МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

на правах рукопису

Калашнікова Наталія Вікторівна

УДК 512.54

ГРУПИ З ОБМЕЖЕННЯМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ФАКТОР-ГРУП

(01.01.06 - алгебра та теорія чисел)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1996

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано в Дніпропетровському державному університеті

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор Л.А.Курдаченко

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник Інституту математики АН України Я.П.Сисак,
кандидат фізико-математичних наук, доцент Київського університету ім.Тараса Шевченка А.П.Петравчук

Провідна установа:
Львівський державний університет ім. Івана Франка

Захист відбудеться "___"____________1997 року о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 01.01.01 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, м.Київ-127, пр.акад.Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано "_____"____________1996 року

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради ______ Овсієнко С.А.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми

В багатьох областях теорії груп вивчається вплив властивостей тих чи інших об'єктів, які зв'язані з групою (сімей різноманітних підгруп, сімей централізаторів, класів спряжених елементів, груп автоморфізмів, зображень, характерів і т.п.), на властивості всієї групи. Зокрема, важливим є питання про те, який вплив на будову всієї групи мають деякі важливі сім'ї її фактор-груп. В теорії скінченних груп ця тематика розвивається давно і інтенсивно в рамках теорії формацій (особливо локальних формацій). В теорії нескінченних груп роль сім'ї всіх скінченних фактор-груп виявилась при вивченні різних алгоритмічних проблем. Інший показниковий результат тут - теорема Д.Робінсона про те, що якщо всяка скінченна фактор-група скінченно породженої розв'язуваної групи нільпотентна, то і сама група нільпотентна[1]. Починаючи з робіт М.Н'юмена[2,3] в теорії нескінченних груп сформувався напрямок, який вивчає вплив сім'ї всіх власних фактор-груп (тобто фактор-груп по неодиничних нормальних підгрупах) на будову всієї групи. Іншими словами, вивчались групи, всі власні фактор-групи яких належать до деякого важливого класу груп $\mathfrak{X}$.

В якості $\mathfrak{X}$ тут розглядались класи скінченних груп, надрозв'язуваних, поліциклічних, черніковських, нільпотентних груп фіксованого класу нільпотентності, скінченних над центром, груп зі скінченним комутантом і т.п. В роботі

---

[1] ROBINSON D.J.S. A theorem on finitely generated hyperabelian groups//Invent.Math.,10,1970.-P.P.38-43.

[2] NEWMAN M.F. On a class of metabelian groups// Proc. London Math.Soc.,10,1960.-P.P.354-364.

[3] NEWMAN M.F.. On a class of nilpotent groups// Proc. London Math.Soc.,10,1960.-P.P.365-375.

Д.Робінсона і Ж.Женга[4] розглядались групи, всі власні фактор-групи яких мають скінченний комутант або скінченні над центром. Групи зі скінченним комутантом і скінченні над центром групи є окремими підкласами класу FC-груп. В роботі С.Францiозі, Ф.де Жiованнi і Л.А.Курдаченко[5] вивчались розв'язувані групи, всі власні фактор-групи яких є FC-групами. В свою чергу, клас FC-груп є підкласом класу груп з чернiковськими класами спряжених елементів - CC-груп. Вивчення CC-груп проходить не так просто, для них ще не створена загальна теорія, на відміну від FC-груп. Тому було б природнім спочатку розглянуть групи, всі власні фактор-групи яких належать деякому достатньо добре вивченому підкласу класу FC-груп. Таким добре вивченим підкласом є клас шарово-чернiковських груп. В даній дисертації і вивчаються групи, всі власні фактор-групи яких шарово-чернiковські.

В багатьох роботах розглядались групи, в яких обмеження накладаються не на всю систему власних фактор-груп, а на деякі її підсистеми. В дисертації вивчаються групи, в яких обмеження накладаються на фактор-групи по нескінченних підгрупах.

Мета роботи

Дослідити будову AQI-груп, тобто груп, в яких будь-яка фактор-група по нескінченній нормальній підгрупі абелева; розв'язувані групи, в яких всяка власна фактор-група шарово-чернiковська; групи, в яких всі обмежені фактор-групи скінченні (ко-шарово-скінченні групи), при умові, що вони мають зростаючий центральний ряд довжини ω.

