази  $\alpha(x)$  визначена поведінка стохастичної системи у всьому часовому інтервалі її еволюції. Показано, що реальні режими реалізації при значеннях показника мультиплікативної функції  $a \in [0,1]$ . Детерміністичний режим, відповідаючий залежності  $x(t) = 0$ , реалізується тільки у випадку  $a > 1/2$ , де система набуває безмежну ймовірність у точці  $x = 0$ . Нормування відповідної функції розподілу досягається за рахунок виділення  $\delta$  – подібної особливості:

$$P(x) = C\delta(x) + P_0(x)P'(x), \quad (8)$$

відповідаючої випаданню детерміністичного конденсату, густина якого визначається величиною  $C$ . Тут  $P_0(x) = Z_0^{-1} x^{-2a}$  і  $P'(x) = (1/Z') \exp(-U(x)/T)$  – складені функції розподілу  $\tilde{P}(x)$ , що представляють місцевість та периферію конденсату. Встановлено, що стохастичний режим у лобий момент часу реалізується на рівні з детерміністичним при  $0 < a < 1/2$ , а при  $1/2 < a < 1$  система досягає положення  $x = 0$  за кінцевич час.

Самоузгоджена поведінка конденсату, що означена константою  $C$ , задається умовою нормування розподілу (8)

$$C = 1 - 1/Z' \quad Z' = \int \exp(-\lambda x^{2(1-a)} - \mu x^{2(2-a)}) dx, \quad (9)$$

де  $Z'$  – нормуюча константа, що відповідає розподілу  $P'(x)$ ,  $\lambda = A/2T(1-a)$ ,  $\mu = B/2T(2-a)$ ,  $1/2 < a < 1$ . Чисельний аналіз

залежності  $C(\Theta)$  показав, що з зростанням інтенсивності шуму  $\Theta = T/T_c$  густина конденсату спадає від значення  $C = 1$  при  $\Theta = 0$ , до  $C = 0$  при критичній величині  $\Theta_c$ . Що до великих значень термодинамічного стимулу до упорядкування  $\alpha$  зниження густини конденсату проходить при наступній умові: чим вище значення показника  $a$ , тим більше відповідне значення  $\Theta$  інтенсивності шуму. У випадку  $\alpha \approx 1$  в області малих  $\Theta$  зростання показника так само приводить до збільшення густини конденсату, а при великих  $\Theta$  – до зменшення. Залежність  $\Theta_c(a)$  критичної інтенсивності шуму від показника мультиплікативної функції при малих  $\alpha$  монотонно спадає, а при великих  $\alpha$  – зростає. При малих  $\alpha < 1$  детерміністичний конденсат реалізується при всіх значеннях інтенсивності шуму. Показано, що густина відіграє роль параметру Едвардса–Андерсона при склованні рідини.

В розділі 2.3 було з'ясовано, що довільність у виборі числення, а також виявлена в розділі 2.2 картина фазових переходів обґрунтовані тим, що область визначення стохастичної змінної в фазовому просторі має фрактальний вигляд. При цьому, слідуючи стандартній методиці, ми виходимо з уявлення отриманої картини фазових переходів функцією  $\chi(t)$ , що описує часову залежність координати частки в процесі узагальненої дифузії з коефіцієнтом  $(T/2)g^2$ . Тоді із співвідношення Херста  $a(t) \propto t^H$  для характерного значення  $a(t) \equiv \langle x^2(t) \rangle^{1/2}$  (масштабу вимірювання) стохастичної змінної виходить визначення показника Гольдера

$$H^{-1} = 2(1 - a), \quad (10)$$

що задає максимальний порядок похідної від неаналітичної функції  $a(t)$ , через параметр теорії  $a$ . Згідно (10) при адитивному шумі ( $a = 0$ ) реалізується процес  $a(t) \propto t^{1/2}$ , який відповідає звичайній дифузії. При

цьому залежність  $\chi(t)$  не має навіть першої похідної. Хоча з ростом параметру  $a$  показник Гольдера  $H$  збільшується, така ситуація залишається до значень  $a = 1/2$ . В інтервалі  $1/2 < a < 3/4$  маємо  $1 < H < 2$ . При цьому сама залежність  $\chi(t)$  гладка, однак її перша похідна вже неаналітична. Для довільного інтервалу  $(2n-1)/2n < a < (4n-1)/2n$  гладкими функціями є всі похідні до  $n$ -го порядку включно. При  $0 < a < 1/2$  неаналітична залежність  $\chi(t)$  має настільки складний вигляд, що стохастичний процес “заплутується” в неї, та детерміністичний конденсат не створюється.

Приведені особливості залежності  $\chi(t)$  відзначають, що її графік має фрактальний вигляд типу того, що реалізується для функції Вейерштрасса. Кількісною характеристикою такої залежності є, як відомо внутрішня фрактальна розмірність  $D = H^{-1}$ . При  $0 < a < 1/2$  маємо  $2 > D > 1$  і графік залежності  $\chi(t)$  представляє геометричний об'єкт, що займає проміжне положення між лінією та площиною. Це позначає настільки значне розширення області задання функції розподілу  $P(x, t)$ , що конденсатна складова  $C\delta(x)$  не проявлюється ( $C = 0$ ). Відповідно при  $1/2 < a < 1$  маємо  $1 > D > 0$ , і область визначення функції  $P(x, t)$  займає проміжне положення між лінією і точкою. Таке значне збіднення стохастичного процесу обумовлює замерзання системи у детерміністичному конденсаті.

Первісною причиною показаної поведінки стохастичної системи є фрактальний вигляд залежності  $W(x, y)$ , яка визначає в управляючому рівнянні інтенсивність переходів між мікростанами. Із властивостей самоафіності був знайдений вигляд цієї функції на границі  $x, y \rightarrow 0$ . Оскільки для фрактальної області визначення шукана функція є

однорідною, то з урахуванням асимптотики  $P(x) \propto x^{2a}$  та виконання умови детальної рівноваги для ймовірності переходів та виразу мультиплікативної функції через  $W(x, y)$  добуті залежності

$$W(x, y) = \begin{cases} x^{-(1+D)} \varphi(y/x), & x \ll y, \\ y^{-3} \psi(x/y), & y \ll x \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, як на границі  $x \ll y$ , де  $W \propto x^{-(1+D)}$  так і при  $x \gg y$ ,  $W \propto y^{-3}$  функція  $W(x, y)$  має сингулярний характер. Відповідно, дрейфова та дифузійна складені рівняння Фоккера–Планка мають асимптотики  $f_s \propto x^{1-D}$ ,  $g \propto x^{1-D/2}$ . З ростом параметру  $a$  (змінюю фрактальної розмірності  $D$ ) знайдені сингулярності послаблюються, що й обумовлює при  $a > 1/2$  випадання детерміністичного конденсату.

На границі  $x \rightarrow 0$  сингулярна сила  $f_s \propto x^{1-D}$  має той самий характер, що й уявна сила  $h = 2\lambda(2-D)Tx^{1-D}$  в рівнянні Фоккера–Планка, яка залежить від вибору числення. Оскільки первісною причиною появи обох сил є фрактальний характер фазового простору системи, то їх залежність від  $x$  виявляється однаковою. Проте, являючись моментом першого порядку, сила  $f \propto T^{1/2}$  пропорційна амплітуді шуму, а сила  $h \propto T$  – його інтенсивності. Крім цього, сингулярна сила  $f_s$  не має довільного параметру  $\lambda$ , величина якого визначає уявну силу  $h \propto \lambda$ , а тим самим і вибір числення. Сила  $f_s$  завжди направлена в сторону точки  $x = 0$ , в той час як детерміністична сила  $f = -\partial U / \partial x \propto x^{D-1}$  змінює свій напрям від  $x = 0$  до  $x^0 = (-A/B)^{1/2}$  тільки при  $\Theta < 1$ . В цьому випадку випадання детерміністичного конденсату цілком забезпечується дією сили  $f_s$ , яка набуває поблизу точки  $x = 0$  найбільш сингулярний характер.