---

[4] ROBINSON D.J.S., ZHANG Z. Groups whose proper quotients have finite derived subgroups//J.Algebra,118,N2,1988. -P.P.346-368.

[5] FRANCIOSI S., de GIOVANNI F., KURDACHENKO L.A.. Groups whose proper quotients are FC-groups//Universita di Napoli "Federico 11", dipartimento di Matematika e applicarioni, Preprint N64 -1995; в печати - Journal of Algebra.

Методи досліджень

Використовуються методи теорії нескінченних узагальнень розв'язуваних груп і теорії модулів над цілочисловими груповими кільцями.

Наукова новизна

Основні результати дисертаційної роботи є новими. Описані типи нескінченних локально розв'язуваних AOI-груп. Досліджено будову розв'язуваних груп, в яких всяка власна фактор-група є шарово-черніковською. Вивчаються ко-шарово-скінченні групи. Досліджено будову ко-шарово-скінченної групи без скруту з центральним рядом довжини ω, а також нільпотентної ко-шарово-скінченної групи і резидуально скінченної локально нільпотентної ко-шарово-скінченної групи.

Апробація роботи

Результати, отримані в дисертації, доповідались на науковому семінарі кафедри алгебри та математичної логіки Київського університету імені Тараса Шевченка, Міжнародній конференції по алгебрі пам'яті А.І.Ширшова та Всеукраїнській науковій конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях" (Львів, 5-7 жовтня 1995 р.)

Публікації

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1,2,3,4,5,6].

Структура і обсяг дисертації

Робота складається із вступу, трьох розділів і списку літератури із 63 найменувань. Обсяг роботи 8 сторінок.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові, професору Л.А.Курдаченко за постійну увагу до роботи.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність проблематики дисертації, наводиться короткий огляд робіт за темою дисертації, характеризується зміст роботи.

В першому розділі розглядаються групи, всі фактор-групи яких по нескінченних нормальних підгрупах абелеві AQI-групи.

В кожній такій групі G виділяється характеристична підгрупа $I(G)$ - перетин всіх нескінченних нормальних підгруп. Тоді кожна G-інваріантна підгрупа $I(G)$ скінченна. Можливі дві ситуації: $I(G)$ - G-квазіскінченна); $I(G)$ містить в собі таку скінченну G-інваріантну підгрупу B, що $I(G)/B$ - нескінченний G-головний фактор. В свою чергу, в першій ситуації або $I(G)$ подільна черніковська підгрупа, або $I(G)$ - елементарна p-підгрупа для деякого простого числа p. Опис AQI-груп зводиться до розгляду кожної з цих ситуацій. Цей опис одержано в дисертації при додатковій умові локальної розв'язності групи.

Результати викладені в наступній основній теоремі:

ТЕОРЕМА I.18. Нехай G - нескінченна локально розв'язувана група. Всяка нескінченна нормальна підгрупа G визначає абелеву фактор-групу тоді і тільки тоді, коли G - група одного із наступних типів:

(1) G *- абелева група;*

(2) *група G задовольняє наступні умови:*

(2a) $\zeta(G) = D \times F$, *де D - квазіциклічна p-підгрупа, p - просте число, F - скінченна підгрупа;*

(2b) $[G, G]$ *- скінченна підгрупа D;*

(2c) *фактор-група $G/\zeta(G)$ скінченна;*

(3) G *- черніковська група, яка задовольняє наступні умови:*

(3a) *якщо D - ділена частина групи G, то фактор-група $G/C_G(D)$ є циклічною;*

(3b) *якщо L - нескінченна G-припустима підгрупа D, то $L = D$, вокрема, D - p-підгрупа для деякого простого числа p;*

(3c) $[G, G] = D$;

(4) *група G задовольняє наступні умови:*

(4a) $\zeta(G) = D \times F$, *де* D *- квазіциклічна* p*-підгрупа,* p *- просте число,* F *- скінченна підгрупа;*