Звичайно при розгляданні стохастичної системи приймається, що в

моделюємому сю багаточастковому ансамблі відсутня взаємодія. У зв'язку з цим до останнього часу не були виявлені фазові переходи, що розуміються в термодинамічному змісті. Розділ 3 присвячений дослідженню впливу міжчасткової взаємодії на характер поведінки стохастичної системи [2]. В розділі 3.1 отримано стохастичне рівняння руху, що вміщує силу міжчасткової взаємодії, яка записана в наближенні середнього поля

$$f_i = -w(x - \eta), \quad (12)$$

де уведено характерне значення енергії взаємодії  $w = cz$ ,  $z$  – число ближніх сусідів, і визначення параметру дальнього порядку  $\eta \equiv \langle x \rangle$ . З виду стаціонарного розподілу ймовірності виходить, що міжчасткова взаємодія приводить до перенормування критичної температури  $T_c = T_{c0} - w/\alpha$  та появи внеску до ефективного потенціалу, який має мінімальну ступінь величини стохастичної змінної.

Дослідження можливих типів розбіжностей рішення стаціонарного рівняння Фоккера–Планка дозволяє визначити типи переходів в стохастичній системі при різних значеннях показника  $a$  мультиплікативної функції  $g = \sqrt{2}x^a$ .

Розділ 3.2 присвячений дослідженню картини порушення симетрії, що реалізується у випадку  $a < 1/2$ . Згідно умові нормування розподілу стаціонарних станів статистична сума має вигляд

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2a} \tilde{P}(x) P_{\eta}(x) dx, \quad (13)$$

$$\tilde{P}(x) \equiv \exp\{-\lambda x^{2(1-a)} - \mu x^{2(2-a)}\}, \quad (14)$$

$$P_{\eta}(x) \equiv \exp(\nu \eta x^{1-2a}), \quad (15)$$

де  $\nu = w / (1 - 2a)\Theta T_c$ , а температурна  $\Theta = T / T_c$  виміряна в одиницях перенормованої критичної температури  $T_{c0}$ . Фактор  $P_{\eta}(x)$ , пов'язаний

з дальнім порядком  $\eta \neq 0$ , має асиметрію відносно заміни  $-x \rightarrow x$ , яка обумовлює втрату симетрії при упорядкуванні. Величина  $\eta = \langle x \rangle$  задається умовою самоузгодження

$$\eta = Z^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{1-2a} P_{\eta}(x) \tilde{P}(x) dx. \quad (16)$$

Диференціюючи обидві частини по  $\eta$  одержуємо необхідну умову реалізації фазового переходу

$$1 = (\nu / Z(0)) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(1-2a)} \tilde{P}(x) dx, \quad Z(0) \equiv Z(\eta = 0), \quad (17)$$

що визначає температуру фазового перетворення  $\Theta_0$ . Оскільки інтеграл в правій частині (17) має позитивне значення, то  $\nu > 0$  то параметр взаємодії  $w = (1 - 2a)\Theta T_c \nu$  також позитивний.

Аналіз рівняння (17) показує, що параметр дальнього порядку  $\eta \neq 0$  при значеннях показника мультиплікативної функції  $0 < a < 1/2$ , а при  $1/2 < a < 1$  дальній порядок відсутній ( $\eta = 0$ ). Враховуючи визначення фрактальної розмірності, бачимо, що дальній порядок реалізується при значеннях фрактальної розмірності  $1 < D < 2$ , а при  $0 < D < 1$  маємо  $\eta = 0$ . Очевидно така поведінка відповідає гарно відомому факту флуктуаційного зруйнування дальнього порядку в системах з розмірністю  $D \leq 1$ . Побудована залежність параметру дальнього порядку від інтенсивності шуму, а також відповідна фазова діаграма (див.рис.1,2).