(4b) $[G, G] = \Omega_1(D)$ *- підгрупа простого порядку;*

(4c) $G/\zeta(G)$ *- нескінченна элементарна абелева* p*-група;*

(5) *група* G *задовольняє наступні умови:*

(5a) $[G, G]$ *- скінченна елементарна абелева* p*-підгрупа* $\zeta(G)$, p *- просте число;*

(5b) $G/\zeta(G)$ *- нескінченна елементарна абелева* p*-група;*

(5c) *якщо* $L \leqslant [G, G]$, *то група* $\zeta(G/L)$ *скінченна;*

(6) *група* G *задовольняє наступні умови:*

(6a) $D = [G, G]$, *- квазіциклічна* p*-підгрупа,* p *- просте число;*

(6b) $\zeta(G) = D \times F$, *де підгрупа* F *скінченна;*

(6c) *періодична частина* T *групи* G *є черніковською;*

(6d) *для будь-якого елементу нескінченного порядку* $x \in G \setminus \zeta(G)$ *фактор-група* $G/C_G(x)$ *- квазіциклічна* p*-група;*

(7) *група* G *задовольняє наступні умови:*

(7a) $[G, G] = K$ *- елементарна абелева* p*-підгрупа,* p *- просте число;*

(7b) *якщо* L *- нескінченна* G*-припустима підгрупа* K, *то* $L = K$*;*

(7c) $K \leqslant \zeta(G)$*;*

(7d) *якщо* T/K *- періодична частина фактор-групи* G/K, *то* T/K *скінченна і* $T \neq G$*;*

(7e) *якщо* $C = C_G(K)$, *то* $C \leqslant T$ *і* T/C *-* p *- група;*

(7f) *фактор-група* G/T *ізоморфна деякій абелевій підгрупі групи* $GL_n(F_p[[x]])$*;*

(7g) G *містить в собі таку підгрупу* H, *що* $G = K \cdot H$ *і перетин* $H \cap K$ *скінченний;*

(8) *група* G *задовольняє наступні умови:*

(8a) $[G, G] = K$ *- ділена черніковська* p*-підгрупа,* p *- просте число;*

(8b) *якщо* L *- нескінченна* G*-припустима підгрупа* K, *то* $L = K$*;*

(8c) $K \leqslant \zeta(G)$*;*

(8d) *якщо* T/K *- періодична частина фактор-групи*

G/K, *то* T/K *скінченна і* $G \neq T$;

(8e) $C_G(K) \leqslant T$;

(8f) *фактор-група* G/T *ізоморфна деякій абелевій підгрупі* $GL_n(Z_{p^\infty})$, Z_{p^∞} *- кільце цілих p-адичних чисел;*

(8g) G *містить в собі таку підгрупу* H, *що* $G = KH$ *і перетин* $H \cap K$ *скінченний;*

(9) *група* G *задовольняє наступні умови:*

(9a) $K = [G, G]$ *- мінімальна нескінченна нормальна підгрупа* G; $K \leqslant \zeta(G)$;

(9b) $G = K\lambda A$;

(9c) $C_A(K)$ *- скінченна підгрупа* A;

(9d) *якщо* K *- елементарна абелева p-підгрупа, то періодична частина фактор-групи* $A/C_A(K)$ *є локально циклічною p-групою;*

(9e) *якщо* K *вільна від скруту, то періодична частина фактор-групи* $A/C_A(K)$ *є локально циклічною підгрупою;*

(10) *група* G *задовольняє наступні умови:*

(10a) $K = [G, G] \leqslant \zeta(G)$;

(10b) *якщо* L *- нескінченна G-припустима підгрупа* K, *то* $L = K$;

(10c) $\zeta(K)$ *скінченна і* $K/\zeta(K)$ *нескінченна мінімальна абелева нормальна підгрупа* $G/\zeta(K)$;

(10d) *якщо* C *- скінченна G-припустима підгрупа* K, *то* $C \leqslant \zeta(K)$;

(10e) $G/\zeta(K)$ *- група типу* (9).

В другому розділі вивчаються групи, всі власні фактор-групи яких шарово-черніковські. Очевидно кожна проста група буде такою. Для того, щоб виключити таку ситуацію, звичайно в такого роду дослідженнях вимагають, щоб група включала в себе неодиничну абелеву нормальну підгрупу.