Їх характерна особливість полягає у нерегулярному вигляді температурної залежності параметру порядку  $\eta(\Theta)$  і фазової діаграми  $\Theta(w)$ . Це з'ясовується тим, що із зменшенням розмірності до критичного значення  $D = 1$ , відбувається настільки значне звуження фазового простору, що зі збільшенням температури починають виявлятися

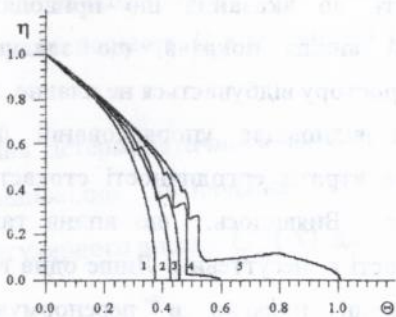


Рис.1 Температурна залежність параметру дальнього порядку  $\eta$  при різних значення показника  $a=0; 0.2; 0.3; 0.4; 0.45$  (криві 1–5)

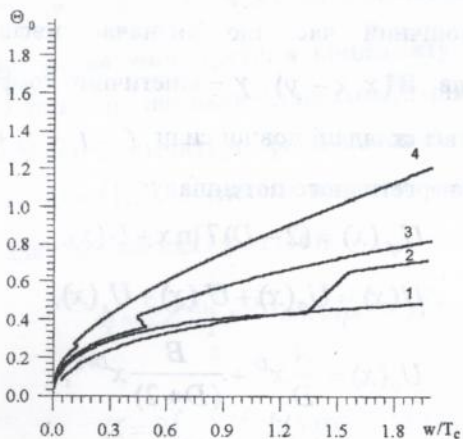


Рис.2 Залежність температури переходу від параметра міжчасткової взаємодії при різних значення показника  $a=0.3; 0.4; 0.42; 0.45$  (криві 1–4)

флуктуації, що приводять до вказаних що приводять до вказаних особливостей. Чисельний аналіз показав, що завдяки кластеризації фрактального фазового простору відбувається не плавне, а стрибкоподібне звуження області, що відповідає упорядкованій фазі. Розділ 3.3 присвячений дослідженню втрати ергодичності стохастичної системи з міжчастковою взаємодією. Виявилось, що вплив такої взаємодії на картину втрати ергодичності є несуттєвим. Лише одна відміна від систем без міжчасткової взаємодії полягає в перенормуванні критичної температури, що входить у розкладання Ландау.

У розділі 3.4 міститься аналіз зв'язку фрактальної природи фазового простору з характером поведінки стохастичної системи. При цьому було враховано не тільки сили міжчасткової взаємодії, але й представлені у розділі 2.4 сили, вираз якої має вигляд

$$f_s = -T(T_s / T)^{1/2} x^{1-D}, \quad T_s \equiv 4 / \pi \tau_0 \gamma. \quad (18)$$

Тут  $\tau_0$  - мікроскопічний час, що визначає масштаб вимірювання швидкості переходів  $W(x, x - y)$ ,  $\gamma$  - кінетичний коефіцієнт.

Враховуючи всі складані повної сили  $f = f_s + f_0 + f_i$  здобуто вираз для ефективного синергетичного потенціалу:

$$U_{ef}(x) = (2 - D) T \ln x + U(x); \quad (19)$$

$$U(x) = U_0(x) + U_i(x) + U_s(x), \quad (20)$$

$$U_0(x) = \frac{A}{D} x^D + \frac{B}{(D+2)} x^{D+2}, \quad (21)$$

$$U_i(x) = w \left( \frac{x^D}{D} - \eta \frac{x^{D-1}}{D-1} \right), \quad (22)$$

$$U_s(x) = \frac{(T_s T)^{1/2}}{2 - D} x^{2-D} \quad (23)$$

З виду потенціалу  $U_s(x)$ , що обумовлений вкладом сингулярної сили витікає, що зростання фрактальної розмірності приводить до зменшення

показника стохастичної змінної  $X$ . Так, для адитивного шуму ( $D = 2$ ) сингулярний доданок  $U_s$  в потенціалі  $U_{ef}(x)$ , як і повинно бути, зникає.

Випадання детерміністичного конденсату відбувається в області  $D \leq 1$ . Тоді, відповідно визначенню густини конденсату (9) при врахуванні сингулярного внеску  $U_s(x)$  для статистичної суми, маємо

$$Z = \int_0^{\infty} \tilde{P}(x) dx, \quad (24)$$

де

$$\tilde{P}(x) = \exp(-\kappa x^{2-D} - \lambda x^D - \mu x^{2+D}), \quad (25)$$

$$\kappa = \frac{(T_s / T_c)^{1/2}}{2 - D} \Theta^{1/2}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{D} (1 - \Theta^{-1}), \quad \mu = \frac{\alpha}{2 + D} \Theta^{-1} \quad (26)$$

Характерно, що у розподілу (25) відсутній дальній порядок ( $\eta = 0$ ).

Чисельний розрахунок густини конденсату  $C$  в залежності від температури  $\Theta$  показав, що включення сингулярної сили приводить до зменшення критичної температури формування конденсату.

В області  $D \in (1, 2]$  в системі існує дальній порядок. Параметр дальнього порядку має вигляд (зр. з (16))

$$\eta = 2Z^{-1} \int_0^{\infty} x^{D-1} \operatorname{sh}(v\eta x^{D-1}) \tilde{P}(x) dx. \quad (27)$$

$$Z = 2 \int_0^{\infty} x^{D-2} \operatorname{ch}(v\eta x^{D-1}) \tilde{P}(x) dx. \quad (28)$$

$$v = \frac{w / T_c}{D - 1} \Theta^{-1}, \quad (29)$$

де розподіл  $\tilde{P}(x)$  задається рівняннями (25), (26). Точка фазового перетворення визначається рівнянням (зр. з (17))

$$Z(0) = 2\nu \int_0^{\infty} x^{2(D-1)} \tilde{P}(x) dx. \quad (30)$$

Чисельний аналіз залежності  $\eta(\Theta)$  і фазової діаграми  $\Theta_0(w)$  показав, що збільшення сингулярного вкладу якісних змін на залежностях  $\eta(\Theta)$  і  $\Theta_0(w)$  не відбувається. Тут також проявлюється зменшення температури переходу з ростом параметру  $K$  (див. (26)), що задає ефективність впливу фрактальності фазового простору. Має бути визначено те, що параметр дальнього порядку і фазова діаграма зберігають нерегулярності.

Вплив сингулярного внеску на індукований шумом перехід виявляється з рішень рівняння екстремумів

$$x_0^2 + \frac{2-D}{\alpha} \Theta x_0^{-D} - \frac{w\eta}{\alpha T_c} x_0^{-1} + \alpha^{-1} \left( \frac{T_s}{T_c} \right)^{1/2} x_0^{2(1-D)} = 1 - \Theta, \quad (31)$$

що дійсні, коли інтенсивність шуму не перевищує значення  $\Theta_0$ , яке визначається рівнянням:

$$x_0^2 + \frac{D-1}{D+2} \frac{w\eta}{\alpha T_c} x_0^{-1} + \frac{2-D}{2+D} \alpha^{-1} \left( \frac{T_s}{T_c} \right)^{1/2} \Theta^{1/2} x_0^{2(1-D)} = \frac{D}{D+2} (\Theta_0 - 1). \quad (32)$$

Чисельний аналіз рівняння екстремумів показав, що із зростанням відношення  $T_s/T_c$  відбувається спадання  $x_0$ . Це приводить до зменшення температури переходу. Дія сили  $f_s$  при  $D < 1$ , де  $\eta=0$ , не змінюється у випадку  $D > 1$  ( $\eta \neq 0$ ).