Нехай G - група, всі власні фактор-групи якої шарово-черніковські, A - неодинична абелева нормальна підгрупа G, $\mathfrak{M} = \{B/B$ - неодинична G-інваріантна підгрупа $A\}$. Тут виникають дві ситуації: $\bigcap\mathfrak{M} = \langle 1\rangle$ (немонолітичний випадок), $\bigcap\mathfrak{M} \neq M = \langle 1\rangle$ (монолітичний випадок, причому M - моноліт всієї групи G). Підгрупу A можна розглядати як модуль над груповим кільцем ZH, де $H = G/A$ - шарово-черніковська група. В першому випадку A містить в собі підмодуль B, всі власні фактор-модулі якого скінченні (кoквазіскінченний ZH-модуль), в другому випадку - M - простий ZH-модуль). Іншими словами, для вивчення будови групи G необхідно вивчить два типи модулів над груповим кільцем шарово-черніковської групи $H = G/A$: коквазіскінченні ZH-модулі і прості ZH-модулі. Їх вивчення і дає можливість описати локально розв'язувані групи шарово-черніковськими власними фактор-групами.

Теорема 2.9. Нехай G - розв'язувана група. Всяка власна фактор-група G тоді і тільки тоді шарово-черніковська, коли G - група одного із наступних типів:

(1) G - шарово-черніковська група;

(2) G - майже абелева, мінімаксна і всяка власна фактор-група G черніковська;

(3) G - локально циклічна група вільна від скруту;

(4) $G = A \leftthreetimes E$ і виконуються наступні умови:

(4a) A - нескінченна нормальна елементарна абелева p-підгрупа для деякого простого числа p;

(4b) E - шарово-черніковська підгрупа;

(4c) $A = C_G(A)$ і $\mathbb{F}_pE$-модуль A - простий;

(4d) p _ $(\mathrm{Soc}E)$;

(4e) $\mathrm{Soc}E$ включає в себе таку підгрупу R, що $\mathrm{Soc}E/R$ - локально циклічна група і $\mathrm{Core}_E R = \langle 1 \rangle$;

(4f) якщо $G = A \leftthreetimes D$ для деякої підгрупи D, то підгрупи D і E спряжені.

В третьому розділі вивчаються групи, в яких всі обмежені фактор-групи скінченні - ко-шарово-скінченні групи. Розглянуто деякі типи гіперцентральних ко-шарово-скінченних груп. Одержано різноманітні характеризації таких груп, які грунтуються на узагальненні поняття p-базисної підгрупи. Зокрема доведено, що перетин всіх нормальних підгруп, індекс яких дорівнює p^n, $n \in \mathbb{N}$, буде p-діленою підгрупою. Показано також, що фактори ω-гіперцентральної ко-шарово-скінченної групи без скруту - ко-шарово-скінченні.

Т е о р е м а 3.11. Нехай G - ω-гіперцентральна група без скруту,

$$\langle 1 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_n \leq C_{n+1} \leq \ldots \leq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = G \;-$$

верхній центральний ряд G. Група G тоді і тільки тоді ко-шарово-скінченна, коли вона задовольняє наступні умови:

(1) *для всякого простого числа* p *знайдеться такий номер* ℓ_p, *що фактори* C_{n+1}/C_n – p-*ділені для* $n \geq \ell_p$;

(2) *підгрупа* C_{ℓ_p} *має такий ряд*

$$H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \ldots \triangleleft H_n = C_{\ell_p},$$

що

(2a) H_0 – *підгрупа скінченного рангу (за Мальцевим-Прюфером)*;

(2b) H_i/H_{i-1} – *абелева група без скруту*, $1 \leq i \leq n$;

(2c) H_i/H_{i-1} – p-*ділена група*, $1 \leq i \leq n$.