Таким чином присутність сили  $f_s \propto (T)^{1/2} x^{1-D}$ , що обумовлена фрактальним характером фазового простору, протидіє стохастичній поведінці системи, тобто проявлюється своєрідний принцип Ле-Шательє в стохастичних системах з мультиплікативним шумом.

**Розділ 4** присвячений дослідженню впливу мультиплікативного шуму на поведінку трьохпараметричної синергетичної системи, що представлена стандартною схемою Лоренца. Така схема детально досліджена в детерміністичному режимі, коли параметр порядку, спряжене поле та

управляючий параметр не мають флуктуюючих складених. На відміну від цього, головна задача, що поставлена в розділі 4 зведена до з'ясування питання – яким чином зміниться поведінка синергетичної системи, якщо всі три ступені вільності мають адитивний шум [2], [3]. В розділі 4.1 показано, що супідрядність управляючого параметру та спряженого поля до параметру порядку приводять до трансформації адитивного шуму двох перших ступенів вільності в мультиплікативний. Рівняння еволюції параметру порядку  $\eta$  приймає вигляд

$$\dot{\eta} = -\frac{\partial V}{\partial \eta} + (\sigma_T g_T + \sigma_h g_h) \xi + \sqrt{2} \sigma_\eta \xi, \quad (33)$$

де крапка означає диференцювання по безрозмірному часі,  $\sigma_\eta^2$  – інтенсивність шуму параметру порядку,  $\sigma_h^2$  – інтенсивність шуму спряженого поля  $h$ ,  $\sigma_T^2$  – інтенсивність шуму управляючого параметру. В рівнянні (33) безрозмірний детерміністичний синергетичний потенціал, що відіграє у термодинаміці роль вільної енергії, має вигляд

$$V \equiv V(\eta) = \frac{1}{2} \left[ \eta^2 - \Theta \ln(1 + \eta^2) \right], \quad (34)$$

$\Theta$  – безрозмірний управляючий параметр, мультиплікативні функції

$$g_T = g_h \eta = \sqrt{2} \eta (1 + \eta^2)^{-1}, \quad (35)$$

$$g_h = \sqrt{2} (1 + \eta^2)^{-1} \quad (36)$$

визначають характер флуктуаційних додатків спряженого поля і управляючого параметру відповідно. Вираз (33) представляє узагальнене рівняння Ланжевена, в якому детерміністична складена узагальненої сили  $f = -\partial V / \partial \eta$  визначається видом синергетичного потенціалу (34), а стохастична – представляє суму адитивного і двох мультиплікативних шумів з відповідними мультиплікативними функціями (35), (36). В завершенні розділу 4.1 знайдено стаціонарне рішення рівняння Фоккера-Планка і положення максимуму густини ймовірності в залежності від

інтенсивності шумів. Рівняння екстремумів завжди має рішення  $\eta = 0$ , що відповідає неупорядкованій фазі. Відповідно, для упорядкованої маємо

$$x^3 - \Theta x^2 - 2x\sigma_T^2 + 4(\sigma_T^2 - \sigma_h^2) = 0, \quad x = 1 + \eta^2. \quad (37)$$

Як видно з (37) стаціонарні стани не вміщують залежності від шуму параметру порядку, і визначаються лише значеннями інтенсивностей шумів спряженого поля, управляючого параметру і значення самого управляючого параметру.

В розділі 4.2 показано, що адитивний шум параметру порядку не приводить до якісних змін поведінки синергетичної системи. Знайдена часова залежність параметру порядку в відсутності шуму.