Висновок 3.II.I. Нехай G – *нільпотентна група.* G *тоді і тільки тоді ко-шарово-скінченна, коли вона задовольняє наступні умови:*

для будь-якого простого числа p *група* G *має такий ряд*

$$L_1 \triangleleft L_2 \triangleleft L_3 \triangleleft L_4 \triangleleft L_5 \ldots \triangleleft L_n = G,$$

що

(1) L_1 *абелева ділена* p-*група*;

(2) L_2/L_1 *періодична* p-*група*;

(3) L_3/L_2 *скінченна* p-*група*;

(4) L_4/L_3 *група вільна від скруту скінченного рангу*;

(5) L_{i+1}/L_i *абелеві* p-*ділені групи вільні від скруту* $4 \leq i \leq n-1$.

Висновок 3.II.2. Нехай G – *нільпотентна ко-шарово-скінченна група.* T – *її періодична частина. Тоді* $T = \underset{p\in P}{\times} T_p$, *причому* $\zeta(T_p)$ *включає в себе таку ділену* p-*підгрупу* D_p, *що* T_p/D_p – *скінченна* p-*група (тут* T_p – *силівська* p-*підгрупа* G*).*

Теорема 3. I2. Нехай G – *резидуально скінченна локально нільпотентна ко-шарово-скінченна група. Тоді* $G \leq \prod_{p\in P} G_p$, *група* G_p *має центральний ряд*

$$\langle 1\rangle = L_0 \leq L_1 \leq \ldots \leq L_k \leq L_{k+1} \leq \ldots \leq L_n = G_p,$$

в якому фактори L_i/L_{i-1} *скінченні для* $1 \leq i \leq k$, *а* L_i/L_{i-1} *ізоморфна адитивній групі кільця цілих* p-*адичних чисел*, $k+1 \leq i \leq n$.

Роботи автора за темою дисертації

[1] КАЛАШНИКОВА Н.В. Группы с некоторыми ограничениями на фактор-группы//Межд. конф. по алгебре.-Тезисы докл. по теории групп.-Новосибирск,1991.-С.43.

[2] КАЛАШНІКОВА Н.В. Групи, всі власні фактор-групи яких шарово-скінченні. Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Розробка та застосування математичних методів в науково технічних дослідженнях" (Львів 5-7 жовтня 1995 р.), частина 1, с. 57.

[3] КАЛАШНИКОВА Н.В. Группы с некоторыми ограничениями на фактор-группы. -31с. Деп. в ГНТБ Украины 12.10.95, N 2263 - Ук 95.

[4] Калашнікова Н.В. Групи, всі власні фактор-групи яких шарово-чернiковські. - 19с. Відправлено в УМЖ.

[5] КУРДАЧЕНКО Л.А., КАЛАШНИКОВА Н.В. О группах, двойственных к слойно-конечным. -21с. Деп. в ГНТБ Украины 18.01.96, N 308 - Ук 96.

[6] KALASHNIKOVA N.V., KURDACHENKO L.A. Groups, which are dual to layer-finite//Infinite groups 94, Proceedings Intern.Conf. Ravello, Walter de Gruyter, Berlin,1995.

Ключові слова: група, фактор-група, модуль, групове кільце.

Калашникова Н.В. Группы с ограничениями для некоторых фактор-групп. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - алгебра и теория чисел. Киевский национальный университет, Киев, 1996.

В диссертации исследуются AQI-группы, то есть группы, в которых всякая фактор-группа по бесконечной нормальной подгруппе абелева. Описаны типы локально разрешимых AQI-групп. Изучено строение разрешимых групп, в которых всякая собственная фактор-группа слойно-черниковская. Рассматриваются ко-слойно-конечные группы. Описано строение ко-слойно-конечных групп без кручения с центральным рядом длины ω, а также нильпотентных ко-слойно-конечных групп и финитно аппроксимируемых локально нильпотентных ко-слойно-конечных групп.

Kalashnikova N.V., Groups with restriction on some factor groups. Manuscript. Thesis of dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06 - algebra and number theory. Kiev national university, Kiev, 1996.

There are investigated AQI-groups - groups, in which any factor group on infinite normal subgroup is abelian. There are described all types of locally soluble AQI-groups. There are studied structure of soluble groups, in which any own factor group is layer-Chernikov. Co-layer-finite groups are considered. There are described structure of torsion-free ω-hypercentral co-layer-finite groups, nilpotent co-layer-finite groups and residually finite locally nilpotent co-layer-finite groups.

тип. ДГУ зак. 2657-100.