Центральне місце в розділі займає розділ 4.3, присвячений дослідженню впливу мультиплікативного шуму на картину синергетичного переходу. В розділі 4.3.1 показано, що мультиплікативний шум спряженого поля приводить до зміщення точки синергетичного перетворення згідно співвідношенню  $\Theta = 1 - 4\sigma_h^2$ . При малих значеннях  $\Theta$  і  $\sigma_h$  стаціонарні значення параметру порядку даються наступними залежностями:

$$\eta_{\pm}^2 \approx \begin{cases} (4\sigma_h^2)^{1/3} - 1 + (1 + 1/\sqrt{3})\Theta / 3, & \Theta \rightarrow 0; \\ \Theta - 1 + 4\sigma_h^2 / \Theta^2, & \sigma_h^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (38)$$

Вирази (38) вказують на наявність переходу другого роду при умові  $\Theta > 1 - 4\sigma_h^2$ . Характерно, що при  $\Theta = 0$  спостерігається синергетичний перехід в несиметричний стан при умові  $\sigma_h > \sigma_h^c = 1/2$ . Звідси зрозуміло, що цей перехід індуцьований шумом одного спряженого поля, а не управляючого параметру. При умові  $\sigma_h = 0$  реалізується звичайний детерміністичний перехід.

Набагато більш суттєвим виявляється вплив стохастичного управляючого параметру, дослідженого у розділі 4.3.2. Виявляється, що

зростання інтенсивності шуму приводить до подавлення симетричного стану в інтервалі, обмеженому значеннями

$$2\sigma_{T\pm}^2 = \left( \frac{27}{2} \left( 1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right) \pm \left[ \left( \frac{27}{2} \left( 1 - \frac{\Theta}{3} \right) - \frac{\Theta^2}{8} \right) - 2\Theta^3 \right]^{1/2}. \quad (39)$$

На фазовій діаграмі вони визначають межі області існування упорядкованої та неупорядкованої фаз.

Поведінка параметру порядку в залежності від інтенсивності шуму управляючого параметру задається виразом

$$\eta^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(3 - \Theta)^2 + 4(2\Theta - 3 + 2\sigma_T^2)} \right]. \quad (40)$$

Показано, що аналогічно системам, розглянутим у розділі 2.3.2 при малій інтенсивності шуму в синергетичній системі також можливо створення детерміністичного конденсату, відповідаючого залежності  $\eta(i) = 0$ . При значеннях інтенсивності шуму управляючого параметру  $\sigma_T < \Theta - 1$  детерміністичний конденсат не досягається за нескінченний час, тоді як при  $\sigma_T > \Theta - 1$  його випадіння відбувається впродовж нескінченно тривалого часу.

В розділі 4.3.3 проведено узагальнення результатів, одержаних в розділах 4.3.1 та 4.3.2, на випадок спільного врахування шумів спряженого поля і управляючого параметру. Виявилось, що при цьому на фазовій діаграмі з'являються області метастабільних станів упорядкованої та неупорядкованої фаз. Трикритична точка на фазовій діаграмі з осями  $\Theta - \sigma_T$  визначається співвідношеннями

$$\Theta = \frac{4}{3} (1 - \sigma_h^2), \quad \sigma_T^2 = \frac{1}{6} (1 + 8\sigma_h^2). \quad (41)$$

При фіксованій інтенсивності шуму спряженого поля ( $\sigma_h = const$ ) зміна управляючого параметру приводить до фазового переходу другого роду. Якщо величина  $\sigma_h$  перевищує критичне значення, визначене другою умовою (19), система зазнає перехід першого роду.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

1. Довільна сила, виникаюча в рівнянні Фоккера–Планка при виборі числення, компенсується множенням вихідної густини ймовірності на експоненту, показник якої визначає характер поведінки системи у всьому часовому інтервалі.
2. Наявність мультиплікативного шуму приводить до трансформації області визначення у фазовому просторі стохастичної системи у самоафінну фрактальну множину, що має розмірність, яка міститься у інтервалі від 0 до 2. Фрактальний характер фазового простору обумовлює появу сингулярної сили, величина якої пропорційна амплітуді шуму і похідної від мультиплікативної функції по стохастичній змінній.
3. При малих значеннях фрактальної розмірності у стохастичній системі реалізується детерміністичний режим, в якому стохастична змінна стає незалежною від часу. Із зменшенням інтенсивності шуму кінцева доля ступенів вільності попадає у детерміністичний конденсат, тобто система втрачає ергодичність аналогічно тому, як це відбувається при склованні рідини.
4. Наявність міжчасткової взаємодії при великих значеннях фрактальної розмірності призводить до втрати симетрії стохастичної системи, яка складається із того, що функція розподілу набуває антисиметричності відносно заміни знаку стохастичної змінної. Температурна залежність параметру дальнього порядку має немонотоний характер, обумовлений фрактальною природою фазового простору.
5. Включення адитивних шумів в рівняння Лоренца, моделюючих поведінку синергетичної системи, показують, що принцип співвідрядності призводить до трансформації цих шумів в мультиплікативні тільки для спряженого поля та управляючого параметру.

Основні результати дисертації опубліковані у слідуючих роботах

[1] А.И.Олемской, Д.О.Харченко. Калибровка стохастической системы. // Изв.вузов.Физика. – 1996, №2, С.121–123.

[2] Е.А.Торопов, Д.О.Харченко. Влияние шума на характер поведения синергетической системы. // Изв.вузов.Физика. – 1996, №5, С.75–82.

[3] Е.А.Торопов, Д.О.Харченко. Синергетический переход в условиях шума. // Вестник СумДУ.- 1996, №3, С.8-15.

[4] А.И.Олемской, Д.О.Харченко. Нарушение симметрии и эргодичности в стохастической системе с произвольным мультипликативным шумом.// Металофініка.– 1996, т.18, С.3–11.

[5] А.И.Олемской, Д.О.Харченко. Кроссовер стохастической системы в детерминистический режим. // Научно–практическая конференция молодых ученых Республики Хакасия «Молодежь и наука – третье тысячелетие»: Тезисы докладов. – Абакан, 1995. – С.10.

[6] Е.О.Торопов, Д.О.Харченко. Критическое поведение синергетической системы в условиях шума. // III Черкасский семинар стран содружества «Актуальные вопросы диффузии, фазовых структурных превращений в сплавах»: Тезисы докладов. – Сокирне, 1995. – С.99.

[7] Е.О.Торопов, Д.О.Харченко. Пластическая деформация в условиях стохастичности.// Научно–техническая конференция «Техника и физика электронных систем и устройств»: Тезисы докладов. – Сумы, 1995. – С.242.

Харченко Д.О. Фазові переходи у системах з мультиплікативним шумом.

Дисертація на здобуття вченого ступеню кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.04.02.– “Теоретична фізика”, Сумський державний університет, Суми 1996. Захищається 7 наукових робіт, в яких розвинута каліброчна схема стохастичної системи і

Ав 36.528

**Ав 36.528**

проведене дослідження ефектів порушення симетрії в стохастичних системах з довільним міжчастковою взаємодією. Описана поведінка енергетичної системи, що знаходиться в умовах стохастичного оточування.

Ключові слова: стохастична система, фазовий перехід, мультиплікативний шум, фрактальна розмірність.

Kharchenko D.O. Phase Transitions in Systems with multiplicative Noise.

Thesis on search the scientific degree of candidate of physics and mathematics for speciality 01.04.02 – Theoretical Physics, Sumy State University, Sumy, 1996.

7 scientific works are defended in which gauge scheme for stochastic systems has been developed as well as the research of breaking symmetry and ergodicity has been carried out in stochastic system with arbitrary multiplicative noise and particle interaction. The synergetic system's behavior within stochastic media has been described.

Key words: stochastic system, phase transition, multiplicative noise, fractal dimensionality.

Відповідальний за випуск – Олемской А.І.

Підп. до друку

Формат 60x84/16

Обл.-вид.арк. 0.9

Тираж 50 прим.

Замовл. №405

Безкоштовно

«Різоцентр» СумДУ, 244007, м.Суми,

вул.Римського-Корсакова, 2